William y Martha Kneale

El desarrollo de la lógica

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

1. Quentin Gibson: *La lógica de la investigación social* (segunda edición).
2. M. F. Ashley Montagu: *La dirección del desarrollo humano* (segunda edición).
3. Gustav Bergmann: *Filosofía de la ciencia.*
4. Christian Bay: *La estructura de la libertad.*
5. Ernest Nagel: *La lógica sin metafísica.*
6. David Hilbert y Wilhelm Ackermann: *Elementos de lógica teórica* (tercera edición).
7. Vernon Van Dyke: *Ciencia política: un análisis filosófico.*
8. Karl R. Popper: *La lógica de la investigación científica*
9. R. M. Martin: *Verdad y denotación.*
10. Ernest Gellner: *Palabras y cosas.*
11. C. O. Broad: *El pensamiento científico.*
12. John Hospers: *La conducta humana.*
13. Arthur Pap: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. Schelling: *La estrategia del conflicto.*
15. Richard B. Braithwaite: *La explicación científica.*
16. Milic Capek: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. Ros Ashby: *Proyecto para un cerebro.*
18. Hans Reichenbach: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. George Polya: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. George L. S. Shackle: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. Armstrong: *La percepción y el mundo físico.*
22. Ernest Nagel: *Razón soberana.*
23. Max Black: *Modelos y metáforas.*
24. Haskell B. Curry y Robert Feys: *Lógica combinatoria.*
25. Ludwig Wittgenstein: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. Abraham Edel: *El método en la teoría ética.*
27. Alfred Landé: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. Jean Ladrière: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. Wiener y J. P. Schadé: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. von Wright: *Norma y acción.* Una investigación lógica.
31. E. Nagel y J. P. Newman: *El teorema de Gödel.*
32. Henry Margenau: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. Chappell: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. Alf Ross: *Lógica de las normas.*
35. W. Sellars: *Ciencia, percepción y realidad.*
36. Christian Thiel: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*
37. Claude Flament: *Teoría de grafos y estructuras de grupo.*
38. W. y M. Kneale: *El desarrollo de la lógica.*
39. G. E. Hughes y M. J. Cresswell: *Introducción a la lógica modal.*
40. Karl R. Popper: *Conocimiento objetivo.*
41. Gottlob Frege: *Escritos lógico-semánticos.*
42. Stephen C. Kleene: *Introducción a la Metamatemática.*
43. G. Kalinowski: *Lógica del discurso normativo.*
44. J. J. C. Smart: *Entre ciencia y filosofía.*
45. C. Truesdell: *Ensayos de historia de la mecánica.*
46. A. Heyting: *Introducción al intuicionismo.*
47. J. Lukasiewicz: *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la Lógica formal moderna.*
48. K. H. Borch: *La economía de la incertidumbre.*
49. J. H. Woodger: *Biología y lenguaje.*

EL DESARROLLO DE LA LOGICA

ESTRUCTURA Y FUNCION
EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

William y Martha Kneale

EL DESARROLLO DE LA LOGICA

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Esta versión de *The Development of Logic* (1st edition 1961)
se publica por acuerdo con THE CLARENDON PRESS OXFORD.
Los derechos para la edición castellana de la obra
son propiedad de EDITORIAL TECNOS, S. A.

Traducción por
JAVIER MUGUERZA

1.ª edición, 1972
Reimp., 1980

Se han incorporado las correcciones hechas
por los autores en los años 1964, 1966 y 1968.

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1980
O'Donnell, 27 - Tel. 226 29 23 - Madrid-9
ISBN: 84-309-0840-4.
Depósito Legal: M-14996-1980.

Printed in Spain - Impreso en España por Gráficas Lormo - Isabel Méndez, 15 - Madrid-18

Haec autem est dialectica, cui quidem omnis veritatis seu falsitatis discretio ita subiecta est ut omnis philosophiae principatum dux universae doctrinae atque regimen possideat.

ABELARDO

Lockius aliique qui spernunt non intelligunt.

LEIBNIZ

Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus.

CANTOR

Inimicus Plato, sed magis inimica falsitas.

TARSKI

INDICE

PREFACIO ..... *Pág.* XIII

I. LOS COMIENZOS 1
1. La noción de validez 1
2. La demostración geométrica 2
3. La argumentación dialéctica y metafísica 6
4. La erística y la sofística 11
5. Platón y la filosofía de la lógica 15

II. EL *Organon* DE ARISTÓTELES 22
1. El contenido del *Organon* 22
2. La doctrina de las *Categorías* y sus consecuencias lógicas 24
3. Los *Tópicos* 31
4. La teoría aristotélica del significado y la verdad 42
5. Las cuatro formas del enunciado general 52
6. La doctrina del silogismo 64
7. La lógica modal aristotélica 78
8. La lógica no-silogística en los *Analíticos* 91
9. La escuela aristotélica: Teofrasto 94

III. LOS MEGÁRICOS Y LOS ESTOICOS 107
1. La filosofía megárica y los orígenes de la lógica estoica 107
2. Teorías megárica y estoica de la modalidad 111
3. El debate en torno a la naturaleza de los condicionales 121
4. La teoría estoica del significado y la verdad 131
5. El sistema estoico de los esquemas de inferencia 151

IV. LA LÓGICA ROMANA Y MEDIEVAL 168
1. De Cicerón a Boecio 168
2. De Alcuino a Abelardo 186
3. La lógica de las Universidades 210
4. Proprietates terminorum 230
5. Consequentiae 255

V. LA LÓGICA POSTRENACENTISTA 276
1. El humanismo y el nacimiento de la ciencia natural 276
2. Los intereses de Leibniz 296
3. El «Calculus de continentibus et contentis» leibniziano 310
4. De Saccheri a Hamilton 319
5. Bolzano y Mill 331

VI. LA ABSTRACCIÓN MATEMÁTICA 351
1. Geometría y axiomática 351
2. Números y funciones 361
3. Boole y el álgebra de la lógica 373
4. Ulteriores desarrollos del álgebra booleana 389
5. La teoría de las relaciones: De Morgan y Peirce 395

VII. NÚMEROS, CONJUNTOS Y SERIES 402
1. Frege y sus contemporáneos 402
2. La teoría cantoriana de conjuntos 405
3. Frege y sus predecesores 409
4. Las definiciones fregeanas de los números naturales 421
5. La serie numérica: Dedekind y Peano 431

VIII. La lógica general de Frege 441

1. La *Begriffsschrift* 441
2. Sentido y referencia: objetos y funciones 456
3. La lógica de los *Grundgesetze* 465
4. Balance de la contribución de Frege 471

IX. Desarrollos formales posteriores a Frege 475

1. El simbolismo y sus variedades 475
2. Métodos de presentación: axiomas y reglas 486
3. Deducción natural y desenvolvimiento 499
4. La lógica modal 509
5. En torno a la posibilidad de lógicas alternativas 528

X. La filosofía de la lógica después de Frege 536

1. Expresión, designación y verdad 536
2. La teoría de las descripciones y las diversas especies de designación 552
3. La problemática de la intensionalidad 559
4. Identidad, funciones y clases 575
5. Necesidad y lenguaje 585

XI. La filosofía de la matemática después de Frege 606

1. Las paradojas de la teoría de conjuntos 606
2. La teoría russelliana de los tipos lógicos 611
3. El intuicionismo de Brouwer 625
4. El programa metamatemático hilbertiano 633

XII. La teoría de los sistemas deductivos 641

1. La metateoría de la lógica primaria 641
2. La metateoría de la lógica general 653
3. La incompletabilidad de la aritmética formal 663
4. El problema de la decisión 674
5. El puesto de la lógica entre las ciencias 685

Selección bibliográfica 691

Indice de autores y materias 697

PREFACIO

Como su título indica, este libro pretende presentar una visión de la evolución y progreso de la lógica más bien que un inventario cronológico de cuanto los estudiosos del pasado —buenos o malos— hayan tenido que decir acerca de esta ciencia. Con el fin de preservar la continuidad de nuestra descripción de aquel proceso, y en orden a facilitar su ambientación histórica, mi esposa y yo hemos incluido, no obstante, alguna que otra referencia a obras que no merecerían ser recordadas por su intrínseco valor; y hasta, en ocasiones, nos hemos permitido debilidades de anticuarios cuando creímos que el resultado de nuestra curiosidad podía ser de interés para otras personas. Pero nuestro objetivo primordial ha sido, en cualquier caso, reseñar la primera aparición de aquellas ideas que nos parecen más importantes dentro del propio panorama contemporáneo de la lógica. Semejante programa descansa abiertamente en juicios de valor y somos, pues, conscientes de que nuestra selección del material y más aún nuestros comentarios —especialmente en los últimos capítulos— podrían chocar a algunos lectores. En defensa de nuestro modo de proceder sólo podemos alegar que es el que mejor se acomodaba a nuestros intereses y el único que, de acuerdo con ello, nos era dado seguir.

La idea de acometer sobre estas bases una historia de la lógica se me ocurrió por vez primera en 1947, al ser invitado a pronunciar una conferencia en Cambridge con ocasión del centenario del Mathematical Analysis of Logic *de Boole. Parte de aquella conferencia sobrevive en el capítulo VI de este libro, donde ha sido reproducida de la revista* Mind, *LVII (1948), con la oportuna autorización del editor. Durante los diez años siguientes dediqué al proyecto todo el tiempo que pude distraer de la enseñanza y otras tareas más apremiantes, encontrándome hacia 1957 con un borrador que abarcaba la mayor parte de la materia a tratar, si bien su tratamiento dejaba aún mucho que desear. Un fragmento del contenido del capítulo IX, § 3, se publicó bajo el título «The Province of Logic» en el volumen* Contemporary British Philosophy, *tercera serie (George Allen & Unwin, 1956), de donde aquí se reproduce con permiso asimismo del editor, pero buena parte de lo que entonces escribí me pareció insatisfactorio a la hora de incorporarlo definitivamente al libro. Como cabría haber esperado, los primeros capítulos —que hube de limitarme a ensamblar provisionalmente unos con otros de una manera un tanto impresionista— eran los más necesitados de revisión, llegando pronto a persuadirme de que se imponía volver a redactarlos por entero y en términos de mayor amplitud. En este punto, la Fundación Leverhulme me concedió una ayuda que hizo posible dispensarme por espacio de dos trimestres de mis obligaciones docentes en el Exeter College. Estoy muy agradecido a los rectores de la misma por su generosa ayuda, que me daría oportunidad de concluir los capítulos actualmente numerados como IV, V y VI. Pero temo que incluso así me habrían faltado las fuerzas si mi esposa no hubiera accedido por esas fechas a hacerse cargo de la parte griega del libro, dedicándole no sólo un trimestre de su año sabático sino también la mayor parte de su tiempo libre a lo largo de los dos años y medio siguientes. Excepción hecha de la última sección relativa al sistema estoico de los esquemas de inferencia, los tres primeros capítulos son obra suya en su versión actual. Aparte de ello, me ha asistido con*

su consejo sobre el mejor modo de abordar numerosas cuestiones de capítulos ulteriores.

Ambos debemos expresar nuestro reconocimiento a los señores John Lemmon y Brian McGuinness, a los doctores Lorenzo Minio-Paluello y Richard Walzer y al profesor Hao Wang por su lectura de diversos apartados del presente trabajo, así como por habernos sugerido correcciones y mejoras de estos últimos. El profesor Arthur Prior, que leyó la totalidad del texto mecanografiado, nos hizo sobre el mismo copiosos y útiles comentarios, estándole sumamente reconocidos por la generosidad con que nos permitió aprovechar su vasto conocimiento de la historia de la lógica. Aunque por regla general hemos aceptado gustosamente las recomendaciones recibidas, algunas veces nos hemos obstinado en nuestros propios puntos de vista, por lo que a ninguno de aquellos amigos les podrá afectar la responsabilidad de las deficiencias que subsistan.

W. K.

EL DESARROLLO DE LA LOGICA

I. LOS COMIENZOS

1. La noción de validez.

La lógica se ocupa de los principios de la inferencia válida; y es indudable que los hombres llevaban a cabo inferencias, y sometían a crítica las inferencias ajenas, mucho antes de Aristóteles. Ello no basta por sí solo para justificar que hablemos de un comienzo de la lógica con anterioridad a Aristóteles, pues es posible que los hombres desarrollen con corrección actividades diversas (por ejemplo, hablar en castellano) sin formular expresamente las reglas que presiden dichas actividades. Pero de los indicios que encontramos en Platón y Aristóteles, así como otras fuentes, se desprende con claridad que los filósofos griegos habían iniciado la discusión de los principios de la inferencia válida antes de que Aristóteles compusiese lo que ha venido a conocerse como el *Organon*. El propósito de este capítulo es rastrear, hasta donde los testimonios lo permitan, el desarrollo del pensamiento lógico anterior a Aristóteles. Semejante tarea no es fácil de llevar a cabo sobre la pura y simple base de esos testimonios; pero cabe, no obstante, formular razonables conjeturas sobre los orígenes de la reflexión lógica, así como hacer ver que tales conjeturas se hallan avaladas en alguna medida por los testimonios en cuestión.

Ya que la lógica no se reduce al simple argumentar válidamente, sino entraña la reflexión sobre los principios de la validez, sólo podrá surgir genuinamente cuando se cuente ya con una suma considerable de material argumental o inferencial. No todo tipo de discurso suscita la pesquisa lógica. La mera fabulación o el discurso literario, por ejemplo, no dan pie para la argumentación. Son sólo aquellos tipos de indagación o de discurso en que se pide o busca una *demostración* los que con propiedad promueven la investigación lógica, pues demostrar una proposición no es otra cosa que inferirla válidamente de premisas verdaderas. Dos son, en efecto, los requisitos de la demostración: premisas, o puntos de partida, verdaderas y argumentaciones válidas. No es fácil determinar cuándo se reparó por vez primera en la mutua independencia de ambos requisitos, pero tal cosa estaba ya perfectamente clara para Aristóteles cuando en los *Tópicos* [1], y de nuevo en los *Primeros Analíticos* [2], trazó la distinción entre razonamiento apodíctico y razonamiento dialéctico. El último de estos pasajes merece ser transcrito en su integridad, puesto que arroja luz sobre sobre el contexto en que originariamente se fraguó la distinción:

«La premisa demostrativa (ἀποδεικτικὴ πρότασις) difiere de la dialéctica en que la demostrativa consiste en admitir una de entre un par de proposiciones contradictorias (pues el hombre que demuestra da algo por sentado como punto de partida, en vez de cuestionarlo), mientras que la dialéctica plantea un interrogante acerca de cuál de dos contradictorias es verdadera. Pero tal circunstancia no comporta ninguna diferencia en cuanto al hecho de darse un silogismo en uno

1 *Topica*, I, 1 (100a25-30).
2 *An. Pr.* I, 1 (24a22-24b12).

y otro caso. Tanto el hombre que demuestra como el que cuestiona razonan ambos a partir de la suposición de que algo dado pertenece, o no pertenece, a algo otro. De suerte que una premisa silogística no es sino la afirmación o negación de un predicado respecto de un sujeto, ..., pero se tratará de una premisa demostrativa si es verdadera y se la acepta por haber sido derivada de principios inicialmente presupuestos; en tanto que una premisa dialéctica entrañará, para el que suscita la discusión, una pregunta relativa a la verdad de una proposición o su contradictoria, y para el que, sobre esta base, trata de razonar, la aceptación de una proposición simplemente plausible o comúnmente admitida.»

La distinción entre argumentación demostrativa y dialéctica se introduce aquí por referencia a las actividades en que, de acuerdo con Aristóteles, desempeña la enunciación de las correspondientes premisas el papel que le es propio. La premisa demostrativa es sostenida por el que enseña a lo largo de su explicación. Es la premisa de lo que en *De Sophisticis Elenchis* llama Aristóteles un argumento didáctico [3]. La premisa dialéctica, por su parte, es la adoptada en el curso de un debate con el propósito de argüir. Desde el punto de vista lógico, sin embargo, la distinción que verdaderamente importa es que la premisa demostrativa ha de ser verdadera y necesaria, en tanto la premisa dialéctica no necesita serlo [4]. En la demostración partimos de premisas verdaderas y llegamos con necesidad a una conclusión verdadera: con otras palabras, hemos probado algo. En la argumentación dialéctica, por el contrario, no se sabe que las premisas sean verdaderas y no hay necesidad de que la conclusión lo sea tampoco. Si cabe una aproximación a la verdad por medio de la dialéctica, dicha aproximación habrá de ser más indirecta.

Podemos distinguir tres géneros de discurso en que se buscan y se piden pruebas. En la matemática pura tratamos de probar verdades abstractas *a priori;* en la metafísica, proposiciones de índole muy general relativas a la estructura del universo; y en la argumentación cotidiana, especialmente la política o la forense, perseguimos la prueba de proposiciones contingentes. De estos tres tipos de discurso, tan sólo el matemático responde abiertamente a la descripción aristotélica de la argumentación demostrativa; y las matemáticas suministran, en efecto, la mayor parte de los ejemplos que Aristóteles nos ofrece de demostración. Ya que es probable, pues, que la reflexión sobre esta clase de razonamiento estimulase las primeras investigaciones lógicas, habremos de ocuparnos de él en primer lugar.

2. La demostración geométrica.

Parece verosímil que la noción de demostración atrajese primeramente la atención en conexión con la geometría. Es bien sabido que los egipcios habían descubierto por procedimientos empíricos algunas verdades geométricas (por ejemplo, una fórmula para calcular el volumen de una pirámide truncada), y la misma denominación de «geometría» —que en sus orígenes venía a querer decir «medida del terreno»— revela la consideración que esos estudios merecían al ser introducidos en Grecia. La gran proeza de los griegos consistió en reemplazar tales estudios de tipo empírico por una ciencia *a priori* de carácter demostrativo. Algunos relatos más o menos legendarios atribuyen a

[3] *De Soph. Elench.* 2 (165b1).
[4] *An. Post.* I, 19 (81b18).

Tales (640-546 a. C.) la primera *prueba* de un teorema geométrico [5], mas la investigación sistemática de nuestra ciencia parece haberse iniciado en el seno de la escuela pitagórica.

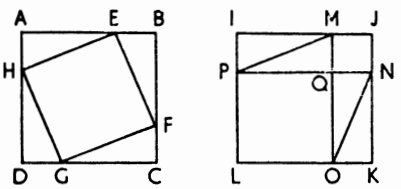
Se dice de Pitágoras que nació en Samos, en alguna fecha de la primera mitad del siglo sexto anterior a nuestra Era, y que emigró a Crotona, ciudad griega de la Italia meridional, donde fundó una orden ascética y profesó la doctrina de la metempsícosis. Tenemos aquí el origen de la idea de la filosofía como un estilo de vida. Es incluso posible que el vocablo «filosofía», en su significado originario de «amor a la sabiduría», fuese acuñado por los pitagóricos para describir la senda mostrada por el maestro cuando a sí mismo se llamó φιλόσοφος. Asistimos también con el pitagorismo al despuntar de las concepciones intelectualistas, según las cuales es el intelecto la más notable facultad humana y las verdades obtenidas mediante el solo uso de nuestro entendimiento son de algún modo más excelsas y fundamentales que las procedentes de la observación. Acaso hoy deploremos las funestas consecuencias del apriorismo metafísico que de esas concepciones se desprende, pero no deja de ser justo reconocer que aquél debió su éxito a la natural admiración que la posibilidad del conocimiento *a priori* suscita en el hombre inteligente. Durante algún tiempo la secta pitagórica dominó en Crotona, pero con posterioridad hubo de producirse en contra suya una reacción que obligaría a Pitágoras a establecerse en Metaponto, donde murió a finales del siglo sexto o comienzos del quinto. Se ha aventurado que la desintegración final de la secta sobrevino hacia el año 450 a. C., siendo ésta la causa del retorno de los pitagóricos a la patria helénica. Si hemos de admitir el testimonio del *Fedón* platónico, vivían pitagóricos en Tebas cuando Sócrates murió el 399 a. C.; pero se trataba de discípulos que habían preterido buena parte de las enseñanzas religiosas del fundador, especialmente su teoría de la transmigración de las almas, para concentrar su atención en los aspectos científicos de la tradición de la escuela.

Consideremos ahora qué es lo que comporta la usual presentación de la geometría elemental como una ciencia deductiva. En primer lugar, ciertas proposiciones geométricas se habrán de dar por verdaderas sin demostración; en segundo lugar, todas las restantes proposiciones de la geometría habrán de derivarse de las anteriores; en tercero y último lugar, dicha derivación habrá de ser llevada a cabo sin dar por presupuestas otras aserciones geométricas que las tomadas como primitivas, esto es, habrá de ser *formal* o independiente de la particular materia sobre la que la geometría pueda versar. Para nuestros efectos, el tercero es el más importante de tales requisitos: la elaboración de un sistema deductivo nos llevará a tomar en consideración la relación de implicación (*entailment*) * o consecuencia lógica. His-

5 Proclo, *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, ed. Friedlein, p. 65.

* El verbo inglés *to entail*, con el sentido literal de "entrañar", ha pasado a formar parte del vocabulario filosófico contemporáneo de esta lengua para dar a entender la relación que liga entre sí a dos enunciados cuando el primero hace que el segundo se siga de él. (El primer pensador anglosajón en servirse de la sustantivación *entailment* en esa nueva acepción técnica, definiéndola en términos aproximados a los nuestros, parece haber sido G. E. Moore en su trabajo "External and Internal Relations" de 1919, posteriormente recogido en el volumen *Philosophical Studies*, Londres-N. York, 1922). Pese a su indudable corrección, la traducción de *entailment* por "entrañamiento" podría tal vez pecar de artificiosa —siquiera en la medida en que el exceso de naturalidad raya en ocasiones en el artificio— en un contexto como el presente, donde por lo demás se hace frecuente uso del vocablo. De ahí nuestra decisión de traducirlo invariablemente por "implicación", con la única excepción de algún pasaje (páginas 164 y ss.) en el que resultaba aconsejable utilizar la expresión sinónima "inferencia (válida)". Como los autores se cuidan de destacar (págs. 510 y ss.), la noción de *entailment* así

tóricamente, la geometría fue el primer cuerpo de conocimientos presentado de esta suerte y, desde los griegos en adelante, se ha visto en ella el paradigma de la sistematización deductiva. De ahí, por ejemplo, el título de la obra de Spinoza: *Ethica more geometrico demonstrata.* Sería incorrecto, empero, sugerir que todo esto estaba claro para Pitágoras y sus continuadores inmediatos. Por el contrario, hemos de suponer que los primeros geómetras griegos consideraban admisible cualquier procedimiento que les ayudara a «representarse» la verdad de un teorema. Probablemente se servían de recursos semejantes a los de esos profesores que hoy encuentran demasiado académica la obra de Euclides; pero tenían la excusa, al menos, de andar en busca de la luz y no pecando contra ella. Podríamos ilustrar tal circunstancia por recurso al teorema relativo al cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, que de ordinario se atribuye a Pitágoras y es de presumir fue formulado por algún miembro de su escuela. La prueba que del mismo hallamos en Euclides es algo complicada, ya que requiere un cierto número de lemas o teoremas preliminares. No es imposible que los primitivos pitagóricos supiesen de estos otros teoremas, mas resulta difícil suponer que descubrieran una por una las cosas en el orden que Euclides las presenta. Lo más probable es que la primera «demostración» del teorema de Pitágoras consistiese en la construcción de una figura de la cual el teorema se deje «desprender». Los modernos editores de Euclides han sugerido la figura —más bien par de figuras— siguiente [6]:



En la primera de ellas, se han distribuido cuatro triángulos rectángulos iguales de manera que sus hipotenusas cierren un área; en la segunda, se han dispuesto cuatro triángulos rectángulos de las mismas dimensiones de modo que constituyan dos rectángulos con los lados OQ y PQ formando ángulos rectos. Resulta entonces obvio que el área EFGH de la primera figura es el cuadrado de la hipotenusa, siendo por otra parte igual a la suma de las áreas PQOL y MJNQ de la segunda figura, que respectivamente constituyen los cuadrados de los otros dos lados de uno de los triángulos rectángulos. Pero para contar con una prueba rigurosa a este respecto se necesitaría demostrar que las tres áreas mencionadas son realmente cuadrados. Desde comienzos del siglo III a. C., en que Euclides escribió, el ideal de la demostración estaba bien patente para los geómetras. A nadie que lea los *Elementos* de Euclides le escapará que su propósito fue enumerar al principio de la obra todas las presuposiciones geométricas especializadas que consideraba menester, para luego proceder a construir cadenas de demostraciones en las que los teoremas

---

entendida coincide esencialmente con la de "implicación estricta" (*strict implication*) del lógico contemporáneo C. I. Lewis, bastando, en cualquier caso, aquella última adjetivación a los efectos de preservar la conveniente distinción terminológica entre ambas. La posible confusión entre nuestro "implicar" y ciertos usos del verbo inglés *to imply* que no coinciden sin residuo con el sentido acordado a dicha traducción ha sido, finalmente, prevenida allí donde era menester (el caso, por ejemplo, de la traducción de *to imply* por "comportar" en las págs. 552 y ss.)— *(N. del T.)*

6 T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, I, p. 354.

se siguen de los axiomas con necesidad puramente formal. No deja de ser cierto que en la prueba de la primera proposición de su primer libro se da por supuesto que dos círculos iguales, cada uno de los cuales tenga su centro en la circunferencia del otro, han de poseer dos puntos de intersección, y que dicha suposición se lleva a cabo sin haber antes sentado expresamente un postulado del que tal cosa se derive; pero parece claro que, si alguien le hubiese hecho observar este defecto, Euclides habría tratado de subsanarlo estipulando un nuevo postulado.

Por desgracia no conservamos ningún tratado completo de geometría anterior a los *Elementos* de Euclides y no nos es posible reconstruir en sus detalles el proceso a través del cual los griegos adquirieron conciencia de los requisitos de la demostración; pero sabemos que no faltaban libros de elementos, esto es, tratados deductivos, con anterioridad a Euclides. Fragmentos de demostraciones primitivas se conservan en las obras de Platón y Aristóteles [7], y en el comentario de Proclo a la obra de Euclides puede encontrarse material procedente de una historia de la geometría debida al discípulo de Aristóteles Eudemo. No cabe duda, por lo tanto, de que existía ya una cierta familiaridad con el ideal de la sistematización deductiva en el seno de la escuela pitagórica, así como en la Academia platónica, que habría de proseguir algunas de sus tradiciones. Pero con toda probabilidad había también bastante confusión en la mente de muchos de los lectores de los primeros libros de elementos. Aristóteles nos cuenta que, según algunos, toda demostración era imposible, en tanto otros sostenían que la demostración podía ser circular [8]. La boga de tan estrafalarias opiniones nos la explicaremos si tenemos presente que los primeros libros de elementos diferían probablemente unos de otros en la selección de sus axiomas, puesto que puede haber diversos modos de presentar un cuerpo de proposiciones geométricas con la estructura de un sistema deductivo. En tal caso, las proposiciones objeto de demostración en uno de esos sistemas oficiarían a título de indemostradas en un otro, de suerte que el programa demostrativo acabaría fácilmente despertando sospechas en el iniciado a medias.

Ahora bien, si la reflexión que hemos dado en llamar de tipo lógico tuvo su origen en semejante contexto, ¿cuáles, de entre los apartados conocidos de la lógica, cabría esperar ver resaltados en una primera exposición? En primer lugar, es de esperar que se preste especial atención a las proposiciones generales, es decir, a las proposiciones relativas a *géneros* de cosas. En geometría, en efecto, no nos ocupamos de casos singulares. Quizás a veces se hable de «la línea A B» como si estuviésemos refiriéndonos a una línea en particular, pero para el geómetra esto es sólo un modo de aludir a todas aquellas líneas que satisfacen una determinada condición, como, por ejemplo, la de ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo. En segundo lugar, es de esperar que la atención recaiga especialmente, de entre las proposiciones universales (esto es, las proposiciones generales que versan acerca de *todos* los miembros de un cierto género), en las que sean necesariamente verdaderas. Pues, cuando se hace geometría al modo griego, es preciso distinguir entre aquellas proposiciones universales que han de ser verdaderas por la naturaleza de su objeto y aquellas otras que lo son por pura casualidad (como, por ejemplo, que cada libro de la *Ilíada* contenga menos de mil líneas), y se su-

7 T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle*.
8 *An. Post.* I, 3 (72b5-18).

pone que las proposiciones universales de la geometría corresponden todas ellas al primer tipo. No es probable, desde luego, que los griegos se hallasen, desde el primer momento, en situación de formular con claridad tal distinción; como veremos, a Aristóteles le costó algún esfuerzo el conseguirlo. Pero un certero instinto les condujo a centrar su atención en proposiciones que eran de hecho necesariamente verdaderas. En tercer lugar, es de esperar que, de entre las proposiciones universales y necesariamente verdaderas, sean las definiciones las que reciban atención preferente (aunque no exclusiva). Un lector familiarizado con la lógica moderna denegaría tal vez a las definiciones ese carácter de proposiciones necesariamente verdaderas, interpretándolas como meros registros de nuestra determinación de utilizar ciertas abreviaturas cuando creemos conveniente hacerlo así. Para los griegos, sin embargo, las definiciones no parecían reducirse a simples convenciones. En la doctrina de las definiciones reales, que comenzó a desarrollarse por aquel entonces, hay no poco de embrollo, mas no es difícil hacerse cargo de la actitud griega a este respecto si recordamos que, antes de que los griegos iniciaran el cultivo de la geometría demostrativa, palabras tales como «círculo» sólo poseían significado en la medida en que representaban ciertos diseños perceptivos. Cuando un griego decía «Un círculo es el lugar de los puntos equidistantes de un punto dado», no estaba introduciendo por vez primera el vocablo «círculo», sino más bien confiriéndole nuevas conexiones; y se hallaba persuadido de exponer una importante verdad sobre los círculos. En cuarto lugar, es de esperar que suscite un considerable interés la subsunción de variedades específicas bajo reglas genéricas, dado que éste parece constituir el patrón de argumentación más usual en geometría. Ahora bien, hemos de ver que todas estas características concurren en la lógica de Aristóteles, y algunas de ellas ya se encuentran en la obra de Platón e incluso en obras anteriores. Aristóteles nos informa, por ejemplo, de que Arquitas, matemático pitagórico que influiría en Platón, había desarrollado concepciones propias sobre las formas correctas de definición [9]. Es razonable presumir, en consecuencia, que una de las direcciones de la lógica griega vino determinada en buena parte por la reflexión sobre los problemas planteados por la presentación de la geometría como un sistema deductivo.

3. La argumentación dialéctica y metafísica.

De las características de la lógica griega no se puede dar cuenta enteramente en términos de demostración (ἀπόδειξις). Como ya hemos visto, Aristóteles consideraba, en la primera exposición de la silogística, que su estudio abarca asimismo las argumentaciones dialécticas. El término «dialéctica» revestía ya desde las primeras etapas de la filosofía un cierto número de significados de diferente matiz, y adquiere particular interés para nosotros por cuanto constituye la primera denominación técnica de lo que hoy llamamos lógica. Aristóteles aplica el calificativo de «analíticos» a sus tratados más bien que el rótulo de «analítica» a la disciplina que en ellos se cultiva; y el propio vocablo «lógica» no aparece, en su moderna acepción, hasta los comentarios de Alejandro de Afrodisia en el siglo III d. C.

[9] *Metaphysica*, *H*, 2 (1043a21).

En su sentido primigenio, la palabra «dialéctica» designa el método de argumentación característico de la metafísica. Se trata de una voz derivada del verbo διαλέγεσθαι, que significa «discutir»; y, como vimos, Aristóteles reputa de premisa dialéctica a la que se elige como punto de partida en una controversia [10]. Los diálogos de Platón nos brindan numerosos ejemplos de semejante procedimiento argumentativo. En el *Teeteto*, por ejemplo, su protagonista sienta la tesis de que el conocimiento se reduce a percepción, y Sócrates extrae de esta premisa conclusiones que finalmente fuerzan a Teeteto a abandonarla[11]. El mismo ejemplo contribuye a poner de manifiesto el más preciso significado que el término «dialéctica» cobra para Platón en los diálogos de su período medio. Nos referimos al escrutinio de las proposiciones llamadas «hipótesis» mediante la extracción de consecuencias a partir de las mismas. Si una de dichas consecuencias resulta inaceptable, la hipótesis de la que ha sido derivada deberá rechazarse. Es obvio que, en líneas generales, dicho método sólo conduce a resultados negativos, pues la argumentación procede en él de acuerdo con el esquema lógico: «Si P, entonces Q; pero no-Q; por lo tanto, no-P». Este es el modelo típico de argumento refutatorio (ἔλεγχος) y le sería probablemente sugerido a Platón no sólo por la práctica de Sócrates al refutar las opiniones sostenidas sin crítica por sus contemporáneos, sino asimismo por el uso en metafísica de la *reductio ad impossibile* por parte de Zenón de Elea. En su *Parménides*, Platón hace decir a Zenón que ha escrito un libro en que defiende el monismo parmenídeo extrayendo para ello conclusiones absurdas de la suposición de la existencia de la pluralidad [12]. Es quizás a esta observación a lo que Aristóteles se refiere cuando atribuye a Zenón, según nos lo relatan por igual Diógenes Laercio [13] y Sexto Empírico [14], la invención de la dialéctica.

En cualquier caso, lo que Aristóteles parece atribuir a Zenón es el descubrimiento del uso de la *reductio ad impossibile* con fines metafísicos, que a su vez es posible le fuera sugerido a Zenón por su empleo en la matemática pitagórica. Pues, en efecto, los pitagóricos pasan por haber descubierto la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado (en la terminología moderna, la irracionalidad de $\sqrt{2}$); y la prueba de esta proposición, conservada como interpolación al texto de Euclides que conocemos, reviste la forma de una conclusión en lo imposible (ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον) [15]. Cuando Aristóteles tiene ocasión de mencionar esa clase de razonamiento, cita nuestro teorema como si se tratase de un ejemplo típico [16]. En la prueba comienza por suponerse, a efectos argumentales, que $\sqrt{2}$ es racional, esto es, que hay dos números enteros, sean m y n, que son primos entre sí y tales que $m/n = \sqrt{2}$ o $m^2 = 2n^2$. Se sigue de ahí que m^2 ha de ser par y, por ende, también lo ha de ser m, ya que un número al cuadrado no puede admitir un factor primo que no lo sea asimismo del número del cual aquél es el cuadrado. Mas si m es par, n ha de ser impar de acuerdo con la suposición inicial de que ambos son primos entre sí. Suponiendo ahora que $m = 2k$, podremos inferir que $2n^2 = 4k^2$ o $n^2 = 2k^2$; de donde es fácil demostrar, repitiendo el razonamiento antes usado, que n ha de ser par. Nuestra hipótesis, por

10 *An. Pr.* I, 1 (24b1).
11 *Theaetetus*, 151 E y ss.
12 *Parmenides*, 128 D.
13 *Vitae*, VIII, 57 y IX, 25.
14 *Adversus Mathematicos*, VII, 7.
15 *Elementos*, ed. cit., X, 117, relegado a un apéndice en la edición de Heidelberg.
16 *An. Pr.* I, 23 (41a26).

lo tanto, entraña consecuencias incompatibles, lo que determina su falsedad.

Una vez implantada por Zenón como un método de razonamiento filosófico, la dialéctica tendría una larga historia. Entre los pensadores a veces conocidos como socráticos menores, fue cultivada por Euclides de Megara. Evidentemente se trataba de un autor cercano a Sócrates, pues Platón y otros amigos atenienses vinieron a reunirse con él en Megara inmediatamente después de la muerte del maestro. Pero se dice que fue asimismo seguidor de Parménides y Zenón. Los miembros de su escuela se llamaron dialécticos, y leemos que el propio Euclides «impugnaba las demostraciones atacando, no sus premisas, sino su conclusión», lo que presumiblemente quiere decir que trataba de refutar a sus adversarios desarrollando consecuencias absurdas a partir de sus conclusiones. Al parecer, encontraba esa filiación perfectamente compatible con su admiración hacia Sócrates, llegando incluso a postular la identificación del Bien socrático con el Uno parmenídeo [16]. Pero tal actitud no debe sorprendernos si pensamos que Sócrates mismo había adoptado el método de Zenón para sus propósitos. Es difícil llegar a alguna certidumbre en lo que se refiere a la doctrina del Sócrates histórico, pero aquellos pasajes de la obra de Platón que por su calidad dramática nos parecen más dignos de confianza a este respecto sugieren que no era un simple amante de la plática filosófica, sino que practicaba una concreta técnica de refutar hipótesis mostrando que estas últimas entrañan consecuencias incompatibles o indeseables.

Parece, pues, que la *reductio ad impossibile* en metafísica constituyó el primer significado preciso del término «dialéctica». Se ha de notar, no obstante, que la refutación socrática difiere de la de Zenón en que las consecuencias derivadas de la hipótesis inicial no necesitan ser contradictorias, sino que en ocasiones pueden ser sencillamente falsas. Así, Sócrates argumenta en el *Menón* que, si la virtud fuera susceptible de enseñanza, los hombres instruirían a sus hijos en la virtud, pero es un hecho bien conocido que Pericles, Temístocles y Arístides no lograron hacer virtuosos a los suyos [17]. Como vemos, la tesis filosófica «La virtud es susceptible de enseñanza» es refutada aquí mediante la deducción a partir de ella de una consecuencia empírica que se sabe es falsa. No está claro si Platón fue plenamente consciente de semejante distinción. En un pasaje del *Fedón* en que discute el método hipotético, parece sugerir que toda refutación de una hipótesis habría de proceder por deducción de consecuencias que se contradicen [18]; pero no todas las argumentaciones de sus diálogos se ajustan exactamente a ese modelo. Quizás quepa arbitrar la denominación de *reductio ad absurdum* para abarcar a aquéllas que no constituyen estrictamente casos de *reductio ad impossibile*.

En la *República*, Platón parece haber querido dar a entender algo más específico mediante el término «dialéctica»: a saber, un método de argumentación que envuelve la refutación, pero conduce finalmente a resultados positivos de considerable generalidad. Es difícil hacernos una idea de en qué consiste dicho método, y la interpretación de los pasajes relevantes se presta en gran medida a controversia [19]. Quizás el propio Platón no tuviera tam-

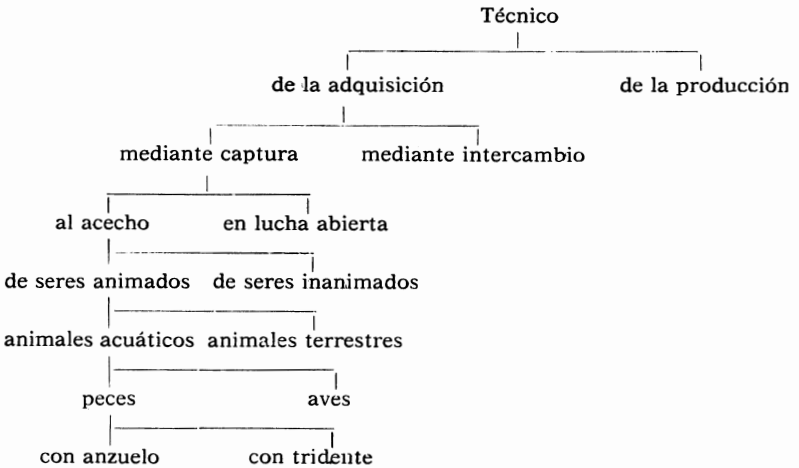
16 Diógenes Laercio, II, 106-7; Cicerón, *Academica*, II, 129.

17 *Meno*, 93 y ss.

18 *Phaedo*, 101 D: *εἰ δέ τις αὐτῆς τῆς ὑποθέσεως ἔφοιτο ... οὐκ ἀποκρίναιο ἕως ἂν τὰ ἀπ' αὐτῆς ὁρμηθέντα σκέψαιο, εἴ σοι ἀλλήλοις συμφωνεῖ ἢ διαφωνεῖ.*

19 Para un examen pormenorizado de este punto, cf. R. Robinson, *Plato's Earlier Dialectic*, c. X.

poco ideas muy claras al respecto, con lo que no habría modo de dar satisfactoria cuenta del sentido del término «dialéctica» en aquel contexto. Pero, en cualquier caso, lo cierto es que arrumbó dicha noción en su obra posterior, pasando a transferir la denominación de «dialéctica» al método de análisis o división y síntesis o colección (*διαίρεσις καὶ συναγωγή*) que se discute en el *Fedro* y el *Filebo* y es ejemplificado en el *Sofista* y el *Político* [20]. El procedimiento de colección no se halla claramente explicado y resulta un tanto abstruso, pero la división consiste a todas luces en una búsqueda de definiciones montada sobre un análisis dicotómico de las nociones a definir, comenzando por las más generales. En el *Sofista*, Sócrates ilustra semejante proceso proporcionándonos una definición del pescador como un técnico que practica un arte de adquisición, mediante captura, de animales vivos que nadan en el agua, ensartándolos a la luz del día con un anzuelo. La cadena de determinaciones que facilitan tal definición se ha obtenido seleccionando la primera de las alternativas en cada uno de los pasos de la siguiente división:



El precedente método, que a nosotros sin duda nos parece trivial y circular, tuvo alguna importancia en la historia de la lógica. El poeta cómico Epícrates testimonia su práctica, ejercitada en la Academia hasta el ridículo [21], y la consideración de la misma por parte de Aristóteles influyó indudablemente en su invención del silogismo [22].

El único rasgo común a todas las acepciones platónicas del término «dialéctica» parece reducirse a la designación de un proceso cooperativo de indagación filosófica, destinado a la consecución de definiciones y merecedor de la aprobación de Platón en el instante de describirlo [23]. En el período medio de su producción se trata del método hipotético de refutación con algún aditamento de carácter positivo e índole más o menos misteriosa, en tanto que posteriormente se identifica con el método de la división y la colección.

20 *Phaedrus*, 266 B; *Philebus*, 16 C y ss.; *Sophista*, 218 E y ss.; *Politicus*, 258 E y ss.
21 Epícrates, fragmento 11 en *Comicorum Atticorum Fragmenta*, ed. Kock II, p. 287.
22 Véase más adelante, p. 64.
23 R. Robinson, *Plato's Earlier Dialectic*, p. 70.

Estaba finalmente reservada a Aristóteles la tarea de generalizar, y debilitar, el sentido de la voz «dialéctica». Como ya vimos, «dialéctica» es para él una forma de denominar a la ciencia de la argumentación a partir de premisas no evidentes. Es fácil adivinar cómo su aplicación podía aún extenderse hasta encerrar bajo tal denominación el estudio de la argumentación válida en general.

En cuanto a Platón, su contribución a la lógica formal no se reduce a estos intentos de pergeñar un método dialéctico. De vez en cuando le encontramos, a lo largo de sus diálogos, comprometido en el empeño de formular principios lógicos. Es natural que lo hiciera así, pues sus diálogos vienen a componerse casi por entero de sartas de argumentaciones sobre cuestiones filosóficas y a menudo conviene reforzar psicológicamente una argumentación mediante el enunciado expreso del principio que la rige. Una persona recelosa ante un razonamiento dado podría, no obstante, ser llevada a reconocer la corrección de su principio rector y, de este modo, a admitir la validez de ese razonamiento. Ello pondría de manifiesto, finalmente, la necesidad de enunciar principios lógicos. Consideremos, por ejemplo, el siguiente diálogo:

A. Platón era un filósofo, de modo que era confuso.
B. No veo por qué.
A. Porque todos los filósofos son confusos.

En su segunda observación, A ha procedido a introducir el principio que preside su argumentación originaria. No se trata, empero, de un principio lógico, sino de un enunciado empírico. La argumentación discurre ahora de esta guisa: «Todos los filósofos son confusos, y Platón era un filósofo; por lo tanto, Platón era confuso». Si B se resistiese todavía, lo que es poco probable a estas alturas, a admitir tal razonamiento, cabría tratar por último de robustecer su cogencia aduciendo el principio: «Si todo M es G y P es un M, entonces P es G»; y aquí nos hallaríamos ante un principio de la lógica, esto es, un principio formal cuya verdad no dependerá ya de ninguna especial interpretación que podamos asignar a «M», «G» y «P».

De este modo, Platón formula incidentalmente un cierto número de principios lógicos. Un ejemplo famoso es su formulación de la Ley de Contradicción en el curso de la argumentación que, en la *República*, se destina a probar que el alma consta de tres partes distintas [24]. Merece destacarse, sin embargo, que no todos los principios generales citados por Platón son correctos. Así, en el libro primero de la *República* se aduce el principio de que «un hombre es de la naturaleza de aquellos a quienes se asemeja» [25], y el uso que se hace de este aserto parece descansar en el supuesto de que, si un hombre se asemeja en algún aspecto a los miembros de una clase, habrá de asemejarse a ellos en todos los aspectos, lo que obviamente es falso. No podemos saber con seguridad si Platón era consciente de estar aduciendo principios incorrectos. Ya que se sirve de la forma dialogada, no se obliga a hacer suyos los juicios que pone en boca de sus personajes; y pudiera muy bien suceder, por consiguiente, que hubiese tenido plena conciencia de que éstos no siempre proceden correctamente en sus argumentaciones. Otra explicación de la presencia de argumentos falaces en sus diálogos podría ser, simplemente, que lo que hoy nos parece obvio estuviese lejos de

24 *Resp.* 436 B.
25 Ibid. 349 D.

serlo para quienes discurrían sobre ello por primera vez. Parece, por ejemplo, que la ambigüedad del verbo «ser» creó serios quebraderos de cabeza a Platón y sus contemporáneos [26], por más que las dificultades que plantea resulten hoy infantiles. Se trata, en fin, de una cuestión imposible de decidir [27].

Aunque está fuera de duda que Platón descubrió algunos principios válidos de la lógica en el transcurso de su argumentación, difícilmente se le podría considerar un lógico. Se limitó a formular de modo fragmentario esos principios conforme los fue necesitando, y no se esforzó por relacionarlos entre sí o ensamblarlos en un sistema como hizo Aristóteles con las diversas figuras y modos del silogismo. No es incluso improbable que hubiese desaprobado el cultivo de tales investigaciones lógicas por sí mismas.

4. La erística y la sofística.

No es fácil trazar la conexión de las primeras investigaciones lógicas con la práctica de la argumentación en los debates de índole jurídica o en los discursos entre contertulios que Aristóteles llama «encuentros» (ἐντεύξεις) [28], por lo que es posible que nuestras suposiciones a este respecto vayan descaminadas. En lo que sigue viene a sostenerse que no faltan indicios de intereses de orden lógico anteriores a Aristóteles, los cuales habrían tenido su origen en la crítica del razonamiento sobre cuestiones de la vida cotidiana, contribuyendo así al nacimiento de una tradición independiente de la aristotélica: a saber, la de los megáricos y estoicos.

Las primeras tentativas de reflexión lógica tienen lugar cuando se procede a generalizar la validez de ciertos argumentos particulares, extrayendo de ellos una forma o principio común a toda una clase de argumentos válidos. Es natural pensar que dicha forma tenga su correcta expresión en un esquema verbal detectable en el argumento. Aristóteles, por ejemplo, reunió toda una colección de argumentos válidos bajo el principio «Si ningún B es A, entonces A es B» [29]. Este modo tan natural de proceder podría, no obstante, en ocasiones conducir a errores, ya que es posible que, de dos argumentos que aparentemente respondan a la misma forma verbal, el uno sea válido y el otro inválido. Consideremos, por ejemplo, las siguientes argumentaciones:

1. Este objeto es una pluma; este objeto es azul; por lo tanto, este objeto es una pluma azul.
2. Este perro es padre; este perro es de su dueño; por lo tanto, este perro es padre de su dueño.

La primera resulta una argumentación perfectamente válida, mas la segunda —que adaptamos del *Eutidemo* de Platón— constituye una falacia, ya que, aplicada a un perro y un hombre dados, pudiera muy bien suceder que las premisas sean verdaderas en tanto que la conclusión es evidentemente falsa.

Las argumentaciones que se asemejan a esta segunda por el hecho de ser falaces y guardar, pese a ello, un confundente parecido con argumen-

26 Ibid. 479 B; *Sophista*, 243 D, 249 E y ss.
27 Cf. R. Robinson, "Plato's Consciousness of Fallacy", *Mind*, LI (1942), pp. 97-114.
28 *Topica*, I, 2 (101a27).
29 *An. Pr.* I, 2 (25a15).

taciones válidas son llamadas por Aristóteles *sofismas* [30]; y se nos da a entender que había gente, los sofistas, que se ganaba la vida inventando argumentos de este tipo y exhibiéndolos en público [31]. Parece difícil creer tal cosa, pero lo cierto es que contamos al efecto con el abrumador testimonio de Platón. En el diálogo *Eutidemo* se nos presenta, por ejemplo, a dos sofistas, Eutidemo y Dionisidoro, pregonando que son capaces de probar por medio de sofismas una serie de proposiciones paradójicas, tales como las de que nadie puede decir mentiras (284 c), que Sócrates lo sabe todo (293 c) y que el padre de Ctesipo es un perro (298 c).

Aparte del *Eutidemo*, nuestra mejor fuente de información en relación con los sofismas y su uso es el tratado aristotélico *De Sophisticis Elenchis*, apéndice de los *Tópicos* generalmente considerado como una de las primeras obras lógicas de Aristóteles. En los *Tópicos*, Aristóteles se dedica principalmente a suministrarnos reglas para el desarrollo de las disputas por medio de argumentaciones válidas; en el *De Sophisticis Elenchis*, nos suministra reglas para la identificación y desenmascaramiento de argumentaciones inválidas. Esta última obra recuerda al *Eutidemo* (del que cabría espigar una decena de sus ejemplos) por el hecho de que la mayoría de los razonamientos ejemplificados no sólo son falaces, sino asimismo relativos a cuestiones triviales, incapaces de seducir por un momento a un niño inteligente. Se incluyen, no obstante, unos cuantos ejemplos serios extraídos del dominio de la matemática y de la metafísica [32].

El *Eutidemo* y el *De Sophisticis Elenchis* nos ofrecen una prueba inequívoca de que la celebración de disputas públicas según reglas prefijadas constituía una práctica bien establecida. Por lo general, únicamente dos personas —la una interrogando y la otra respondiendo— tomaban parte en la disputa. El papel de la segunda consistía en sostener una tesis, que su adversario trataba de echar abajo haciéndole admitir que de ella se desprenden consecuencias absurdas o simplemente falsas. Aristóteles proporciona normas y consejos para ambos litigantes en el último libro de sus *Tópicos*, así como en el *De Sophisticis Elenchis*. Lo que no está tan claro es la finalidad de esas disputas, ni tampoco la razón de que la gente pagase por ser instruída en semejante arte de disputar. En Platón se hallan rastros del ejercicio del mismo con un doble propósito: la investigación filosófica o el simple entretenimiento. Sus propios diálogos constituyen una buena muestra del primero de esos usos de nuestro método, y es interesante observar cómo el curso de las argumentaciones se desarrolla en ellos a menudo según el modelo sugerido por Aristóteles. En cambio, Platón previene en la *República* contra el cultivo de la disputación, especialmente por parte de la juventud, como mero pasatiempo [33]. Por lo que se desprende de sus descripciones, la capacidad de argumentación de los atenienses se les subía fácilmente a la cabeza.

También Aristóteles señala, en los *Tópicos*, aquella doble finalidad de la disputa (para lo que podríamos identificar sus «encuentros» o tertulias con el «entretenimiento» o pasatiempo platónico) [34]. Pero ello no excluye,

30 *Topica*, VIII, 11 (162a14).
31 *De Soph. Elench.* I (165a19-37).
32 Por ejemplo, los relativos a la cuadratura del círculo en *De Soph. Elench.* 11 (171b15) y al "tercer hombre", ibid. 22 (178b36).
33 *Resp.* 498a y 539 B.
34 *Topica*, I, 2 (101a27).

sin embargo, que quienes profesaban la enseñanza del arte de disputar persiguieran asimismo dos otros objetivos. En primer lugar, podrían haber estimado dicho arte por su utilidad a efectos prácticos. No se requiere mucha imaginación para caer en la cuenta de que incluso los ejemplos más ridículos del *Eutidemo* o el *De Sophisticis Elenchis* podían usarse ante un tribunal, ya sea para impugnar un argumento sutilmente falaz de la parte contraria, ya sea para confundir al jurado que se enfrenta con un argumento correcto e inobjetable. El procedimiento consistiría en advertir: «De la misma manera, podría decirse que...», incluyendo a continuación un argumento de análoga factura que el debatido. Supongamos un abogado que arguyese: «Hay testimonios que acreditan la generosidad de mi cliente. Por otra parte, es bien conocido que mi cliente es vecino del demandante. ¿Podría un vecino generoso haber cometido la acción de que se acusa a mi cliente?» Cabría en tal caso recurrir al sofisma, antes citado, del perro y de su dueño para poner en duda la admisibilidad de un argumento semejante. La tradicional anécdota de Protágoras y Euazlo [35] nos muestra que los griegos no encontraban absurda la idea de plantear embrollos lógicos a los jueces con el fin de ganar un pleito.

Concediendo como probable que los primeros sofismas hayan tenido su origen en tales contextos de orden práctico [36] y que la popularidad de la sofística fuese debida, junto a su valor como instrumento de diversión, a la utilidad de esas aplicaciones, es posible asimismo —y ello merecería de nuestra parte un interés mucho mayor— que algunos de los maestros en el arte se afanasen seriamente en la tarea de descubrir principios lógicos, distinguiéndolos de sus simples ejemplificaciones verbales. Un contexto en que abundan los ejemplos grotescos del tipo de los que aparecen en el *Eutidemo* es el de los cursos de lógica para principiantes. En ocasiones, se corre fácilmente el riesgo de confundir, sobre todo si centramos la atención en los ejemplos grotescos, lo que es un ejercicio al servicio de la investigación lógica con un juego emprendido para pasar el rato y divertirnos, como en los juegos de palabras u otros entretenimientos. Platón podría muy bien haber incurrido en semejante confusión al escribir el *Eutidemo*, interpretando las disputas emprendidas a título de investigaciones lógicas como si se tratase meramente de escarceos verbales destinados a entretener a los espectadores. No es, incluso, imposible que dicha malinterpretación fuese deliberada, motivándola acaso la aversión de Platón hacia el cultivo de la lógica en cuanto disciplina autónoma más bien que como un primer paso para el establecimiento de verdades morales o metafísicas [37]. Platón no se oponía, ciertamente, a las investigaciones lógicas en sí mismas, ni tan siquiera al uso de ejemplos triviales, tal y como lo veíamos en su caracterización del proceso de división en el *Sofista* y el *Político;* pero, mientras en sus diálogos abunda el material de índole lógica, de ninguno de ellos cabe decir que constituya, estrictamente hablando, una obra de lógica por su contenido. Y es significativo que en la tradición peripatética, que a lo largo de su historia muestra huellas perceptibles de su origen platónico, la lógica nunca llegase a ser

35 Aulo Gelio, *Noctes Atticae*, V, 10.

36 Recuérdese el reproche característicamente dirigido a los sofistas de "hacer parecer a la peor la mejor razón".

37 Piénsese en su actitud hacia la matemática en la *República*, donde esta ciencia viene a ser considerada esencialmente como una propedéutica para la metafísica. La misma posición aparece muy claramente expuesta en el *Eutidemo* 290 C.

considerada como parte de la filosofía, esto es, como una disciplina filosófica genuina, sino más bien fuera tratada como una capacidad (δύναμις) o como un arte (τεχνή) susceptibles de adquisición o aprendizaje [38].

Contra la idea de que en tiempos de Platón, e incluso antes, se llevaban a cabo estudios lógicos cabría invocar el testimonio de Aristóteles, que al final del *De Sophisticis Elenchis* reclama para sí el título de pionero en la materia. Allí, en efecto, se nos dice, contrastando su investigación con los estudios retóricos: «En lo que concierne al presente estudio, por el contrario, no se puede decir que la tarea hubiese sido realizada, siquiera parcialmente, con anterioridad. En rigor, nada se ha hecho en absoluto antes de ahora» [39]. Quizás todo lo que Aristóteles quiera decir con esto es que no había, antes del suyo, ningún tratado sistemático sobre cuestiones de argumentación; mas si lo que pretende es que nadie antes de él había intentado inventariar principios lógicos, en cuanto diferentes de los meros ejemplos que pudieran servir para ilustrarlos, tal pretensión se halla desmentida por sus propias palabras. Pues en la misma obra se rechaza la distinción, establecida por algunos, entre argumentos relativos a palabras y argumentos relativos a pensamientos (esto es, dirigidos ya sea contra las expresiones o contra las ideas del adversario) [40]; y se sostiene asimismo que es absurdo discutir sobre la refutación (ἔλεγχος) sin hacerlo sobre el razonamiento (συλλογισμός) [41], lo que implica que no faltaban quienes propugnaran tal cosa.

Parece, pues, probable que ya antes de Aristóteles se hubiesen desarrollado discusiones lógicas, suscitadas por los enredos y rompecabezas del discurso cotidiano. Y es natural suponer que su centro de irradiación fuese la escuela megárica, fundada por Euclides, el más viejo de los discípulos de Sócrates contemporáneos de Platón. Los megáricos conquistaron universal reputación por su destreza en la controversia verbal, conociéndoseles en un tiempo, según Diógenes Laercio [42], bajo el nombre de «erísticos». «Erística» es el término que, minimizadora y despectivamente, aplicaban Platón y Aristóteles a la argumentación por ellos considerada como frívola. Pero nosotros sabemos por lo menos que los megáricos de las generaciones posteriores a Aristóteles, como Diodoro Crono y Filón, acreditaron una genuina comprensión de los problemas lógicos, y es difícil imaginar cómo podrían haberlo conseguido sin una previa tradición en tal sentido.

No es aventurado sospechar, por consiguiente, que los primeros megáricos tomaran parte en, y sus investigaciones lógicas fuesen estimuladas por, disputas tales como las satirizadas por Platón en el *Eutidemo*. También debieron ser influidos al respecto por sus reflexiones acerca de la argumentación metafísica, puesto que hay pruebas de su conexión con los eleáticos. Como ya hemos apuntado, se dice de Euclides que conoció la obra de Parménides y que acostumbraba a refutar las argumentaciones adversas atacando sus conclusiones más bien que sus premisas [43], lo que da idea de

---

38 Alejandro, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *Commentaria in Aristotelem Graeca*, II (I), p. 1; Filopón, *In Aristotelis An. Pr. Commentaria*, ed. Wallies, *C.I.A.G.*, XIII (II), p. 6. Esta serie se citará en lo sucesivo por medio de la abreviatura "*C.I.A.G.*"

39 *De Soph. Elench.* 34 (183b34-36).

40 Ibid. 10 (170b12-14).

41 Ibid. (171a1-2).

42 *Vitae*, II, 106.

43 Ibid. 107.

que se hallaba familiarizado con el método de la *reductio ad absurdum* de Zenón. Ambas líneas de influencia parecen darse cita, por ejemplo, en el caso de Eubúlides, sucesor de Euclides a la cabeza de la escuela, a quien se debe la primera formulación de la paradoja del Mentiroso, así como otros célebres sofismas que hemos de ver revisten considerable interés lógico. La paradoja del Mentiroso es uno de los múltiples rompecabezas relacionados con las nociones de verdad y falsedad, de gran importancia para la lógica toda vez que la noción fundamental en esta última —a saber, la noción de validez— es definible en términos de verdad y falsedad.

Otro indicio de que pensadores prearistotélicos se ocuparon seriamente de las nociones de verdad y falsedad nos lo suministra el curioso fragmento que acostumbra a conocerse como de los *Dissoi Lógoi* [44]. Si no se trata de un apócrifo, su redacción data aproximadamente de finales del siglo quinto o comienzos del cuarto antes de nuestra Era; y se halla escrito en dialecto dórico, lo que permite aventurar su origen megárico. El fragmento forma evidentemente parte de un prolongado debate acerca de la posibilidad de falsedad y contradicción; y, puesto que se halla mutilado, no cabe hacerse una idea exacta de cuál sea su propósito. Con todo, lo que su autor parece argüir es que no sólo resulta posible formular enunciados contradictorios (*ἀντιλέγειν*), sino incluso mantener en diversos contextos dos tesis plausibles que se contradigan entre sí. Con este fin plantea una serie de antinomias, en cada una de las cuales se contraponen una tesis y una antítesis. Especial interés presenta a estos efectos la cuarta antinomia, en la que el autor muestra cómo es posible hacer valer los dos extremos de una contradicción acerca de la verdad y la falsedad del discurso. En la corresponiente tesis, intenta demostrar que el discurso verdadero y el falso son idénticos, citando el ejemplo de una expresión verbal —como «Soy una persona instruida»— que es verdadera cuando A la pronuncia, mientras es falsa al pronunciarla B. Pero de semejante planteamiento cabe extraer la conclusión de que no es la expresión verbal (esto es, la oración) lo que con propiedad puede decirse verdadero o falso, sino que tales predicados han de aplicarse propiamente a lo expresado en la oración (esto es, al enunciado o la proposición que encierra esta última). Pudiera verse aquí el origen de la distinción estoica entre *φωνή* y *λεκτόν* [45], y la argumentación vendría a surtir el mismo efecto —respecto de las nociones de verdad y falsedad— que en el *Eutidemo* se persigue respecto de la noción de validez: a saber, hacer ver que esas nociones no pueden referirse a las expresiones verbales en cuanto tales.

Cuanto llevamos visto nos autoriza, pues, a concluir que la reflexión sobre problemas de lógica formal no era ni mucho menos desconocida antes de que Aristóteles escribiese las obras que hoy se conocen como el *Organon*. Lo que, por lo demás, no resta méritos a los logros artistotélicos, puesto que los *Primeros Analíticos* constituyen indudablemente el primer tratado sistemático de lógica formal.

5. Platón y la filosofía de la lógica.

Aunque, como hemos visto, Platón acaso se mostrara contrario al cultivo de la lógica formal por sí misma, hay no obstante que considerarle como

44 H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker* (7ª ed.), vol. II, pp. 405 y ss. Cf. asimismo A. E. Taylor, *Varia Socratica*, 3.
45 Sexto Empírico, *Adversus Mathematicos*, VIII, 11-12

el primer gran pensador en el dominio de la filosofía de la lógica. Concretamente se ocupó con alguna extensión de tres cuestiones importantes que nos asaltan tan pronto nos paramos a reflexionar sobre la naturaleza de la lógica, a saber:

(1) ¿Qué es lo que propiamente puede decirse verdadero o falso?
(2) ¿Qué nexo es el que hace posible la inferencia válida, esto es, en qué consiste la conexión necesaria?
(3) ¿Cuál es la naturaleza de la definición y sobre qué recae esta última?

En lo que sigue comentaremos por este orden el tratamiento platónico de nuestras tres preguntas, intentando mostrar cómo cada una de ellas se plantea y en qué medida se relacionan entre sí. Hay que tener presente, sin embargo, que Platón no encara directamente esas cuestiones que nos parecen hoy centrales e importantes. Una clara conciencia de las mismas sólo ha sido posible tras siglos de reflexión sobre el particular, y de la lectura de Platón parece desprenderse que no acababa todavía de deslindarlas de las cuestiones metafísicas y epistemológicas que inextricablemente se entrelazan con ellas. En sus escritos nos es dado detectar anticipaciones de soluciones ulteriores, pero cuando las extraemos del contexto para hacerlas objeto de discusión por separado tal vez se corra el riesgo de presentar su pensamiento en términos irreconocibles por el propio Platón. Para nuestros propósitos, los textos más representativos son dos diálogos del último período: el *Teeteto* y el *Sofista*, especialmente el segundo.

La cuestión «¿Qué es lo que propiamente puede decirse verdadero o falso?» surge en el *Teeteto* en relación con el intento de definir el conocimiento. El segundo ensayo de definición por parte de Teeteto identifica el conocimiento con la opinión verdadera (ἀληθὴς δόξα) [46]. La opinión es, pues, considerada por Platón como el lugar propio de la verdad o la falsedad. Pero, ¿qué es una opinión? ¿Se trata de un suceso psicológico privativo de una persona dada o de algo susceptible de ser compartido por personas diversas? El vocablo griego no parece menos afectado de ambigüedad que su equivalente castellano. Más adelante Sócrates ofrece, en el mismo diálogo, una explicación de en qué consista formarse una opinión. La explicación propuesta se presenta asimismo, sin que parezca advertirse la diferencia, como una explicación de lo que sea pensar (διανοεῖσθαι):

«*Sócrates*. ¿Llamas pensar a lo mismo que yo?

Teeteto. ¿Qué es ello, pues?

Sócrates. El coloquio que el alma sostiene consigo misma sobre lo que contempla. Mi idea es que, al pensar, no hace otra cosa que conversar, formular preguntas y ofrecer respuestas, afirmar y denegar. Cuando llega a una conclusión y sale de la duda, llamamos a eso una opinión. De modo que fomarse una opinión es para mí hablar (λέγειν), y la opinión es el diálogo sostenido no con un interlocutor ni en voz alta (φωνῇ) sino con uno mismo y en silencio» [47].

La identificación del pensamiento o la opinión con el lenguaje o discurso sugiere la transferencia a este último de los predicados «verdadero» y «falso». Esta sugerencia se prolonga en el *Sofista*, donde Platón propugna nuevamente

[46] *Theaetetus*, 187 B.
[47] Ibid. 189 E-190 A.

la identificación del pensamiento con el habla interior. La discusión en su conjunto se centra allí en la búsqueda de una solución al problema de «Cómo puede darse la falsedad», desprendiéndose de ella que, para Platón, la falsedad corresponde primariamente a la expresión lingüística u oración (λόγος)[48] y por derivación al pensamiento, la opinión y las imágenes de la fantasía[49]. Lo mismo reza, por supuesto, para el caso de la verdad. ¿Cabe concluir de ahí que Platón juzgue que son las simples manifestaciones verbales del discurso las que con propiedad pueden decirse verdaderas o falsas? Nosotros ya hemos visto, a propósito de los διισσοὶ λόγοι que no faltan motivos para poner en duda la suficiencia de semejante punto de vista. Pero no está ni mucho menos claro que Platón le prestase su adhesión. El término griego λόγος es extremadamente ambiguo. En el pasaje que comentamos, parece dejarse a veces traducir lisa y llanamente por «oración», puesto que Platón insiste en que un λόγος completo ha de constar al menos de un nombre y un verbo[50], llamando λόγοι a los equivalentes griegos de las oraciones «Un hombre aprende» y «Teeteto se sienta»[51]. Pero, por otra parte, nada resulta para él más natural que concebir a lo que es verdadero o falso como algo que se da *en el alma*[52], con lo que volveríamos fácilmente a la tesis de que el pensamiento, la opinión y las imágenes de la fantasía son los lugares propios de la verdad y la falsedad.

Como vemos, cabría cuando menos registrar dos posibles respuestas de Platón a nuestro interrogante. Unas veces parece sugerírsenos que «verdadero» y «falso» se predican primariamente de una expresión verbal. Otras más bien se nos sugiere que lo apropiado es atribuir aquellos predicados a un acontecimiento psicológico que tiene lugar cuando se forma o se usa la expresión en el discurso, expreso o tácito. Una y otra respuesta se repiten constantemente a lo largo de la historia de la filosofía de la lógica. La primera se asocia en nuestros días a la voz «oración» (*sentence*), la segunda a la voz «juicio» (*judgement*). Para la formulación de una tercera respuesta, asociada esta vez a la voz «proposición» (*proposition*), hemos de aguardar aún a los estoicos *.

Si consideramos a la inferencia válida como el establecimiento de una serie de conexiones necesarias, parece que la solución al primero de nuestros problemas habrá de comportar la del segundo. Esto es, si es a las oraciones a las que corresponde la verdad o la falsedad, llevar a cabo inferencias válidas consistirá en establecer conexiones necesarias entre oraciones; si, por el contrario, son hechos de pensamiento los verdaderos o los falsos, haremos consistir la inferencia válida en una suerte de conexión necesaria entre pensamientos. Sin embargo, esta segunda interpretación de la inferencia válida es obviamente confundente e inadecuada. Pues, en efecto, da a entender que la citada «conexión necesaria entre pensamientos» es algo que invaria-

48 *Sophista*, 263 B.
49 Ibid. 263 D.
50 Ibid. 262 A.
51 Ibid. 262 C, 263 A.
52 Ibid. 263 D.

* Aun sin dejar de reconocer la conveniencia de distinguir entre el uso del término inglés *sentence* (traducido frecuentemente por "sentencia") con el fin de indicar —en el vocabulario de la lógica— un signo proposicional y su uso gramatical ordinario (el recogido normalmente en su traducción por "oración"), lo cierto es que ambos usos se entremezclan constantemente a lo largo del texto, haciendo desaconsejable aquella doble versión, máxime cuando los autores acostumbran a recurrir a la expresión *propositional sign* para el primero de los citados cometidos. En lo que sigue, pues, traduciremos invariablemente *sentence* por "oración" o sinónimos suyos como "frase". *(N. del T.)*

blemente tiene lugar cuando pensamos, cuando lo cierto es que no siempre inferimos válidamente. Históricamente, el reconocimiento de semejante confusión e inadecuación ha llevado a menudo a rechazar la idea de que sea el juicio lo que con propiedad puede decirse verdadero o falso. En cuanto a la primera de nuestras interpretaciones, representa típicamente la posición convencionalista, esto es, la de aquellos filósofos que sostienen que la conexión necesaria —como las expresiones lingüísticas entre las cuales se establece— es en algún sentido producto nuestro y arbitraria. Platón, no obstante, no parece aceptar ninguna de ambas doctrinas. Lo que sostiene es que la conexión se da entre Formas (εἴδη).

La doctrina platónica de las Formas ha desencadenado una vasta literatura en torno suyo. Mas, comoquiera que deseemos interpretarla, dos caracterizaciones negativas de la misma parecen imponerse fuera de toda duda. Las Formas no son ni cosas en sentido ordinario ni «ideas» en la mente, sino que parcialmente al menos corresponden a lo que los filósofos llamaron luego «universales». He aquí cómo se introduce la teoría en los siguientes pasajes de la *República*:

> «Lo mismo podría decirse de lo justo y lo injusto, de lo bueno y lo malo y de todas las Formas: a saber, que cada una de ellas es una en sí misma, pero que —tal y como se presentan por doquier, incardinadas en las acciones y los cuerpos y mezcladas entre sí— su unidad parece disgregarse en una multiplicidad» [53].
>
> «Hemos venido dando en asumir una Forma para cada comunidad de cosas a las que aplicamos un mismo nombre» [54].

Ambos pasajes sugieren que la Forma es una característica o conjunto de características comunes a un cierto número de cosas, es decir, el rasgo o rasgos de la realidad correspondientes a un término general. Pero Platón se sirve asimismo de una jerga que sugiere no sólo que las Formas existen separadamente (χωριστά) de los particulares, sino también que cada Forma es a su vez un particular —especialmente representativo— de su propio género, a saber, el caso típico de particular del género en cuestión o el modelo (παράδειγμα) al que los demás particulares de dicho género se aproximan. Así, la Forma recibe frecuentemente la denominación de «el(la)... mismo(a)», por ejemplo, «el hombre mismo», «la cama misma» (αὐτὸς ὁ ἄνθρωπος, αὐτὴ ἡ κλίνη). Se trata de una práctica confundente, si se supone al mismo tiempo que la Forma constituye una característica general; pues las características generales no se hallan caracterizadas por sí mismas: la humanidad no es humana. La confusión se ve alentada por el hecho de que en griego lo concreto y lo abstracto pueden ser designados por una misma frase: por ejemplo, τὸ λευκόν (literalmente, «lo blanco»), que designa tanto «la cosa blanca» como «la blancura», de suerte que es dudoso si αὐτὸ τὸ λευκόν (literalmente, «lo blanco mismo») significa «la cosa blanca en grado superlativo» o «la blancura abstractamente considerada». Algunos admiradores de Platón han rechazado la idea de que éste incurriera nunca en el pecado de «platonismo», pero está claro que Aristóteles lo creyó así y que su propio pensamiento en materia de filosofía de la lógica vino determinado en buena parte por sus objeciones a la teoría platónica de las Formas tal y como él la interpretaba.

---

53 *Resp.* 476 A.
54 Ibid. 596 A.

Tanto en la *República* como en el *Sofista* se deja evidenciar con cierta fuerza que el razonamiento correcto consiste en seguir el hilo de las conexiones entre las Formas. El modelo que se tiene presente es el del razonamiento matemático, como en el caso de la prueba ofrecida en el *Menón* [55] de que el área del cuadrado levantado sobre la diagonal es el doble del área del cuadrado originario. Para Platón, las conexiones se dan entre las Formas, y una inferencia es presumiblemente válida cuando acertamos a reproducir en nuestro pensamiento aquellas conexiones tal y como se dan en realidad. ¿Cómo se relaciona esta doctrina con la teoría que asigna la verdad y la falsedad a las oraciones compuestas de nombres y verbos? Platón parece sostener que una oración es verdadera si la disposición de sus elementos refleja una conexión entre Formas o se corresponde con ella. El discurso es posible únicamente en el supuesto de que se dé una conexión entre Formas (*συμπλοκὴ τῶν εἰδῶν*)[56], y el discurso verdadero es el que habla de las realidades tal y como éstas son (*λέγει τὰ ὄντα ὡς ἔστι*)[57]. Es curioso, no obstante, que Platón eche mano de una oración singular —«Teeteto se sienta»— para ofrecernos un ejemplo de discurso verdadero, puesto que, en nuestros términos, aquélla estaría lejos ciertamente de envolver sólo Formas. Pero parece que nunca tuvo una idea clara de la distinción entre enunciados generales y singulares, y hemos de ver más adelante que ni siquiera Aristóteles prestó suficiente atención a dicha diferencia.

Otro apartado del *Sofista* que ejerció probablemente alguna repercusión en el desarrollo subsiguiente de la teoría lógica es la discusión platónica del estatuto de los términos «el ser», «lo mismo» y «lo otro» [58]. Platón sostiene que las Formas significadas por estas expresiones pueden «comunicar» con cualesquiera otras, incluyendo Formas contrarias entre sí —como el movimiento y el reposo— y hasta las contrarias de aquellas tres. La otreidad, por ejemplo, es idéntica a sí misma, y la mismidad es diversa de la otreidad. Así es como podemos justificar opiniones aparentemente contradictorias, tales como las relativas a la diversidad de lo idéntico o la identidad de lo diverso. Nuestros términos son, de hecho, términos no-clasificatorios u omniaplicables (*pervasive terms*) en un específico sentido, * de suerte que no sirven —a diferencia de los nombres comunes y adjetivos corrientes, como «canguro» o «rojo»— para seleccionar clases de objetos: no hay clases de objetos existentes, objetos diversos u objetos idénticos. El tratamiento que Platón les dispensa es un tanto confuso, puesto que se refiere a esas tres Formas, junto con el movimiento y el reposo, como «los cinco géneros supremos» (*μέγιστα γένη*). Pero no da a entender que el movimiento y el reposo compartan con los restantes aquella peculiar característica, sino más bien se sirve de ellos para ilustrar y hacernos ver la omniaplicabilidad de estos últimos. Sería incorrecto sugerir que *μέγιστον γένος* quiera decir sin más «forma omniaplicable» o que Platón haya elaborado una teoría de tales formas, pero su discusión por parte de Platón atrajo la atención hacia las mismas y pudo haber suscitado la teoría aristotélica de los términos susceptibles de predicación en el dominio de las diversas categorías.

---

55 *Meno*, 84 D-85 B.
56 *Sophista*, 259 E.
57 Ibid. 263 B.
58 Ibid. 254 B y ss.

* El sentido a que aluden los autores, y que basta para justificar nuestra traducción de *pervasive terms* por "términos omniaplicables", se explicita más adelante en las págs. 28 y ss.— *(N. del T.)*

La tercera de nuestras cuestiones se refiere a la naturaleza de la definición. Buen número de diálogos platónicos revisten la forma de una búsqueda de definiciones y, según Aristóteles, el interés por ellas tomó origen del empeño socrático por definir los términos éticos [59]. Es probable, no obstante, que Platón se dejase asimismo impresionar por la importancia de la definición en matemáticas. Parece claro que, al igual que los primeros matemáticos, consideraba a un tiempo a la definición como no-arbitraria e informativa. En su opinión, cabe responder correcta o incorrectamente a las preguntas «¿Qué es la justicia?» o «¿Qué es el color?», y la corrección o incorrección de esas respuestas no se halla exclusivamente determinada por el modo como el hombre griego medio se sirve de los vocablos δικαιοσύνη o χρῶμα. Platón no ignora, por supuesto, que la imposición de los mismos es en algún sentido arbitraria y convencional, esto es, que podría haberse usado otro vocablo para desempeñar el mismo cometido que el griego medio asigna a χρῶμα, pues la simple existencia de lenguajes diferentes lo demuestra así. Pero insistiría en que las definiciones se ocupan de las cosas a las que las palabras se refieren, más bien que de éstas últimas en sí mismas. Lo que se define es, en suma, la Forma o naturaleza común presente en un conjunto de cosas singulares. Puede aquí hablarse, pues, de una teoría «realista» de la definición, históricamente asociada a la preferencia por las llamadas «definiciones reales». A despecho de su repudio de la teoría platónica de las Formas, la caracterización aristotélica de la definición —y el pensamiento lógico de Aristóteles en general— se mueve indudablemente en la esfera de influencia de semejante tradición. Su formación platónica le llevaba a buscar el objeto último de intelección y el fundamento de la inferencia válida en un sistema o encadenamiento de Formas cuyas mutuas interrelaciones limitarían las posibilidades de la existencia real, determinando así la corrección o incorrección del pensamiento científico. Más aún, trató en todo momento de ser fiel al mandamiento platónico de mirar a las cosas en vez de a las palabras; y sus seguidores, los peripatéticos, se servirían andando el tiempo de esa equívoca contraposición para criticar a los estoicos, a los que despreciaban como meros traficantes de palabras.

Antes de dejar a Platón, hemos de mencionar su contribución al desarrollo de la lógica mediante el esclarecimiento de dos viejos y célebres enredos. Desde los tiempos de Parménides, que nos previno de tomar en consideración la idea de que el no-ser es, los griegos habían venido revistiendo de un aura de misterio el problema de la negación y, consiguientemente, de la falsedad. Platón examinó dichas nociones en el *Teeteto* y el *Sofista* [60], resolviendo el enredo al poner en claro que el discurso (λόγος) es, en esencia, lo susceptible de verdad o falsedad: es decir, ninguna aserción es significativa a menos que su negación lo sea también. En el mismo pasaje se ocupa de resolver el problema originado por la confusión entre enunciados idénticos y predicativos. Tal confusión había llevado a algunos filósofos a rechazar la posibilidad de otra predicación que la predicación de la identidad [61]. De haberse impuesto dicho punto de vista, al igual que el que consideraba a la negación como carente de sentido, ello habría entrañado

59 *Metaphysica*, *A*, 6 (987b1-4).
60 *Theatetus*, 187 D y ss.; *Sophista*, 237 A y ss.
61 Sobre este pasaje, cf. J. L. Ackrill, "Plato and the Copula: *Sophist* 251-9", *Journal of Hellenic Studies*, LXXVII, I (1957), pp. 1-6.

un serio obstáculo para el progreso de la teoría lógica. Los esfuerzos de Platón, por el contrario, hicieron posible que Aristóteles se ocupara de ambas cuestiones a título de simples curiosidades históricas [62], pues ciertamente no le conturbaron en sus escritos lógicos.

62 *Physica*, I, 3 (187a3 y ss.).

II. EL *ORGANON* DE ARISTOTELES

1. EL CONTENIDO DEL *Organon*.

Al ser recopilados los escritos de Aristóteles por sus discípulos tras su muerte, en el año 322 a. C., un cierto número de sus tratados sobre el razonamiento fueron agrupados en una colección que con el tiempo vino a conocerse como el *Organon* o instrumento de la ciencia. El rótulo de «lógica» no adquiriría su moderno sentido sino unos cinco siglos más tarde, cuando Alejandro de Afrodisia se sirvió de aquel término; mas el campo de investigación comprendido bajo tal denominación se hallaba determinado por el contenido del *Organon*. Ya que, no obstante, dichos escritos están lejos de constituir un conjunto ordenado, dando la sensación de haber sido elaborados en épocas diferentes y sin obedecer a un plan unitario, resulta necesario decir algo acerca de los diversos tratados en que se integran.

En líneas generales, es extremadamente difícil determinar las fechas, aun las fechas aproximadas, de las obras aristotélicas. Muchas de ellas revisten la forma de apuntes o guiones de exposiciones orales y parece que Aristóteles tenía la costumbre de revisarlas constantemente, insertando referencias a obras escritas con posterioridad. Esto se aplica a las obras que componen el *Organon*. Los estudiosos, sin embargo, están generalmente de acuerdo en considerar que el tratado llamado de las *Categorías*, o por lo menos su primer borrador, que comprende los capítulos 1-8, es el primero de esos escritos. La doctrina en él contenida, de carácter metafísico más bien que lógico en sentido estricto, reaparece como parte integrante de la de todos los demás tratados de la serie. Aunque su influencia ha sido enorme, resulta muy difícil recabar algún crédito para cualquiera de las posibles interpretaciones de la misma. A primera vista, se trata de una clasificación de los diversos tipos de predicados (*κατηγορίαι*). En ella ofrece Aristóteles una lista de diez supremos predicados o tipos de predicados. Son la sustancia (*οὐσία*), la cantidad (*ποσόν*), la cualidad (*ποιόν*), la relación (*πρός τι*), el lugar (*ποῦ*), el tiempo (*ποτέ*), la situación o postura (*κεῖσθαι*), el estado o condición (*ἔχειν*), la acción (*ποιεῖν*), y la pasión (*πάσχειν*). Los pormenores del sentido de esta obra se discutirán luego con detalle.

A continuación, o contemporáneamente, habría que emplazar el tratado de los *Tópicos*, con su apéndice *De Sophisticis Elenchis*. El especial interés de esta obra radica en que parece proceder directamente de la consideración de las confrontaciones dialécticas a que antes se ha aludido. En efecto, se nos dice que versa expresamente acerca del «razonamiento dialéctico». el cual es definido como «razonamiento que discurre a partir de opiniones comúnmente aceptadas» y contrapuesto al razonamiento demostrativo, esto es, a aquél que lo hace a partir de premisas verdaderas y ciertas.

Otra de las obras tempranas es el tratado *Peri Hermeneias*. Su título quiere decir literalmente «Sobre la interpretación»; y, desde el Renacimiento, el libro ha sido conocido por la traducción latina —*De Interpretatione*— de

aquel título. El propósito capital de Aristóteles en esta obra es la indagación de la oposición entre parejas de enunciados y sus diversas variedades. Tal interés por el problema de la oposición se halla quizás determinado por exigencias de orden práctico derivadas de la descripción del razonamiento dialéctico que los *Tópicos* nos ofrecen. El tratamiento de ese tema central va precedido de una elucidación de la noción de enunciado, breve contribución a la filosofía de la lógica que ocupa los cuatro primeros capítulos.

Quedan por último dos obras, los *Primeros* y *Segundos Analíticos,* que contienen lo más maduro del pensamiento lógico de Aristóteles. La primera de ellas se ocupa del análisis de las argumentaciones según su forma, esto es, según las diversas figuras y modos del silogismo, que es donde reside la principal contribución de Aristóteles a la lógica; la segunda atiende a los especiales requisitos de la demostración. Los propios *Primeros Analíticos* se abren con el anuncio de que el tema a tratar en ellos es la demostración, pero Aristóteles corrige en seguida tal declaración al advertir que el contraste entre argumentación demostrativa y argumentación dialéctica resulta irrelevante a la hora de estudiar el silogismo, puesto que en uno y otro caso se arguye silogísticamente [1]. Está claro, por tanto, que, de acuerdo con esta última posición de Aristóteles, la teoría formal del silogismo no se halla especialmente vinculada a la teoría de la demostración. Pero la estrecha asociación entre *Primeros* y *Segundos Analíticos,* junto con la citada declaración de Aristóteles al comienzo de aquella obra, sugieren que el autor desembocó en la doctrina del silogismo a través de la investigación del llamado razonamiento demostrativo (el caso, por ejemplo, del razonamiento matemático) y que la valoró principalmente por la luz que arrojaba, en su opinión, sobre la estructura de la demostración. Incluso se ha llegado a aventurar, sobre esta base, que los *Segundos Analíticos* fueron compuestos antes que los *Primeros* [2]. Tal conjetura es evidentemente errónea si lo que en ella se pretende es que la obra, tal como hoy la conocemos, se hallaba ya completamente redactada con anterioridad a la confección de cualquiera de los tratados comprendidos en los *Primeros Analíticos;* pues, en efecto, contiene abundantes alusiones a la doctrina silogística como si se tratase de algo ya expuesto de antemano. Pero no es en cambio improbable que Aristóteles comenzase tratando de escribir un libro o conjunto de lecciones destinadas a desempeñar, respecto del razonamiento demostrativo, un cometido análogo al desempeñado por los *Tópicos* respecto del razonamiento dialéctico (según él lo entendía) y que la doctrina del silogismo hubiese sido elaborada en el curso de esa investigación. Si, por el contrario, hubiera concluido los *Primeros Analíticos* en el momento mismo de empezar a trabajar en los *Segundos,* es plausible conjeturar que habría ordenado su material de modo un tanto diferente. Mas la cuestión, en cualquier caso, no reviste demasiada importancia.

Los hallazgos lógicos de mayor fuste en la obra de Aristóteles, que en su conjunto constituyen el «sistema aristotélico», se hallan contenidos en el *De Interpretatione,* capítulos 5 a 8 y 10, 11 y 14, y en los *Primeros Analíticos,* I, 1-7. Antes de entrar a discutir estos pasajes, vamos a ofrecer un breve esbozo de las anteriores piezas del *Organon* en su probable orden histórico.

---

1 *An. Pr.* I, 1 (24a26-28).
2 F. Solmsen, *Die Entwicklung der Aristotelischen Logik und Rethorik.*

2. La doctrina de las *Categorías* y sus consecuencias lógicas.

Cuando el *Organon* fue compilado, la línea divisoria entre los estudios lógicos y los que no lo son no estaba, ni podía estarlo, trazada con precisión. Los compiladores hubieron de encontrar algo en común en todas aquellas obras, pero también cabría registrar una considerable coincidencia entre su contenido y el de otras obras no incluidas en el *Organon* (por ejemplo, entre los *Tópicos* y la *Retórica*, o entre las *Categorías* y los *Segundos Analíticos*, por un lado, y la *Metafísica* por otro). De todas las decisiones de los compiladores, sin embargo, ninguna tan difícil de comprender como la decisión de incluir a las *Categorías* en el *Organon*. Todas las demás obras del conjunto se ocupan, directa o indirectamente, de la crítica de la argumentación a ese nivel de generalidad que, según la *Retórica*, caracteriza a la dialéctica [3]; mas una buena parte de la doctrina de las *Categorías* ha de considerarse metafísica más bien que puramente lógica. Su inclusión en el *Organon*, no obstante, ha asegurado su discusión en casi todos los manuales de lógica hasta tiempos muy recientes, lo que bastaría por sí solo para obligarnos a tomarla aquí en cuenta. Más aún, la teoría misma, aun si no es de carácter lógico en el estricto sentido de la palabra, ha ejercido una considerable —y, a decir verdad, no enteramente saludable— influencia en la lógica a lo largo de su historia.

Se trata de una obra de excepcional ambigüedad tanto por lo que se refiere a su intención cuanto a su contenido. Dos ambigüedades de alguna monta resultan especialmente dignas de mención. En primer lugar, no está claro si lo que Aristételes trata de clasificar son símbolos o lo que éstos simbolizan, esto es, palabras o —en un muy amplio sentido— cosas [4]. En segundo lugar, no está tampoco claro si Aristóteles se ocupa sólo de predicados o lo hace más bien de términos en general, incluidos los que ofician de sujetos. Antes de embarcarnos en el intento de disipar estas ambigüedades, vamos a ver de bosquejar los trazos más sobresalientes de la obra.

Tras de haber pergeñado una bien conocida distinción entre homónimos, sinónimos y parónimos, Aristóteles divide a toda suerte de expresiones (λεγόμενα) en simples o complejas [5]. A continuación establece que toda expresión simple significa (σημαίνει) o bien una sustancia o bien una cualidad o alguna de las otras categorías [6]. La mayor parte del resto de la obra se dedica a la discusión de las diversas categorías en particular; y, dentro de ellas, son las categorías de substancia, tratada en el capítulo 5, y la de cualidad, tratada en el capítulo 8, las que reciben más completa atención. Los cinco últimos capítulos no se ocupan, propiamente hablando, de categorías, sino de una miscelánea de términos de considerable generalidad (oposición, privación, prioridad, simultaneidad, movimiento y posesión) y sus correspondientes ambigüedades. Se trata de los términos que andando el tiempo habrían de conocerse como *postpredicamentos*.

En el capítulo 5, Aristóteles sienta una importante distinción entre substancia primera (πρώτη οὐσία) y substancia segunda (δεύτερα οὐσία):

---

3 *Rhetorica*, I, 2 (1358a10 y ss.).

4 Se trata de una cuestión que ha ocupado a los comentaristas desde la Antigüedad, como lo muestra, por ejemplo, Porfirio, *In Aristotelis Categorias Expositio per Interrogationem et Responsionem*, ed. Busse, *C.I.A.G.*, IV (1), pp. 58-59.

5 *Categoriae*, 2 (1a17).

6 Ibid. 4 (1b25-2a4).

«Substancia en el sentido primero y principal, así como más literal y más común, es lo que ni se predica de un sujeto ni se da en este último, como sucede por ejemplo con el hombre o el caballo individuales. Se llama, en cambio, substancias segundas a las especies a que pertenecen las cosas que llamamos substancias en su sentido primario, así como a los géneros de esas especies. Por ejemplo, el individuo hombre pertenece a la especie hombre, y el género de esta última es animal. Es, pues, a estas substancias a las que se da el nombre de segundas, como sucede por ejemplo con el hombre específico y el animal genérico» [7].

Pasemos ahora a enfrentarnos con las ambigüedades señaladas más arriba. ¿Está Aristóteles clasificando expresiones lingüísticas o más bien lo que éstas simbolizan? En favor de la primera interpretación podría invocarse el uso de la voz *κατηγορία*, que a veces interviene, en contextos no técnicos, con el significado de «predicado» [8]. Esta razón, no obstante, está lejos de poder ser considerada decisiva, ya que no tenemos seguridad de si a lo que Aristóteles se refiere cuando emplea el vocablo *κατηγορία* en ese sentido no técnico es a una expresión lingüística más bien que a un atributo. En segundo lugar, el modo como Aristóteles introduce su doctrina —«Las expresiones (*λεγόμενα*) desprovistas de composición significan (*σημαίνει*) substancia», etc. [9]— sugiere que está pensando primordialmente en símbolos. Pero, por otra parte, inmediatamente después de haber introducido la distinción entre formas verbales simples y compuestas le vemos añadir: «De entre las cosas mismas (*τῶν ὄντων*) algunas se predican de un sujeto, pero no se dan nunca en este último. Así, hombre se predica de un sujeto, el hombre individual, mas no se da en ningún sujeto» [10].

Casi con toda seguridad, Aristóteles no fue consciente de esta ambigüedad que tantos quebraderos de cabeza habría de proporcionar a sus comentaristas. Sin duda ni siquiera tuvo ocasión de plantearse la cuestión: «¿Designa o se refiere el signo *ἄνθρωπος* (en el original del texto citado más arriba) a la palabra griega *ἄνθρωπος* o a alguna entidad extralingüística?» A Aristóteles le faltaban dos recursos que los lógicos y filósofos posteriores juzgarían indispensables para poder poner en claro esos extremos, a saber, el uso del entrecomillado y la posibilidad de libre invención de nombres abstractos. A nosotros nos sería dado preguntarnos: «¿Qué es lo que Aristóteles está tratando de afirmar: que 'hombre' se predica del hombre individual o que la humanidad se predica de dicho individuo?» Pero donde nosotros operamos con tres signos —las expresiones castellanas «hombre», «la palabra 'hombre'» y «humanidad»—, Aristóteles tan sólo tenía uno a su disposición para desempeñar los tres oficios, a saber, *ἄνθρωπος*. Esta deficiencia de la lengua griega fue ya una fuente de problemas para la filosofía de Platón, y su perpetuación en las versiones latinas de Aristóteles plantearía luego más de una dificultad a los filósofos medievales que se enfrentaron con la teoría de los universales. Es cierto que Aristóteles se sirve en ocasiones del artículo neutro *τό* seguido de una palabra con el fin de mencionar a ésta última, como en la expresión «La palabra tal y tal»; [11] mas ésta no constituye una práctica invariable, de suerte que su omisión en el precedente pasaje tampoco es prueba concluyente de que Aristóteles no hablase en él, al fin y al cabo, de palabras más bien que de cosas.

7 Ibid. 5 (2a11-19).
8 *Metaphysica*, Θ, 3 (1047a34).
9 *Categoriae*, 4 (1b25 y ss.).
10 Ibid. 2 (1a20 y ss.).
11 Por ejemplo, en *De Int.* 1 (16a14), 12 (21b1-5), cf. 1 (16a16).

Si, sin embargo, hubiese estado en situación de responder a la pregunta, lo más probable es que Aristóteles hubiera contestado que se estaba ocupando de cosas y no de palabras. La prueba más fehaciente de este hecho son sus giros κατὰ τινὸς λέγεσθαι («ser predicado de algo») y ἐν τινι εἶναι («darse en algo»), que Aristóteles asocia uno con otro, según vimos en la caracterización de la substancia citada más arriba. Cuando ilustra su noción de «darse en» diciendo que unos ciertos conocimientos de gramática se dan en la mente [12], difícilmente podía haberse imaginado estar hablando de una expresión lingüística. La auténtica clave para la resolución de la ambigüedad parece dárnosla Porfirio cuando afirma: «Pues como son las cosas, así son las expresiones que en principio las expresan» [13]. Aristóteles, pues, está clasificando tipos de entidades (τὰ ὄντα), pero se sirve de las diferencias existentes entre las reglas que rigen las diferentes expresiones lingüísticas como una guía mediante la que rastrear las distinciones entre distintos tipos de entidades.

La resolución de la segunda ambigüedad se sigue de lo que acabamos de decir. Si Aristóteles se interesaba primordialmente por tipos de entidades, parece desprenderse de este hecho que no habría de prestar gran atención a la cuestión de si las palabras que las expresan ofician de sujeto o predicado en una ocasión dada. La creencia de que dedica una atención preferente a los predicados se halla en parte suscitada por su uso de la voz κατηγορία y en parte también por su hincapié en la substancia primera, que da la sensación de que el resto de la obra habrá de dedicarse a inventariar los diferentes tipos de predicaciones que puedan recaer sobre un individuo concreto. En apoyo de este último punto de vista podrían tal vez ser aducidos algunos de los ejemplos que el propio Aristóteles ofrece como ilustración de las diversas categorías [14], pues lo que a este respecto parece interesarle son diferencias tales como las que se dan entre «Esto es un hombre», «Esto es blanco», «Esto está en el Liceo», etc. Sin embargo, tal interpretación restringiría a límites demasiado estrechos la doctrina de las categorías, excluyendo de toda consideración un buen número de proposiciones que asimismo interesan a Aristóteles en otros lugares de su obra, como por ejemplo «Lo blanco es un color», «La justicia es una virtud», «La virtud es una disposición», etc. Más aún, aquella restricción ni tan siquiera se vería favorecida por todos los ejemplos a que Aristóteles recurre en el contexto en que ahora nos movemos; pues en éste se citan ayer y el año pasado bajo la categoría de tiempo, y es difícil conceder que ninguno de esos ejemplos se pueda predicar de un individuo concreto.

En cualquier caso, el pasaje de los *Tópicos* en que resume su doctrina de las categorías parece demostrar que tenía *in mente* una teoría de más alcance que la simple de la predicación:

«De la consideración de las categorías se desprende como evidente que, al significar la esencia de una cosa, se significa ya sea una substancia, ya sea una cualidad, ya sea una de las otras categorías. Pues cuando estamos en presencia de un hombre y decimos que lo que tenemos delante es un hombre o un animal, expresamos su esencia y significamos una substancia; pero cuando estamos en presencia de un color blanco y decimos que lo que tenemos delante es blanco

[12] *Categoriae*, 2 (1a25).

[13] ὡς γὰρ ἔχει τὰ πράγματα, οὕτως καὶ αἱ ταῦτα πρώτως δηλοῦσαι λέξεις. Op. cit. *C.I.A.G.* IV (I), p. 71.

[14] *Categoriae*, 4 (1b28 y ss.).

o es un color, expresamos su esencia y significamos una cualidad. De la misma manera, si en presencia de una magnitud de un codo decimos que lo que tenemos delante es una magnitud de un codo, expresamos su esencia y significamos una cantidad. Y otro tanto sucede con las restantes categorías. Cada uno de estos predicados significa una esencia cuando el predicado se afirma de sí mismo, o cuando su género se afirma de él; mas, si se afirma de algo otro, no significa ya la esencia, sino la cantidad, la cualidad o alguna de las otras categorías» [15].

Aristóteles parece manejar aquí dos distinciones: la primera, aquella que se da entre indicar la naturaleza (*οὐσία*) de una substancia primera y caracterizar a ésta de cualquier otro modo; la segunda, aquélla que se da entre indicar la esencia o la definición (*τί ἐστι*) de cualquier cosa y decir de ésta algo inesencial. Así, propone como regla general que, al predicar un término de sí mismo o dar su género, estamos dando su esencia (*τί ἐστι*), por más que podamos no estar significando la substancia (*οὐσία*) sino una de las otras categorías. De este modo, no sólo «Esto es un hombre», sino también «Lo blanco es un color» y «Un pie es una longitud», son enunciados de la esencia (*τί ἐστι*) de algo, si bien sólo el primero se refiere a una substancia. Cuando, en cambio, afirmemos de un término de una categoría un término de otra, como al decir «El hombre está sentado» o «El color blanco es más claro que el rojo», no estaremos dando la esencia del sujeto.

Por último, cabría hacer notar que la acepción de la doctrina de las categorías en este su más amplio sentido permite una interpretación más aceptable de aquellos pasajes de otras obras aristotélicas en que su autor nos habla de ciertos términos de máxima generalidad que «se aplican en» todas las categorías. Así, cuando nos dice en la *Etica a Nicómaco* que «'bueno' se usa en tantos contextos diferentes como 'ente' (*τἀγαθὸν ἰσαχῶς λέγεται τῷ ὄντι*) pues es empleado en la categoría de substancia, como cuando se afirma de Dios o el intelecto: o en la de cualidad, como cuando se afirma de las virtudes; o en la de cantidad, como cuando se afirma de lo morigerado, etcétera» [16]. La fraseología de este texto es harto singular, pero podría ser entendido en el sentido de que Dios, el intelecto, las virtudes, lo morigerado y otros ejemplos de Aristóteles podrían ser igualmente reputados de cosas buenas, aunque no todas ellas pertenezcan a la misma categoría.

Podemos dar, en consecuencia, por sentado que las *Categorías* se ocupan de las cosas significadas por los términos, ya sea que éstos oficien de predicado o de sujeto en las oraciones. Y estamos ahora en situación de preguntarnos cuáles sean las razones del especial interés de Aristóteles por la doctrina de las categorías. ¿Qué le movió a tomarse la molestia de formularla y qué relación guarda esta teoría con sus otras doctrinas, especialmente las expuestas en sus obras de lógica?

La respuesta más satisfactoria a la primera de estas preguntas consistiría en hacer ver que la teoría es obviamente acertada. Un hombre individual difiere de un instante en el tiempo (por ejemplo, las dos horas del día de hoy) o de una virtud en una medida en la que no difiere de otro hombre individual ni incluso de un perro o un gato individuales. Las diferencias intercategoriales son cosa muy distinta de las intracategoriales, por más que sea difícil formular tal distinción fundamental con precisión.

15 *Topica*, I, 9 (103b27-38).
16 *Ethica Nicomachea*, I, 6 (1096a23 y ss.).

Se trata, pues, de una observación con la que tropezó la vasta curiosidad de Aristóteles y que sin duda juzgó digna de ser recogida.

Pero tal vez quepa reconocer que Aristóteles haya tenido aún otro motivo para elaborar su teoría. Por lo menos, echa frecuentemente mano de ella como de un arma que esgrimir frente al platonismo. Sus objeciones a la teoría platónica de las Formas discurre en una doble dirección. En primer lugar, cree ver en ella una teoría simplista del significado. Platón se halla aparentemente comprometido con la tesis de que todo término posee una significación unívoca, a saber, la Forma correspondiente, y Aristóteles trata de refutarla aduciendo —como en el pasaje citado de la *Etica Nicomaquea*— el caso de términos susceptibles de aplicación en todas las categorías, términos que, por consiguiente, no podrían ser unívocamente definidos. En segundo lugar, cree detectar en el platonismo una grave confusión entre la categoría de substancia y las restantes categorías. Su acusación constante es que Platón considera a las Formas como si se tratase de substancias, esto es, como si fuesen capaces de existir independientemente, cuando resulta fácil ver —piensa Aristóteles— que no lo son [17]. De ahí que para él revista la mayor importancia el insistir en que tan sólo la substancia primera es capaz de existencia independiente, mientras que la existencia de las cosas incluidas bajo las otras categorías es siempre dependiente. Así, Aristóteles escribe:

«A excepción de las substancias primeras, toda otra cosa o bien es predicable de las substancias primeras consideradas como sus sujetos o bien está presente en estos mismos sujetos. Ello resulta manifiesto por referencia a los siguientes ejemplos concretos. Animal se predica de hombre y, por lo tanto, del hombre individual; pues, si no hubiera ningún hombre individual de quien pudiera predicarse, no se predicaría del hombre en modo alguno. De análoga manera, el color está presente en el cuerpo y, por lo tanto, en un cuerpo individual; pues, si no hubiera algún cuerpo individual, no podría estar presente en ningún cuerpo. Así pues, todo —excepción hecha de las substancias primeras— o se predica de las substancias primeras o está presente en ellas; y, si estas últimas no existieran, sería imposible la existencia de ninguna otra cosa» [18].

Si la intención de Aristóteles, por consiguiente, es contraponer su doctrina de las categorías a la teoría platónica de las Formas, hay que decir que no hace entera justicia al último Platón; pues su propia concepción de aquellos predicados que resultan aplicables en todas las categorías parece deber algo a la doctrina platónica de los géneros supremos (*μέγιστα γένη*) del *Sofista* [19]. Es posible, no obstante, que Aristóteles haya ido más lejos que Platón, distinguiendo entre términos realmente omniaplicables y términos que no lo son en realidad; en efecto, los predicados que selecciona como de aplicación en todas las categorías [20] —predicados tales como «uno», «ente», «mismo», «otro», «opuesto»— parecen (con la posible excepción de «opuesto») inobjetablemente susceptibles de ser considerados como omniaplicables en el sentido ya indicado en otra parte [21]. Sus seguidores de la posteridad han deseado a veces incluir «bueno» entre los predicados estrictamente omniaplicables (o trascendentales); pero, en

17 *Metaphysica*, *A*, 9 (991b1-4).
18 *Categoriae*, 5 (2a34 y ss.).
19 Véase más arriba, p. 19.
20 *Metaphysica*, Δ, 10 (1018a35).
21 Véase más arriba, p. 19.

el pasaje de la *Etica Nicomaquea* a que nos hemos referido, Aristóteles únicamente dice que es posible aplicarlo a cosas en todas las categorías, no que sin excepción se aplique a toda cosa, sea concreta o abstracta. Por lo demás, es obvio, aunque quizá merezca la pena recordarlo, que las categorías mismas no son términos omniaplicables. En líneas generales, se supone que son mutuamente excluyentes y se trata por tanto de términos esencialmente clasificatorios [22]. Sin embargo, difieren de otros géneros más elementales de términos clasificatorios en que no sirven para clasificar substancias primeras. La conexión entre categorías y términos omniaplicables estriba en el hecho de que la omniaplicabilidad de un término es condición necesaria, aunque no suficiente, para que pueda predicarse de los objetos incluidos bajo todas las categorías. Es por tanto un error el sugerir, como lo han hecho algunos historiadores, que la teoría platónica de los géneros supremos constituye una anticipación de la teoría de las categorías. Se trata más bien de una anticipación de la teoría de los términos omniaplicables, que a su vez se relaciona con la de las categorías del modo que se acaba de indicar.

Las consecuencias de la teoría de las categorías en el dominio de la lógica parecen reducirse a tres.

En primer lugar, el hincapié de Aristóteles en la substancia primera como sujeto fundamental de la predicación conduce a enfatizar la estructura sujeto-predicativa de la proposición, lo que hubo de actuar como un factor retardatario del desarrollo de la lógica todavía en tiempos de Leibniz. Si la substancia primera es el sujeto básico de la predicación, todas las verdades básicas revestirían la forma «Esto (una substancia primera) es así y así», debiendo las restantes considerarse derivadas o dependientes de aquéllas. Las más obviamente dependientes de ellas serán las que, en apariencia, detenten la misma forma, esto es, las proposiciones universales de la lógica aristotélica; de donde no es extraño que Aristóteles considerase como uno de los primordiales cometidos de los *Primeros Analíticos* la explicación de las proposiciones universales en términos de proposiciones singulares: «Decimos que un término se predica de la totalidad de otro cuando no es posible encontrar un caso particular de este último del que el primero no pueda ser afirmado» [23]. Parece, en consecuencia, que las diferencias realmente relevantes entre las proposiciones habrían de ser aquellas que vengan determinadas por la presencia o ausencia de la partícula negativa, así como por los cuantificadores «todo» y «algún». Con otras palabras, la concentración en la forma de sujeto-predicado conduce a la cuádruple clasificación del *De Interpretatione*. Y, una vez aceptado esto, las restantes diferencias entre proposiciones, salvo en ocasiones las de modalidad, tenderán a ser tratadas como diferencias entre predicados, y por lo tanto como insuficientemente generales para ser tenidas en cuenta en la teoría general de la argumentación. Lo que todavía es más, dicha tendencia se verá alentada finalmente por la interpretación de κατηγορία como «predicado». No es improbable, pues, que esta simplista caracterización de la naturaleza de las proposiciones básicas haya actuado como un impedimento para el adecuado desarrollo de la lógica de las relaciones y las proposiciones de generalidad múltiple.

22 En *Cat.* 8 (11a37), Aristóteles admite que sus categorías de cualidad y relación pudieran no excluirse mutuamente.

23 *An. Pr.* I, 1 (24b28).

En segundo lugar, el empleo aristotélico del término *οὐσία* para designar por igual la substancia primera y la segunda torna un tanto borrosa la fundamentalísima distinción entre proposiciones generales y singulares. Aunque Aristóteles reconoce abiertamente la diferencia que existe entre proposiciones como «Sócrates es un hombre» y «El hombre es un animal», las considera a ambas semejantes en un importante sentido, puesto que los sujetos de las dos se incluyen por igual en la categoría de substancia [24]. La admisión de la substancia segunda como substancia por parte de Aristóteles delata, de hecho, un residuo de platonismo del que nunca logró zafarse por entero. Ya que la predicación de una substancia segunda arroja la esencia de la substancia primera de una manera como ninguna otra predicación lo podría hacer, las proposiciones verdaderas que versen sobre conexiones entre substancias segundas tendrán el mérito de ser a un tiempo básicas y generales. He aquí, por consiguiente, el material de la silogística demostrativa de Aristóteles. Como trasfondo de la teoría se adivina la misma doctrina fundamental del encadenamiento de las Formas que subyacía a la teoría platónica de la división.

En tercer lugar, las *Categorías* parecen constituir el primer intento de elaborar lo que recientemente se ha llamado una teoría de los tipos o de las distinciones entre tipos, esto es, una teoría en que las diversas entidades son objeto de clasificación sobre la base de lo que quepa decir de ellas con sentido. Platón había ya hecho observar que, para poder expresar una verdad, una fórmula lingüística tendría que ser compleja, conteniendo al menos un nombre y un verbo [25]. Se trata ciertamente de una condición necesaria, pero no todavía suficiente, de significatividad. Oraciones gramaticalmente correctas podrían hallarse desprovistas de significado inteligible, como en el caso por ejemplo de «Sócrates es lo contrario de Tersites», «Las amebas son lo contrario de los hombres», «Ambos son hombres, pero el uno lo es mucho más que el otro». Es muy posible que el lector moderno no considere tales frases como ejemplos enteramente convincentes de afirmaciones absurdas, pero se han escogido deliberadamente como muestra de afirmaciones excluidas por las reglas que Aristóteles estipula en su tratamiento de las diversas categorías en particular. En cada uno de estos casos, Aristóteles se pregunta si los términos incluidos bajo la categoría en cuestión admiten contrarios o grados, y en el caso concreto de la substancia rechaza una y otra posibilidad. Sin embargo, no podemos afirmar con absoluta seguridad que Aristóteles estuviese tratando de establecer distinciones de tipos en todos estos casos; pues lo que dice a este respecto no deja ver con claridad si los enunciados del género de los anteriores son simplemente falsos o encierran una contradicción o un sinsentido. Traducido lo más literalmente posible, lo que viene a decirnos es más o menos esto:

«Es asimismo una característica de las substancias la de que éstas carecen de contrarios. Pues, en efecto, ¿qué podría ser lo contrario de una substancia primera como el hombre o el animal individual? Nada hay que sea lo contrario de ellos, como tampoco lo hay del hombre o el animal en general» [26].

«La substancia no parece susceptible de más y menos. Quiero decir... que cada substancia es lo que es y no se puede hablar de que lo sea en mayor o menor

[24] *Categoriae*, 5 (2b17).
[25] Platón, *Sophista*, 262A; cf. *Categoriae*, 4 (2a5).
[26] Ibid. 5 (3b24).

grado. Por ejemplo, si esta substancia es un hombre, no será más o menos hombre que él mismo en otro momento o que cualquier otro hombre en éste» [27].

Estas observaciones implican ciertamente que una oración en que se afirme que una substancia dada es lo contrario de otra substancia, o que admite tal o cual graduación en tanto que substancia, no expresa una proposición verdadera. ¿Pero qué más cabría decir de esa oración? ¿Diremos que no expresa proposición alguna? ¿O que expresa una proposición imposible? ¿O meramente una proposición falsa? Se trata de una cuestión que toca fondo en los fundamentos de la lógica, pues plantea el problema de cuál sea la correcta formulación de la ley de tercio excluso, así como el ámbito de vigencia de esta última.

3. Los *Tópicos*

Los *Tópicos*, como ya se ha dicho, son declaradamente un manual para instrucción de quienes toman parte en competiciones de pública controversia. El último libro (VIII) proporciona orientaciones específicas para ambos contendientes, el que pregunta y el que responde en tales competiciones. Su contenido, sin embargo, parece estar determinado en buena parte por los ejercicios de clasificación y de definición llevados a cabo en la Academia; y es posible que la teoría de los Predicables, que da unidad a los *Tópicos* en la medida que se pueda hablar de ésta, hubiera sido ya confeccionada en la Academia, pues Aristóteles introduce los términos clave (propiedad, accidente, género, especie y diferencia) como si se tratase de algo familiar. Los *Tópicos* son un producto de la reflexión sobre el método dialéctico, tal y como éste se aplicaba a problemas de definición y clasificación. En la versión que conocemos, se trata de una colección de observaciones, por lo demás no muy bien ordenadas ni trabadas, sobre cuestiones lógicas, psicológicas y lingüísticas. Podría decirse, sin embargo, que contiene en solución una teoría lógica, teoría que habría de cristalizar en el *De Interpretatione* y los *Primeros Analíticos*.

Es fácil apreciar, en líneas generales, la naturalidad de semejante proceso evolutivo. En primer lugar, un interés de tipo *práctico* por triunfar en las controversias a base de argumentaciones conduce a un interés de tipo *teórico* por la investigación de la inferencia válida, pues, entre personas honestas, el medio más seguro de vencer en la discusión consiste en aportar una serie de argumentos correctos. No deja de ser cierto que Aristóteles sugiere más de una vez recursos que pudieran contribuir a una victoria deshonesta, como sucede por ejemplo con el ocultamiento o el disimulo de los pasos y el rumbo de un argumento dado [28], pero esto no es en definitiva más que el poso que de la solución se precipita. En segundo lugar, y ya que la argumentación ha de conducirse bajo la forma de un diálogo en que ambas partes defienden tesis opuestas, la pregunta «¿Qué enunciado es el contradictorio de un enunciado dado?» revestirá gran interés, puesto que es esencial determinar cuál sea el punto en que una de las partes ha conseguido refutar a su oponente. Esto nos lleva a la doctrina del cuadrado de la oposición, la principal contribución a la lógica del *De Interpretatione*. En tercer lugar, dado que las dos partes tratan de

27 Ibid. (3b33).
28 *Topica*, VIII, 14 (163b35).

clasificar y definir, los enunciados considerados serán de la forma «X es Y» y «X no es Y». Versiones más precisas de dichos enunciados y sus contradictorios constituyen los elementos de la silogística de Aristóteles. Tras un breve repaso al contenido de los *Tópicos*, habremos de considerar en lo que sigue unos cuantos pasajes, algunos de los cuales anticipan la teoría del silogismo, mientras que otros adelantan tesis lógicas que exceden del alcance de aquella última. En efecto, y para continuar con nuestra metáfora, los *Tópicos* llevan en sí disuelto bastante más de lo que Aristóteles vería cristalizado a partir suyo, esto es, no sólo la cuidada y simétrica floritura de la silogística, sino también los enérgicos trazos elementales de la lógica proposicional y los intrincados diseños de la lógica de relaciones.

La denominación de *Tópicos* proviene de una palabra griega que originariamente quería decir «lugar», pero que andando el tiempo vino a significar «lugar común», esto es, un tema o una pauta recurrente en el discurso. Aristóteles da cuenta en la *Retórica* de este sentido del término:

> «Entiendo que los silogismos dialécticos y retóricos se ocupan de lo que llamamos *tópoi*. Estos son comunes a cuestiones relativas a la recta conducta, cuestiones físicas y políticas y muchas otras de diferente género entre sí, como por ejemplo el *tópos* de lo más y de lo menos» [29].

Se desprende de ello que el *tópos* es algo que entra en juego en cualquier argumentación, independientemente de la materia sobre que ésta versa. Lo que Aristóteles quiere dar a entender con el vocablo se puede comprender mejor a través de los siguientes ejemplos:

> «Uno de los *tópoi* es aquel que consiste en indagar si el adversario ha descrito como accidente lo que corresponde al sujeto bajo otra suerte de atribución» [30].

> «Otro consiste en ofrecer definiciones tanto de un accidente como de su sujeto, ya sea de los dos por separado o sólo de uno de ellos, y comprobar después si en las definiciones se dio por bueno algo no verdadero» [31].

Se echa de ver, pues, que los *tópoi* son patrones de procedimiento o estrategias que se pueden ejercitar en el curso de una argumentación, cualquiera que sea el tema de la misma. De hecho, lo que Aristóteles hace en los *Tópicos* es proporcionarnos una serie de recomendaciones tácticas de tipo general a las que poder ajustar luego el desarrollo de argumentaciones competitivas.

Al comienzo de la obra se establece la distinción entre una *prótasis* y un *próblema*. Se trata en los dos casos de tipos de pregunta y la diferencia entre ambos, advierte Aristóteles, es meramente de forma, a saber, la que existe entre preguntar «¿Es animal el género de hombre?» y preguntar «¿Es animal el género de hombre o no?» [32]. Tal diferencia no parece muy importante, pero la distinción acaso sea la que se da entre una tesis propuesta para su discusión, esto es, el punto de partida de una argumentación, y una cuestión que ulteriormente se plantea en orden a proseguirla. Supongamos que la cuestión a discutir sea «¿Es animal el género de hombre?» Esta sería la *prótasis*, el punto de partida. En el curso de la argumentación, el interrogador inquiere «¿Es o no es una propiedad de los animales la de ser semovientes?» Este sería un *próblema*. En los

29 *Rhetorica*, I, 2 (1358a10 y ss.).
30 *Topica*, II, 2 (109a34).
31 Ibid. II, 2 (109b30).
32 Ibid. I, 4 (101b28-33).

Primeros Analíticos, en cambio, el vocablo *prótasis* designa siempre un enunciado, y en los capítulos 26 a 28 del primer libro de esa obra, donde Aristóteles, volviendo en cierto modo al proceder de los *Tópicos,* nos ofrece una serie de consejos prácticos para la conducción de la argumentación, *próblema* también parece referirse a un enunciado. Sucede aquí que ha cambiado su perspectiva. Lo que ahora le interesa averiguar es cómo puede probarse una proposición más bien que cómo pueda contestarse, afirmativa o negativamente, una pregunta dada. En los *Tópicos,* por el contrario, tiene siempre presentes las figuras de los dos contendientes. Algunas consideraciones etimológicas podrían acaso ser de utilidad para seguir la pista del cambio de significado de ambos vocablos. *Prótasis* procede de προτείνω («mostrar o exponer») y da por tanto idea de algo que se ofrece a la consideración del interlocutor al comienzo de la disputa, mientras que *próblema,* procedente de προβάλλω («lanzar o arrojar»), da idea más bien de algo que se emite o insinúa a mitad de la discusión, esto es, de una sugerencia. Lo que en dicho caso es proferido puede igualmente bien tomar la forma de una interrogación o un enunciado. El vocablo latino *propositio* (de *propono*) conserva de igual modo el significado esencial de «proponer», común tanto a *prótasis* cuanto a *próblema.*

De toda *prótasis* o *próblema* se dice que presenta ya sea la definición, ya una propiedad, ya el género, ya un accidente del sujeto. El supuesto en todos estos casos es que la *prótasis* o el *próblema* envuelve un enunciado general, como por ejemplo «El hombre es un animal bípedo», «El hombre es blanco», etc. Los rótulos antes citados indican en cada caso la relación que el predicado podría guardar con el sujeto de tales proposiciones. En primer lugar, podría tratarse de la *definición* (ὅρος) del sujeto, esto es, la cláusula predicativa ofrecería la esencia del sujeto, lo que es ser tal y tal cosa. En segundo lugar, el predicado podría ser una *propiedad* (ἴδιον) del sujeto, esto es, se trataría de algo que no es de la esencia de este último, pero que sin embargo es específico suyo y se predica convertiblemente de él: «Así, es una propiedad del hombre el ser capaz de aprender gramática: pues, si es un hombre, será capaz de aprender gramática; y, si es capaz de aprender gramática, será un hombre» [33]. En tercer lugar, el predicado podría ser el *género* (γένος) del sujeto, esto es, la más vasta familia a que su especie pertenece y dentro de la cual se distingue por su diferencia específica (διαφορά). En cuarto lugar, el predicado podría ser un *accidente* (συμβεβηκός), esto es, una característica que pudiera pertenecer a los ejemplares de la especie, pero que no necesita hacerlo así, como por ejemplo la blancura respecto de los hombres. Mientras los dos primeros son predicados convertibles (esto es, tales que de «X es Y» podríamos pasar a «Y es X»), el tercero y el cuarto no lo son. Hemos de ver que esta teoría de los predicables descansa en dos importantes distinciones, a saber, las que se dan entre predicación necesaria y no-necesaria, por un lado, y entre predicación convertible y no-convertible, por otro. Ambos juegan un considerable papel en el ulterior pensamiento de Aristóteles.

Tras de introducir la teoría de los predicables, Aristóteles pasa a definir más detalladamente la naturaleza de los argumentos dialécticos, así como a ofrecer instrucciones generales para la selección de las proposiciones a discutir y el examen de las mismas. En el curso de su disqui-

[33] Ibid. I, 5 (102a19-22).

sición recapitula la teoría de las categorías [34] y sienta algunas distinciones de considerable importancia lógica. Por ejemplo, distingue tres sentidos de la identidad (numérica, específica y genérica) [35] y presenta por vez primera en la historia de la literatura filosófica la distinción entre proposiciones éticas, físicas (esto es, relativas a la ciencia natural) y lógicas [36]; pero la más interesante de las distinciones introducidas es la que se establece entre inducción (*ἐπαγωγή*) y razonamiento (*συλλογισμός*), expuesta en el capítulo 12. De la inducción nos dice: «Inducción es el tránsito de los casos particulares (*τῶν καθ' ἕκαστα*) al caso universal. Por ejemplo, si el piloto mejor es el experto, y lo mismo sucede con el auriga, puede decirse entonces, de forma general, que el hombre experto es el mejor en cada caso» [37]. Aunque Aristóteles se sirve de la expresión *καθ' ἕκαστα*, de sus ejemplos se desprende que no entiende por inducción la simple enumeración de los casos individuales correspondientes, sino más bien la agrupación y comparación de un cierto número de casos específicamente diferentes.

A continuación, Aristóteles procede a considerar una serie de cuestiones que envuelven la predicación del accidente. Su discusión de las mismas concluye al final del libro III. El libro IV se ocupa luego del género, el V lo hace de la propiedad y el VI de la definición. El libro VII contiene ulteriores reflexiones sobre la definición que naturalmente conducen a ampliar las consideraciones aristotélicas sobre la identidad, en tanto el libro VIII concluye —como dijimos ya— con algunas indicaciones de orden práctico destinadas a los protagonistas del debate dialéctico.

Abundan en los *Tópicos* los pasajes que anticipan detalles de la silogística aristotélica. Pasaremos revista a unos cuantos de ellos, haciendo resaltar las diferencias existentes entre este primer tratamiento y el posterior del mismo tema. En conexión con este punto, será a veces conveniente anticipar nuestra propia exposición de la silogística mencionando algunas particularidades de tipo técnico que no ha habido ocasión de explicar aún.

Cuando Aristóteles escribe: «Al probar que un atributo corresponde a todos los individuos de un cierto género, habremos probado que corresponde a algunos de ellos» [38], prenuncia la teoría de la subalternación y establece una clara distinción entre enunciados universales y particulares. Son dos ingredientes característicos de su doctrina posterior.

El siguiente pasaje muestra hasta qué punto se aproximan los *Tópicos* a la formulación de reglas silogísticas:

> «En orden a probar que los contrarios pertenecen a una misma cosa, es menester considerar el género de esta última. Por ejemplo, si deseamos demostrar que en relación con la percepción se pueden dar la corrección y el error, diremos que, ya que la percepción es un juicio y el juicio es susceptible de ser considerado correcto o incorrecto, también se podrá hablar de corrección o incorrección en el caso de la percepción. En esta ocasión, la demostración discurre del género a la especie; pues el juicio es el género de la percepción, ya que el hombre que percibe juzga de algún modo. Inversamente, podría procederse de la especie al género, pues lo que pertenece a la primera pertenece asimismo al segundo. Por ejemplo, si el conocimiento

[34] Ibid. I, 9.
[35] *Topica*, I, 7 (103a6-14).
[36] Ibid. I, 14 (105b20-25).
[37] Ibid. I, 12 (105a10-16).
[38] Ibid. II, 1 (109a3).

es bueno y malo, la disposición lo será también; pues la disposición sirve de género al conocimiento. Con vistas a sentar una proposición, el primero de estos *tópoi* es falaz, en tanto que el segundo es adecuado. Pues no es necesario que lo que pertenece al género tenga igualmente que pertenecer a la especie: así, el animal es alado y cuadrúpedo, pero el hombre no lo es; en cambio, lo que pertenece a la especie ha de pertenecer de igual manera al género: así, si el hombre es bueno, también lo será el animal. Mas si lo que se busca es refutar una proposición, entonces será el primero de ambos *tópoi* el que sea válido, en tanto que el segundo será inválido. Pues lo que no pertenece al género tampoco pertenece a la especie, mientras que lo que no pertenece a la especie no es en cambio necesario que deje de pertenecer al género» [39].

La forma cuantitativamente indefinida o indeterminada —como, por ejemplo, «El hombre es bueno»— es característica de los *Tópicos*. Su interpretación como enunciado existencial, frecuente en editores y traductores, resulta confundente para el lector moderno, ya que sugiere inevitablemente su equivalencia con la forma «Algún hombre es bueno», equivalencia que Aristóteles no había establecido todavía. En el pasaje antes citado, se deja leer la aceptación de dos estructuras silogísticas junto con el rechazo de otras dos. Las aceptadas son «Si algún M es G y todo M es P, entonces algún P es G» (*Disamis*, en la tercera figura) y «Si ningún M es G y todo P es M, entonces ningún P es G» (*Celarent*, en la primera figura); las rechazadas son «Si algún M es G y todo P es M, entonces algún P es G» (*IAI*, en la primera figura) y «Si ningún M es G y todo M es P, entonces ningún P es G» (*EAE*, en la tercera figura). Pero una comparación con los pasajes relevantes de los *Primeros Analíticos* [40] mostrará hasta qué punto están lejos los *Tópicos* de una completa formalización de estos principios. En comparación con los *Analíticos*, al tratamiento de los *Tópicos* le falta a un tiempo generalidad y precisión. Ningún sistema formal le sirve de respaldo, no se hace en ellos uso de variables y el vago empleo de los verbos *εἶναι* y *ὑπάρχειν* * no permite distinguir entre enunciados universales y particulares, ni entre enunciados de hecho y enunciados de posibilidad. Por ejemplo, *ζῷον μέν ἐστι πτηρόν* (literalmente, «El animal es alado») podría querer decir indistintamente «Todo animal es alado», «Algún animal es alado», «Todo animal puede ser alado» o «Algún animal puede ser alado».

En compensación, el tratamiento de los *Tópicos* es en algunos aspectos más flexible que el de los *Analíticos*. Hay lugar en el mismo para predicados disyuntivos, tales como «correcto o incorrecto», que en la segunda obra se excluyen; y se presta atención en su transcurso a numerosas variedades de argumentos que no se dejan reducir a forma silogística. Los del pasaje que citamos a continuación, por ejemplo, no podrían ser formalizados de esta suerte:

«Ya que es necesario que alguna de las especies se predique de todo aquello de lo que se predica el género, y que las cosas que poseen el género... posean asimismo alguna de las especies... (por ejemplo, si la ciencia se predica de alguien, entonces

39 Ibid. II, 4 (111a14-32).

40 *An. Pr.* I, 6 (28b7-11); I, 3 (25b40-26a16); I, 4 (26a30-34); I, 6 (29a17).

* El verbo griego *ὑπάρχειν*, traducido literalmente en lo que sigue por "pertenecer" (su traducción más libre por "corresponder" o "convenir" podría haber comportado otras connotaciones indeseables), nada tiene que ver —como, por lo demás, se dejará obviamente desprender en cada caso del contexto— con el específico sentido revestido por la noción de pertenencia en el dominio de la lógica de clases. *(N. del T.)*

habrá de predicarse de este último la ciencia de la música o la de la gramática o alguna otra ciencia en especial; y, si alguien posee ciencia, ..., poseerá entonces la ciencia de la música, o la de la gramática, o alguna de las otras ciencias)...» [41].

A lo más que podríamos llegar en un análisis silogístico de tales argumentos sería a estructurarlos de esta guisa: «Si toda ciencia es o bien música, o bien gramática, o bien..., y esto es una ciencia, entonces esto es o bien música, o bien gramática, o bien...» y «Si toda ciencia es o bien música, o bien gramática, o bien..., y esta persona tiene ciencia, entonces tiene ciencia o bien de la música, o bien de la gramática, o bien...». El primero de estos argumentos sólo por cortesía podría considerarse silogístico, a la vista del carácter indefinidamente disyuntivo del término mayor. En cuanto al segundo, no se trata de un silogismo en modo alguno; pues, siendo el predicado de la premisa mayor «tener ciencia» y no «ciencia», carece lisa y llanamente de término medio. De hecho, es similar a un argumento que Aristóteles menciona en los *Primeros Analíticos* [42] y que declara considerar expresamente como válido, pero no silogístico.

Dos pasajes de los *Tópicos* prefiguran la doctrina de la reducción indirecta. El primero de ellos reza así: «Si se hace del bien el género del placer, será menester considerar si hay algún placer que no sea un bien; pues, si lo hay, está claro que el bien no será el género del placer, ya que el género se predica de todo cuanto se halla incluido bajo una especie suya dada» [43]. Aquí, en efecto, se echa mano de un silogismo en *Barbara*, «Si todo placer es un bien y X es un placer, entonces X es un bien», en orden a validar el razonamiento en *Felapton* «Si ningún X es un bien y todo X es un placer, entonces algún placer no es un bien». Véase un recurso similar en el siguiente fragmento:

«Consideremos ahora si la especie en cuestión es verdadera de algo, en tanto el género no lo es, como sucedería, por ejemplo, si lo existente o lo cognoscible se propusieran como el género de lo opinable. Pues lo opinable podría predicarse de lo inexistente (toda vez que muchas cosas inexistentes son objeto de opinión), mientras que en cambio es obvio que lo existente o lo cognoscible no se pueden predicar de lo inexistente. De modo que ni lo existente ni lo cognoscible constituyen el género de lo opinable» [44].

En este caso, el silogismo en *Ferison* «Si ninguna cosa inexistente es existente y alguna cosa inexistente es opinable, entonces alguna cosa opinable no es existente» se respalda apelando al silogismo en *Darii* «Si toda cosa opinable es existente y alguna cosa inexistente es opinable, entonces alguna cosa inexistente es existente». En ambos casos, como luego en los *Primeros Analíticos*, Aristóteles acude a la primera figura como soporte, si bien procede en ellos sirviéndose de ejemplos y no hace uso de variables. Gracias a la terminología de los predicables —como en la oración «El género ha de ser predicable de todo aquello de que la especie sea predicable»—, se alcanza decididamente un cierto grado de generalidad. Mas no se trata, sin embargo, de generalidad completamente *formal*, puesto que un enunciado de la forma «Todo X es Y» podría envolver por igual la predicación de la definición, el género, una propiedad o un accidente. Es muy posible

41 *Topica*, II, 4 (111a33-111b2).
42 *An. Pr.* I, 32 (47a24 y ss.).
43 *Topica*, IV, 1 (120b17-20).
44 Ibid. IV, 1 (121a20 y ss.).

que las inferencias de los *Tópicos* no se hallen enteramente formalizadas debido a que Aristóteles vacilase todavía inconscientemente entre dos modos posibles de clasificar los enunciados en los que un término general se predica de otro. Aristóteles heredó del método platónico de la división un procedimiento para expresar tales enunciados sin hacer uso de signos de cuantificación («algún» y «todos»). Los enunciados de esta forma, que Aristóteles llamó «indefinidos» (ἀδιόριστοι λόγοι), resultan hoy para nosotros extremadamente ambiguos. Se podría, así, tratar de precisarlos de uno de estos dos modos, a saber, o bien mediante la adición al término que oficia de sujeto de uno de los cuantificadores «todo» y «algún», o bien haciendo más explícita la relación expresada por la partícula verbal «es», esto es, introduciendo diferentes formas de copulación. Si considerásemos a los términos generales como nombres de clases, tendríamos que hay cinco relaciones posibles entre cualesquiera dos clases X e Y: la de coincidencia, la de inclusión de Y en X pero no viceversa, la de inclusión de X en Y pero no viceversa, la de solapamiento y la de total exclusión. La teoría de los *Tópicos* refleja hasta cierto punto esta clasificación. La relación de inclusión de X en Y se expresa diciendo que X es una especie de Y; la relación inversa diciendo que es un género, puesto que Aristóteles insiste siempre en que el género ha de abarcar más que la especie [45]; los enunciados definitorios o de atribución de una propiedad expresan ambos la relación de coincidencia; mientras que los enunciados en los que se atribuye un accidente se corresponden de un modo bastante obvio con la relación de solapamiento, a pesar de que Aristóteles concede que un accidente podría considerarse como una propiedad relativa o de carácter temporal. En ese caso, el enunciado de atribución de un accidente expresaría más bien la relación de coincidencia [46].

El cuádruple esquema de la teoría de los predicables difiere del quíntuple de las relaciones de clases en parte porque Aristóteles se hallaba asimismo interesado por la distinción, independiente de la anterior, entre lo necesario y lo contingente, y en parte porque, ocupándose como lo hacía de enunciados afirmativos, no reconoció expresamente la relación de exclusión. Su interés por la necesidad y la contingencia le llevó a distinguir dos clases de coincidencia (definición y propiedad) y a caracterizar el accidente en términos de contingencia.

Aunque no totalmente consciente del esquema de las relaciones de clases, Aristóteles esbozó alguna de sus leyes características, como la que nos dice, por ejemplo, que si X incluye a, y se halla incluida en, Y, entonces no-X incluye a, y se halla incluida en, no-Y [47].

Que fuese la silogística, más bien que la lógica de clases, lo que Aristóteles tratara de desarrollar a este nivel de su producción se explica probablemente por el hecho de que el griego, como el castellano, carece de giros idóneos con que expresar concisamente todas y cada una de las relaciones de clases, lo que hace que la lógica de clases no se pueda desarrollar sin un recurso —como el de un simbolismo artificial— con que los lógicos no contarían sino al cabo de los siglos. Por lo demás, ya en los *Tópicos* se aprecia la inclinación de Aristóteles hacia la doctrina del *De Interpretatione*. En el siguiente pasaje, por ejemplo, se nos muestra consciente de la ambi-

45 Ibid. IV, 1 (121a13 y ss.); IV, 2 (122b35 y ss.).
46 Ibid. I, 5 (102b20 y ss.).
47 Ibid. V, 6 (135b13 y ss.).

güedad del enunciado indefinido y acredita el interés por la contradicción que habría de dominar el *De Interpretatione*:

«Cuando el enunciado propuesto sea indefinido, sólo habrá un modo posible de refutarlo. Así sucede, por ejemplo, si alguien sostiene que el placer es bueno, o que no lo es, y no añade ninguna otra precisión a este respecto. Pues si lo que ha querido decir es que algún placer es bueno, para refutar su aserto habría que probar universalmente que ningún placer es tal. De análoga manera, si lo que ha querido decir es que algún placer no es bueno, habría que probar universalmente que todo placer es bueno. No hay otro modo posible de refutar el enunciado. Pues si probásemos que algún placer no es bueno, o que es bueno, el enunciado originario no habría quedado refutado. De todo ello se desprende claramente que, mientras que sólo hay un modo de refutar ese enunciado, cabe en cambio establecerlo de dos modos distintos. Pues si probamos universalmente que todo placer es bueno, o si probamos que algún placer es bueno, la proposición en cuestión (esto es, que el placer es bueno) habría quedado demostrada. De análoga manera, si fuese necesario mantener en una argumentación que algún placer no es bueno y probásemos que ninguno lo es, o que alguno no lo es, habríamos argumentado en cada caso, ya sea de modo universal, ya sea de modo particular, en orden a demostrar la proposición en cuestión (esto es, que el placer no es bueno). Mas si la tesis constituye un enunciado definido, será posible refutarla de dos modos, como sucede por ejemplo cuando alguien propone para la discusión que el hecho de ser bueno corresponde a algún placer, pero no así a algún otro. Pues si se probase que todo placer es bueno, o que ninguno lo es, el enunciado propuesto habría quedado refutado. Pero si lo propuesto hubiese sido que sólo un placer es bueno, sería posible refutar el enunciado de tres modos distintos, lo que conseguiríamos probando que todo placer es bueno, o que ninguno lo es, o que lo es más de uno. Y si la tesis de partida se hallase expuesta en forma aún más determinada, como sucedería por ejemplo si alguien sostuviese que la sabiduría práctica o prudencia es la única de las virtudes que constituye conocimiento, cabría refutarla por cuatro vías diferentes, a saber, probando que toda virtud es una forma de conocimiento, o que ninguna virtud reviste ese carácter, o que alguna otra, como por ejemplo la justicia, lo reviste, o que la misma sabiduría práctica o prudencia no constituye conocimiento» [48].

La última parte del fragmento va incluso más lejos que el *De Interpretatione* en el reconocimiento de diferencias de cantidad entre los enunciados y establece distinciones que no entran en juego en los *Primeros Analíticos*.

Mientras la teoría de las relaciones de clases constituye una alternativa frente a la teoría de las proposiciones cuantificadas, la distinción entre lo necesario y lo contingente, que juega un importante papel en los *Tópicos*, es independiente de ambas, circunstancia esta última que Aristóteles constataría más tarde al intentar desarrollar una teoría de los silogismos modales en cuanto diferentes de los asertóricos.

En el pasaje que sigue, Aristóteles anticipa la doctrina de la contraposición de enunciados universales afirmativos: «En todos estos casos, habría que sentar un postulado de esta suerte: por ejemplo, 'Si lo digno de estimación es agradable, lo que no es agradable no es digno de estimación, mientras que si lo último no es cierto, tampoco lo primero lo será'; de análoga manera, 'Si lo que no es agradable no es digno de estimación, entonces lo que es digno de estimación es agradable'.» [49] Por más que Aristóteles nos presente su regla sólo por medio de un ejemplo,

[48] Ibid. III, 6 (120a6-31).
[49] Ibid. II, 8 (113b22).

se deja aquí entrever bien claramente que considera cualquier enunciado de la forma «Si algo es X, ello es Y» como equivalente al correspondiente enunciado de la forma «Si algo no es Y, ello no es X».

Dicha tesis podría aún someterse a una ulterior generalización que arrojase la fórmula «Si la proposición de que-P se sigue de la proposición de que-Q, entonces la proposición de que-no-Q se sigue de la proposición de que-no-P». Aristóteles no nos presenta exactamente esta fórmula, mas nos ofrece un principio todavía más general que resulta aplicable a argumentos con más de una premisa. Es característico de los *Tópicos* que semejante principio se halle incorporado en una recomendación metódica de tipo práctico:

«El mejor modo de ejercitarse y adiestrarse en la práctica de tales contiendas es adquirir el hábito de transponer argumentos. Pues de esta suerte estaremos mejor en situación de ocuparnos de la materia sometida a discusión y acabaremos dominando una considerable cantidad de tipos de argumentos sobre la base de nuestra familiaridad con unos pocos. La transposición consiste en la refutación de una de las proposiciones dadas a través de la consideración conjunta de la conclusión y el resto de las proposiciones iniciales; pues, si la conclusión es falsa, una de las premisas deberá ser abandonada, ya que, si fuese el caso que todas las premisas sean de hecho verdaderas, la conclusión se habría de seguir de ellas» [50].

El párrafo nos dice que si una serie de proposiciones entrañan conjuntamente una determinada conclusión, entonces, si la conclusión es falsa, al menos una de las premisas habrá también de serlo. Dicha tesis se halla a la base de la teoría de la reducción indirecta de los silogismos.

Hay, no obstante, en los *Tópicos* otros pasajes estrictamente lógicos de los que Aristóteles no extrajo un ulterior partido. Uno de ellos se refiere al caso de las relaciones:

«El caso de los términos relativos se ha de tratar de modo semejante al de los términos que expresan un estado y su privación, ya que ambos responden igualmente al modelo de la consecuencia directa. Así, si triple es un múltiplo, un tercio es una fracción; pues lo triple es relativo al tercio, y el múltiplo a la fracción. De nuevo, si el conocimiento es una forma de concebir, entonces el objeto de conocimiento será asimismo objeto de concepción; y si la visión es una suerte de percepción, entonces el objeto de visión será asimismo objeto de percepción» [51].

Aristóteles maneja en este párrafo dos distintos principios. En la primera de las oraciones citadas, establece que si una relación entraña otra, como *ser-triple* entraña ser-un-múltiplo, el converso de la primera ha de entrañar también el converso de la segunda. En la segunda oración, prosigue haciendo ver que, si una facultad entraña otra, todo aquello que guarde una determinada relación con un caso particular de ejercicio de la primera ha de guardar la misma relación con un caso particular de ejercicio de la segunda. Cada una de ambas tesis constituye de por sí una interesante contribución a la teoría de las relaciones, mas su presentación no alcanza un suficiente grado de abstracción y el caso es que Aristóteles concluye, tras estos prometedores inicios, abandonando el tema.

Otro apartado de la lógica al que Aristóteles contribuye incidentalmente en los *Tópicos* es la teoría de la identidad. Lo que nos dice a este respecto se halla formulado en un estilo más abstracto:

[50] Ibid. VIII, 14 (163a29 y ss.).
[51] Ibid. II, 8 (114a13).

«Es preciso examinar aún si, en el supuesto de que una de dos cosas sea la misma que una tercera, la otra es también la misma que esta última; pues, si no ocurriera así, está claro que tampoco serían idénticas entre sí. Más todavía, hay que examinar esas dos cosas desde el punto de vista de sus respectivos accidentes, así como de aquellas otras cosas de las cuales sean ellas mismas accidentes; pues cualquier accidente que corresponda a la una tendrá asimismo que corresponder a la otra, y si una de ellas corresponde a algo como accidente suyo, otro tanto tendrá que suceder con la segunda. Si en cualquiera de estos respectos se diese alguna discrepancia, es evidente que ambas cosas no serían la misma» [52].

«Sólo de aquellas cosas que son indistinguibles y por lo tanto una y la misma se está generalmente de acuerdo en conceder que les corresponden todos los mismos atributos» [53].

Tenemos aquí, en primer lugar, una versión del principio de transitividad de la identidad; a continuación, una formulación del principio de indiscernibilidad de los idénticos; y, finalmente, una versión del principio de identidad de los indiscernibles. Como en el caso de las leyes de relaciones mencionado en el último párrafo, el destino de todas estas tesis sería su reformulación al cabo de los tiempos por otros filósofos y sin expresa vinculación con la obra aristotélica. Su presencia en los textos que acaban de citarse carece enteramente de relieve y, por lo tanto, nada tiene de extraño que Aristóteles no se haya hecho acreedor de los honores de su descubrimiento.

El caso es muy diferente en lo que concierne a los argumentos *a fortiori* o, como Aristóteles los llama, «a partir de lo más y de lo menos». Se trata de un *tópos* al que se refiere con frecuencia, y su manera de abordarlo da idea en todo momento de que lo considera un tema de estudio bien acreditado [54]. Era natural, por consiguiente, que desease incorporar en su obra posterior sus consideraciones al respecto; y es probable que pensara en ello cuando ulteriormente nos anuncia su propósito de ocuparse de los argumentos «según la cualidad» (*κατὰ ποιότητα*). Tendremos ocasión de referirnos a él de nuevo en conexión con la teoría de los argumentos «a partir de hipótesis» (*ἐξ ὑποθέσεως*) desarrollada por la escuela aristotélica.

El lector de los *Tópicos*, por último, encontrará en ellos no poco que excede del dominio de la lógica formal, silogística o no. La distinción entre lo formal y lo informal está todavía lejos de haber sido inequívocamente formulada. Gran parte del libro III, por ejemplo, se ocupa de argumentos acerca de lo preferible (*τὸ αἱρετώτερον*) donde Aristóteles establece tesis como «Aquello que es más estable y duradero es preferible a aquello que lo es menos» [55] y «Aquello que se elige por sí mismo es preferible a aquello que se elige con vistas a conseguir otra cosa» [56]. Tenemos aquí un caso de «lógica del lenguaje ordinario» más bien que de lógica formal, y lo mismo cabría decir del siguiente párrafo: «(aunque la disposición es el género del conocimiento) el conocimiento se dice conocimiento del objeto conocido, pero el estado o la disposición no se dice que lo sean del objeto conocido sino del alma» [57].

---

52 Ibid. VII, 1 (152a30).
53 *De Soph. Elench.* 24 (179a37).
54 *Topica*, II, 10 (114b37); III, 6 (119b17); IV, 5 (127b18); V, 8 (137b14); VI, 7 (145b34); VII, 1 (152b6); VII, 3 (154a4).
55 Ibid. III, 1 (116a13).
56 Ibid. III, 1 (116a29).
57 Ibid. IV, 4 (124b33).

Aristóteles trata, sin embargo, de formular dichas tesis con el mayor carácter de generalidad posible, como cuando generaliza para el caso de las expresiones comparativas las reglas establecidas en relación con lo preferible [58].

En el último capítulo del *De Sophisticis Elenchis*, que hay asimismo que considerar como la conclusión de los *Tópicos*, Aristóteles hace valer su reivindicación de que en el dominio de la dialéctica, en cuanto diferente del de la retórica, no se había elaborado hasta la fecha ningún tratado sistemático sobre la materia:

«Sobre el tema de la retórica se ha dicho mucho ya de antiguo, mientras que sobre el tema del razonamiento (συλλογίζεσθαι) no había absolutamente nada que citar con anterioridad, sino hemos tenido que invertir un tiempo considerable en arduas investigaciones de cuestiones hasta ahora inexploradas. Si tras de nuestro examen, por lo tanto, y dado el estado de cosas que acabo de describir, os parece que el estudio de esta disciplina ha alcanzado un rango de dignidad comparable al de otras cuyo desarrollo se ha visto favorecido por la tradición, sólo os resta, a vosotros todos, mis alumnos, que habeis seguido estas lecciones, mostrar vuestra indulgencia por las lagunas del presente trabajo y vuestro reconocimiento por los descubrimientos en él llevados a cabo» [59].

Ya que gustosamente concedemos a Aristóteles el título de primer autor de un tratado sobre el tema del razonamiento, y deseamos asimismo contarnos entre sus discípulos, deberemos adoptar ante su obra la actitud que nos pide. Pero, a diferencia del auditorio que seguía su curso, tenemos además la oportunidad de estudiar su obra posterior y, por lo tanto, no dedicaremos más tiempo a este primer intento suyo de convertir el caos en orden. En cuanto parte del *Organon*, los *Tópicos* continuarían ejerciendo su influencia sobre los estudiantes de filosofía hasta el siglo diecisiete; pero, contemplados con una mirada retrospectiva, no se puede decir que su contribución al desarrollo de la lógica haya supuesto gran cosa, salvo indirectamente en la medida en que impulsaron la elaboración de la teoría medieval de los *consequentiae*.

Mientras que en los *Tópicos* se emplea el término «silogismo», de acuerdo con su etimología, para designar cualquier argumento en que se extrae una conclusión de más de una premisa, dicho vocablo es empleado en los *Analíticos*, en un sentido más estricto, con el fin de designar aquella pieza de razonamiento en la que se hace entrar en relación dos términos generales a través de un término medio [60]. Su elaboración de las reglas de la silogística constituye el más sólido cimiento de la fama de Aristóteles como lógico, pero hay que reconocer que la evolución a que acabamos de aludir restringe el interés de sus pesquisas desde el punto de vista de la teoría general de la inferencia. Aristóteles dio en pensar que el estudio del silogismo, en su sentido restringido, constituía el capítulo central de la investigación del razonamiento porque llegó a convencerse de que lo característico de todo enunciado digno de interés para la ciencia consistía en afirmar o denegar, universal o parcialmente, un término general de otro término general. Así, en el primero de los pasajes arriba men-

58 Ibid. III, 5.
59 *De Soph. Elench.* 34 (184a8).
60 *An. Pr.* I, 23 (40b16); I, 29, 30 (45a23); II, 23 (68b8).

cionados, en que Aristóteles trataba de explicar la capital importancia de la silogística, comienza por decirnos: «Es necesario que en toda demostración y todo silogismo se haya de probar la pertenencia de algo o su no-pertenencia, y ello ya sea de modo universal, ya sea en parte» [61]. Si se acepta al mismo tiempo que los enunciados admisibles como premisas han de revestir idéntica forma general, el resto de las posiciones aristotélicas se siguen por sí solas, como veremos cuando llegue el momento de examinar con detalle su teoría. Pero cabría sin duda preguntarse a qué obedece la extraordinaria importancia concedida en sus últimas obras a los enunciados generales de la suerte descrita. Una especial atención hacia estos enunciados se aprecia ya en la doctrina de los predicables, que Aristóteles maneja por doquier en los *Tópicos*, y en definitiva se halla implícita en la doctrina platónica de las interconexiones de formas, de la que hemos de suponer que arranca su investigación. Cuando Aristóteles afirme que ninguna prueba merece consideración de tal a menos de establecer una proposición del género indicado, se estará limitando a estatuir dogmáticamente lo que en etapas previas había admitido ya como un supuesto de carácter general. Pero el sentido fuerte de tal dogma parece haberse impuesto coincidiendo con la elaboración de la teoría de la ciencia presentada en los *Segundos Analíticos*.

En lo que sigue nos vamos a ocupar principalmente de la doctrina contenida en los *Primeros Analíticos*, aunque también habrá ocasión de pasar revista a lo que tenga que decirnos Aristóteles en su *De Interpretatione*.

4. La teoría aristotélica del significado y la verdad.

Los capítulos introductorios del *De Interpretatione* parecen hallarse estrechamente vinculados a la discusión platónica de la verdad y la falsedad en el *Sofista*, pues Aristóteles comienza invitándonos a definir los términos «nombre» (ὄνομα), «verbo» (ῥῆμα) y «proposición» o «enunciado» (λόγος). Como en el caso de Platón, su consideración recae tanto sobre las expresiones verbales cuanto sobre las experiencias mentales (παθήματα) o pensamientos (νοήματα) de los que se dice son símbolos aquellas expresiones. Aristóteles da a entender que los predicados «verdadero» y «falso» corresponden primariamente a los pensamientos, al parecer sobre la base de que, mientras las expresiones verbales son diferentes para diferentes personas, los pensamientos o las cosas de los que son imágenes (ὁμοιώματα) son a la vez los mismos para todos. Las expresiones verbales serían entonces verdaderas o falsas por derivación [62].

Aristóteles sigue asimismo a Platón en otros dos extremos. En primer lugar, afirma que todo pensamiento o parte del discurso que aspire a ser considerado verdadero o falso habrá de ser compuesto. El nombre o verbo aisladamente considerado posee significación (σημαίνει τι), pero no es verdadero ni falso [63]. En segundo lugar, reconoce que las expresiones verbales son significativas por convención (κατὰ συνθήκην) [64]. Por lo demás, distin-

61 Ibid. I, 23 (40b23).
62 *De Interpretatione*, 1 (16a9).
63 Ibid. 1 (16a13).
64 Ibid. 2 (16a19). Cf. el *Cratilo* de Platón, 384 D.

gue entre nombre y verbo diciendo que el primero es «sin tiempo» (ἄνευ χρόνου)[65], en tanto que el segundo «consignifica tiempo» (προσσημαίνει χρόνον) [66]. En apariencia, es como si pensara que los verbos han de detentar siempre un tiempo determinado —pasado, presente o futuro—, y en consecuencia rechazase la idea de una predicación intemporal. Esto no es cierto, sin embargo; pues al final del capítulo I del *De Interpretatione* se hace una distinción entre dos usos del verbo «ser», a saber, cuando éste se usa «simplemente» o «con referencia al tiempo» (ἢ ἁπλῶς ἢ κατὰ χρόνον) lo que podría interpretarse a la manera de un contraste entre aserción provista o desprovista de connotación temporal [67]. Posiblemente Aristóteles deseaba hacer lugar a lo que se ha llamado el uso omnitemporal del tiempo presente (que abarca tanto el pasado y el futuro como el presente), pero excluyendo en cambio la predicación estrictamente intemporal a causa de su asociación a la concepción metafísica de un reino platónico de las Formas fuera del tiempo, que él había abandonado. En tal caso, dicho paso tendría, como luego veremos, serias repercusiones en su filosofía de la lógica.

Aristóteles distingue, dentro de las oraciones (λόγοι), una clase especial a cuyos miembros les corresponde en exclusiva la posibilidad de ser considerados verdaderos o falsos. Se trata de las oraciones enunciativas o declarativas, en cuanto diferentes de los ruegos, las interrogaciones u otras frases que no son susceptibles de verdad ni falsedad, por más que todas ellas posean significado cabalmente. La denominación técnica de Aristóteles para la oración enunciativa es la de ἀπόφανσις ὁ λόγος ἀποφαντικός [68]. Ha sido lo usual entre los lógicos seguir a Aristóteles en este punto, lo que les ha llevado a desconsiderar los ruegos, las interrogaciones, las órdenes, etc., como si sólo detentasen un interés retórico. Hemos de ver que en este intento de delimitación de la esfera de la lógica se registra una cierta confusión.

Aunque las nociones de verdad y falsedad resultan esenciales para su caracterización del ἀποφαντικὸς λόγος, Aristóteles no acomete en sus escritos lógicos ningún intento de definirlas. En su *Metafísica*, en cambio, encontramos la siguiente definición: «Pues es falso decir de lo que es que no es o de lo que no es que es, y verdadero decir de lo que es que es y de lo que no es que no es» [69]. De nuevo aquí sigue Aristóteles la doctrina del *Sofista* de Platón.

Los cuatro primeros capítulos de *De Interpretatione* se hallan apresurada y descuidadamente escritos. Aristóteles se muestra ansioso en ellos por pasar a ocuparse de su teoría de la oposición y de la clasificación formal de los enunciados a que ésta da lugar. Como otros autores a quienes se deben descubrimientos lógicos de primera magnitud, parece impacientarse un tanto con la filosofía de la lógica: las cuestiones de principio son realmente embarazosas y difíciles de esclarecer. Por desgracia, el preterirlas puede también originar ciertas complicaciones de orden lógico. En el caso concreto de Aristóteles, el resultado fue embarcarse en la defensa de alguna

65 *De Interpretatione*, 2 (16a19).
66 Ibid. 3 (16b6).
67 Cf. asimismo *An. Pr.* I, 15 (34b7).
68 *De Interpretatione*, 4 (17a12 y ss.).
69 *Metaphysica*, Γ, 7 (1011b26-27).

que otra tesis harto excéntrica y desconcertante, como la mantenida en el capítulo 9 del *De Interpretatione*.

Antes de entrar en la cuestión, conviene dejar claro que Aristóteles acepta sin reservas los principios que más tarde habrían de conocerse como Principios de Contradicción y Tercio Excluso. Ambos se hallan formulados en diversos pasajes de su *Metafísica*, incluido el que encierra las definiciones de verdad y falsedad antes citadas, y rezan como sigue:

«Los principios de la demostración... como, por ejemplo, que es necesario en cada caso afirmar o negar y que es imposible ser y no ser al mismo tiempo» [70].

«El más seguro de todos los primeros principios es que es imposible que una cosa pertenezca y no pertenezca a la misma cosa al mismo tiempo y en el mismo respecto» [71].

«No es posible que se dé algo entre los dos extremos de una contradicción, sino que es necesario afirmar o negar una cosa de otra cualquiera dada» [72].

El primero y tercero de estos pasajes nos ofrecen formulaciones alternativas de la ley de tercero excluido, en tanto que el primero y el segundo encierran versiones más o menos elaboradas de la ley de contradicción.

En el capítulo 9 del *De Interpretatione*, Aristóteles cuestiona en cambio el supuesto de que toda oración enunciativa ha de ser verdadera o falsa. Pudiera parecer que nuestro autor se hallaba ya inequívocamente comprometido en favor de tal tesis; mas de hecho no es así, puesto que al afirmar que la verdad o falsedad competen exclusivamente a las oraciones enunciativas, sus palabras podrían tomarse en el sentido de que sólo estas últimas admiten ser tenidas por verdaderas o falsas, no de que todas ellas hayan de ser necesariamente lo uno o lo otro. El principio de que todo enunciado [73] ha de ser verdadero o falso se conoce con el nombre de Principio de Bivalencia; y se le ha distinguido de la ley de tercero excluido [74], que generalmente se formula como «P o no-P», donde «P» representa el hueco o lugar vacío en el que ha de insertarse una oración enunciativa. Sobre la base, sin embargo, de las definiciones de verdad y falsedad antes citadas, los dos principios son equivalentes en un obvio sentido; pues, si «Es verdadero que P» es equivalente a «P» y «Es falso que P» es equivalente a «no-P», «P o no-P» equivaldrá sin más a «Es verdadero que P o es falso que P». La distinción, con todo, es importante, pues lo que Aristóteles parece estar haciendo en el capítulo es poner en tela de juicio el principio de bivalencia y aceptar al mismo tiempo la ley de tercero excluido. Por lo demás, tal proceder no es sorprendente si se piensa que su enfoque del problema capital del *De Interpretatione* pasa por la elaboración de la noción de par contradictorio (ἀντίφασις). Este último se define como una pareja de enunciados en los que respectivamente se afirma y niega algo de una misma cosa [75]. No es obvio que, en tal caso,

70 Ibid. *B*, 2 (996b26-30).
71 Ibid. *Γ*, 3 (1005b19-23).
72 Ibid. *Γ*, 7 (1011b23-24).
73 Nos servimos aquí del término "enunciado" en virtud de su conveniente ambigüedad, que le permite oscilar entre la noción de oración enunciativa y una otra noción que se explicitará más adelante.
74 Así lo ha hecho J. Lukasiewicz, en apéndice a sus "Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls", *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des lettres de Varsovie*, 1930, y en su *Aristotle's Syllogistic*, p. 82.
75 *De Interpretatione*, 6 (17a34).

uno de dichos enunciados haya de ser verdadero y el otro falso. Aristóteles cree encontrar una excepción a aquella regla en el caso de los enunciados indefinidos, pues —nos dice— «El hombre es blanco» y «El hombre no es blanco» son ambos verdaderos [76]. No resultaba para él inconcebible, por lo tanto, que los enunciados acerca del futuro constituyesen una nueva excepción, si bien de diferente índole.

En realidad, Aristóteles se dejó sumir en la perplejidad por un argumento que podría pergeñarse como sigue. De acuerdo con la ley de tercero excluido, podemos decir hoy:

(1) Habrá mañana una batalla naval o no habrá mañana una batalla naval,

lo que parece equivaler a la aserción:

(2) El enunciado «Habrá mañana una batalla naval» es verdadero y su negación falsa o viceversa.

Pero también parece razonable decir:

(3) Si es verdad que mañana va a haber una batalla naval, es necesario en conexión con este hecho relativo al presente que mañana haya una batalla naval; y, de manera semejante, si es verdad ahora que mañana no va a haber una batalla naval, es necesario en conexión con este hecho relativo al presente que mañana no haya una batalla naval.

Por último, de las premisas (2) y (3) conjuntamente tomadas se sigue la conclusión:

(4) Lo que mañana haya de suceder se halla determinado en cualquier caso de antemano independientemente del curso de nuestras acciones, por lo que toda deliberación a este respecto sería inútil.

Hay indudablemente algo que funciona mal en este expeditivo alegato en pro del fatalismo, de modo que Aristóteles hizo bien en rechazarlo; pero en su solución de nuestro enredo hay cosas que no están del todo claras. Aristóteles parece admitir (1) y (3), así como la derivación de (4) a partir de la conjunción de (2) y (3), pero rechaza en cambio que (2) se siga de (1). Pues mientras asevera que «Necesariamente cada cosa es o no es, será o no será» [77], advierte sin embargo: «No es necesario que de la afirmación o la negación de cualesquiera dos enunciados opuestos la una sea verdadera y la otra falsa, pues en el caso de lo que existe potencialmente no rige exactamente la misma regla que se aplica a lo que existe de manera efectiva y actual» [78]. Estas observaciones parecen comportar la posibilidad de que la disyunción de un enunciado y su negación sea verdadera sin que lo sean ni ese enunciado ni su negación. Con otras palabras. Aristóteles está tratando aquí de hacer valer la ley de tercero excluido al tiempo que rechaza el principio de bivalencia. Nos-

76 Ibid. 7 (17b30).
77 Ibid. 9 (19a27-30).
78 Ibid. 9 (19a39-19b4).

otros ya hemos visto que se trata de un intento descaminado, y el hecho de que Aristóteles lo emprenda resulta especialmente sorprendente en un capítulo donde él mismo nos ha facilitado una caracterización de la verdad y la falsedad que revela la fuente del error [79]. Pero el caso es que en la antigüedad se hallaba, al parecer, muy extendida la idea de una estrecha conexión entre el principio de bivalencia y el determinismo. Los estoicos, que eran deterministas, fueron ardientes defensores del principio, en tanto que Epicuro juzgaba que lo había de sacrificar en aras de la doctrina del libre albedrío [80]. Aunque Aristóteles no afirma expresamente tal cosa, pudiera ser que por su época circulasen ya algunas objeciones sofísticas a la deliberación, de cuño semejante a las que los filósofos discutirían más tarde bajo el rótulo de «argumento perezoso» (ὁ ἀργὸς λόγος) [81].

Lo que funciona mal en el argumento en pro del fatalismo antes expuesto no es (2) sino (3), así como la transición de (3) a (4). El error surge de una confusión acerca de la naturaleza de la verdad y la falsedad. Nosotros ya hemos visto, al discutir las opiniones de Platón, que hay una natural tendencia a suponer que los predicados «verdadero» y «falso» se pueden aplicar con propiedad a las oraciones o complejos verbales, esto es, a los λόγοι, para servirnos de la terminología platónica seguida por Aristóteles. Dicha tendencia brota espontáneamente del lenguaje, pues nosotros acostumbramos a afirmar que lo que la gente dice es verdad o no lo es; y lo que la gente dice (en un obvio sentido de «decir») son oraciones. Este modo de hablar y de pensar consagra giros tales como «convertirse en verdad al cabo del tiempo», «seguir siendo verdad por tanto o cuanto tiempo» o «ser verdad en un instante dado pero no serlo, en cambio, en otro». Pues si consideramos una oración como «Estoy sentado junto a la estufa», es posible que en un instante dado nos sintamos tentados de declararla verdadera en ese instante, pero no así hace un momento (en que me hallaba fuera de la habitación) ni tampoco dentro de un rato (en que saldré de nuevo de la misma). Aristóteles mismo repara en ese uso de los términos y hasta lo adopta expresamente alguna vez en otra parte [82].

Una somera reflexión demuestra que esta caracterización de la oración como el lugar propio de la verdad y la falsedad, esto es, como aquello de lo que propiamente se predican «verdadero» y «falso», es insatisfactoria. Dos personas podrían proferir al mismo tiempo la oración antes citada, la una diciendo la verdad y la otra no. Este hecho planteó ya dificultades al autor de los δίσσοι λόγοι. No es la oración o la formulación verbal lo que resulta verdadero o falso, sino lo expresado por aquélla. El vocablo «proposición» ha sido empleado con frecuencia en los tiempos modernos para aludir a esto que una oración o frase expresa; y, en líneas generales, es el más adecuado a tal efecto. Pero, en orden a evitar toda posible confusión, es menester que distingamos claramente unas de otras un cierto número de nociones relacionadas entre sí.

---

79 Ibid. 9 (18a39-18b2).
80 Cicerón, *De Fato*, 21 y 37.
81 Seguimos aquí la interpretación acostumbrada de este capítulo, tal y como se nos ofrece, por ejemplo, en Boecio (*Commentarii in Librum Aristotelis Περὶ Ἑρμηνείας, Secunda Editio*, ed. Meiser, pp. 248-9). Dicha interpretación fue rechazada por Abelardo (*Dialectica*, p. 221) y ha sido recientemente atacada por G. E. M. Anscombe en *Mind*, LXV (1956), pp. 1-15.
82 *Cat.* 5 (4a23).

(1) Una *oración-caso* (*token-sentence*) * es una frase en el sentido en que nos es dado decir «Su voz titubeó a mitad de la primera frase» o «La frase de la pizarra está mal escrita» [83]. Una oración en tal sentido consiste, así, en una concreta serie de sonidos o trazos que se dan en un determinado instante o a lo largo de un lapso determinado de tiempo.

(2) Una *oración-tipo* (*type-sentence*) * es una frase en el sentido en que podría decirse que una misma frase se da en una pluralidad de casos. Cuando los gramáticos hablan de oraciones, se refieren de ordinario a oraciones-tipos. Una oración en tal sentido consiste, así, en un complejo de sonidos o trazos dotados de significado. No se trata de los sonidos o los trazos con abstracción del hecho de poseer significado, pues no habríamos llamado oración a una sucesión de sonidos o trazos si por lo menos no hubiésemos creído que significaban algo. Pero tampoco se trata de un puro significado o contenido de la oración, abstracción hecha de toda concreta expresión suya oral o gráfica; pues, en rigor, no cabría hablar de una misma oración en diversas lenguas, sino tan sólo de oraciones de diversas lenguas que se corresponden entre sí.

(3) *Un enunciado en sentido gramatical* es una oración enunciativa o declarativa, donde por «oración» hay que entender una «oración-tipo». En este sentido se contradistinguen los enunciados respecto de los ruegos, interrogaciones, órdenes, etc., tal y como Aristóteles distinguía los ἀποφαντικοὶ λόγοι de todos los demás λόγοι.

(4) *Enunciar algo* es proferir una oración enunciativa con el propósito de hacer una aserción; y el significado de «enunciado» (el resultado de la acción de «enunciar») no es el mismo en este contexto que en el caso del sentido gramatical a que nos hemos referido hace un momento. Pues, como hemos visto, personas que profieren la misma oración enunciativa no están aseverando necesariamente lo mismo, y una persona podría hacer diferentes aserciones profiriendo la misma oración enunciativa en ocasiones diversas, por ejemplo pronunciando en días diferentes la frase «Hoy estoy sentado delante de la estufa». Inversamente, una persona puede proferir dos diferentes oraciones enunciativas en instantes diversos y aseverar lo mismo por dos veces mediante ellas, por ejemplo diciendo en días consecutivos «Estoy sentado hoy junto a la estufa» y «Estuve ayer sentado junto a la estufa». Más aún, ni tan siquiera es el caso de que el que expresa oral o gráficamente una oración enunciativa esté enunciando invariablemente algo. Representar en el escenario, cultivar la literatura de ficción o simplemente citar los enunciados de otras personas constituyen excepciones bien obvias. Y todavía habría que reparar en que cuando formulamos un enunciado complejo (por ejemplo, un condicional), no estamos formulando el mismo número de enunciados que si considerásemos como oraciones completas a las diversas cláusulas enunciativas que lo integran.

---

* La distinción entre *token-word* y *type-word* —debida, según se indica en la nota 83 de los autores, a C. S. Peirce— admitiría otras traducciones que la de "palabra-caso" y "palabra-tipo" adoptada por nosotros, como la muy extendida de "inscripción" o "signo suceso" y "forma" o "signo figura" (inspirada directamente en la paralela distinción de R. Carnap entre *sign-event* y *sign-design*). Pero el empleo de los vocablos "caso" y "tipo" se adecúa particularmente bien, cualesquiera que puedan ser los méritos de aquella traducción alternativa, al propósito de expresar la relación existente entre un individuo (una frase concreta, oral o gráfica) y la especie que ese individuo ejemplifica (la frase, por así decirlo, específica de la que la primera constituye una muestra). *(N. del T.)*

83 Cf. la distinción de C. S. Peirce entre "palabra-caso" (token-word) y "palabra-tipo" (type-word) en *Collected Papers*, IV, § 537.

Así, cuando alguien dice «Si Carlos hubiera tomado parte en la carrera, entonces Jaime no habría llegado el último» no está enunciando que Carlos haya tomado parte en la carrera ni que Jaime no haya llegado el último, por más que cada una de ambas cláusulas exprese ciertamente algo por separado.

(5) Una *proposición* o *contenido proposicional* es aquello que se asevera cuando se lleva a cabo una enunciación o simplemente aquello que se expresa, sin hacerlo objeto de aserción, por medio de una cláusula subordinada como las que se acaban de considerar. Resulta claro que es a las proposiciones a las que fundamentalmente se aplican los predicados «verdadero» y «falso», pues para que dichas palabras tengan aplicación no es necesario haber antes escrito o pronunciado ninguna oración ni tan siquiera haber llevado a cabo previamente enunciación alguna. Lo que se expresa, por ejemplo, por medio de la prótasis o la apódosis de un enunciado condicional podría ser correctamente reputado de verdadero o falso. La noción de proposición ha dado origen a un cierto número de dificultades filosóficas de las que se hablará más adelante, pero por el momento no caben serias dudas que oponer a las particularidades reseñadas hasta aquí. Las oraciones completas y las cláusulas que expresan proposiciones podrían ser descritas por igual como signos proposicionales. *Propositio* se usó en latín medieval con ese sentido de «signo proposicional», sentido que retuvo en ocasiones la voz «proposición» en las antiguas lenguas romances y sus derivados; pero, en su empleo moderno, el término se hace equivaler a «contenido proposicional».

(6) La *designación de una proposición* es una cláusula completiva, esto es, precedida de la partícula completiva «que» o algún equivalente lingüístico de la misma. Al lógico han de serle permitidos estos recursos lingüísticos si su misión es ocuparse de proposiciones, cosa que evidentemente no tiene más remedio que hacer en orden a elucidar la noción de validez. En las modernas lenguas europeas se acude a veces al entrecomillado con el fin de distinguir la proposición expresada mediante la oración enunciativa que encierran las comillas, como en el caso por ejemplo de «Fulano dijo 'No le había oído a usted', lo cual era bastante cierto». Este uso del entrecomillado se ha de distinguir de su uso con destino a la designación de una oración-tipo, como en el caso por ejemplo de «Fulano dijo 'No l'abía uíu a ozté', cosa que ella no logró entender». La distinción entre ambos casos podría ponerse en claro haciendo ver que, al traducir a otro idioma la primera frase, podemos traducir la porción entrecomillada de la misma sin alterar el sentido, ni afectar a la intención, de la frase en su totalidad, cosa que en cambio no es posible hacer con el fragmento entre comillas de la segunda.

Una vez precisadas estas distinciones, estamos ahora en situación de localizar con exactitud el punto en que Aristóteles se equivocó en el *De Interpretatione*. El fallo de su argumentación en el capítulo 9 estriba en considerar a los predicados «verdadero» y «falso» como aplicables a algo (probablemente una oración) en un instante determinado, esto es, con un alcance estrictamente temporal. Lo que sin duda le debió despistar es el hecho de que podamos decir «Es *ahora* verdad que habrá mañana una batalla naval». Pero el «ahora» es superfluo en nuestro caso. A primera vista, el aserto, que el propio Aristóteles hace suyo en la *Metafísica*, de

que «alguien dice la verdad cuando afirma de lo que es que es y de lo que no es que no es» pudiera parecernos escasamente informativo. Pero es precisamente esa formulación de la definición aristotélica lo que la ha acreditado ante los lógicos posteriores deseosos de evitar innecesarias complicaciones metafísicas en relación con el problema de la verdad. Hay que decir que dicho crédito se halla, en rigor, justificado; pues la definición aristotélica contribuye a ponernos de relieve un hecho decisivo a propósito del predicado «verdadero», a saber, que la proposición de que-P y la proposición de que es verdad que-P —donde «P» representa cualquier signo proposicional— se implican mutuamente. Lo mismo rige para el caso de que el signo proposicional sea una oración en tiempo de futuro. Pues es verdad que habrá mañana una batalla naval si, y sólo si, habrá mañana una batalla naval. Y la introducción de la cláusula «es verdad que» en nada robustece ninguna presuposición determinista más de lo que lo pueda hacer nuestro uso de la simple oración en tiempo de futuro. Cuando hablemos, como Aristóteles lo hace, de que es verdad *ahora* que habrá mañana una batalla naval, corremos, sin embargo, el riesgo de extraviarnos, pues ello nos induce a suponer que nuestra afirmación no será verdadera ya mañana por la tarde, cuando haya concluido la batalla, sino que en su lugar habrá de serlo alguna otra afirmación de nuevo cuño, como por ejemplo «Hoy ha habido una batalla naval». Es evidente, desde luego, que en este caso entran en juego dos *oraciones* diferentes, pero ambas expresan una misma *proposición* en la medida en que, si no acertásemos al proferir la primera afirmación, tampoco acertaríamos al proferir la segunda en el instante adecuado.

El empleo de tiempos verbales en una lengua es un recurso del que nos servimos para indicar la relación temporal de nuestras oraciones habladas o escritas (a saber, oraciones-casos) con los sucesos acerca de los cuales hablamos o escribimos. Un verbo con indicación de tiempo es, por lo tanto, como los demostrativos, una palabra-caso de carácter reflexivo (*a «token-reflexive» word*), esto es, una palabra que en cada una de las ocasiones de su uso localiza al objeto del discurso por relación al caso de sí misma que en aquel momento se escribe o se pronuncia [84]. Así, «Fulano paseaba» indica que la acción de pasear tenía lugar antes de que se profiriese la oración, mientras que «Fulano pasea» indica que la acción de pasear tiene lugar en el instante de proferirse la oración, etcétera. Los tiempos verbales, o recursos similares, resultan por lo tanto indispensables para una adecuada expresión de las proposiciones singulares, esto es, aquellas que se refieren a sucesos únicos y por ende irrepetibles; pues cualquier procedimiento alternativo del que nos deseásemos servir para fecharlos tendría que ser explicitado por referencia a la fecha de proferencia de la locución (*utterance*) por medio de la cual lo hayamos introducido.

La cláusula «ser verdad» se usa en todos los tiempos (pasado, presente y futuro) y las reglas que gobiernan su combinacion con los tiempos de la cláusula subordinada son relativamente complicados. Así tenemos, por ejemplo, «Era verdad que habría una batalla naval», «Es verdad que ha habido una batalla naval» y «Es verdad que habrá una batalla naval». Lo importante en todos estos casos es reparar en que la cláusula «ser (es, era) verdad» se puede eliminar de suerte de que la oración restante exprese

[84] Cf. H. Reichenbach, *Elements of Symbolic Logic*, p. 284.

una proposición que implique, y sea implicada por, la preposición expresada por la oración originaria. Así, la primera de las oraciones que acaban de citarse podría ser reemplazada por «Hay una batalla naval» o «Hubo una batalla naval», según las circunstancias; la segunda, por «Ha habido una batalla naval»; la tercera, por «Habrá una batalla naval». El empleo apropiado de «es verdad» o «era verdad» vendría determinado en cada caso por condiciones otras que la verdad de la proposición designada mediante la cláusula completiva «que». En sí mismas, aquellas expresiones no añaden ninguna información a la facilitada por las oraciones a las que respectivamente preceden. Y, en consecuencia, «Es verdad que habrá una batalla naval» no comporta otras connotaciones temporales, en especial por lo que se refiere al momento de ser proferida dicha frase, que las que pueda comportar la frase «Habrá una batalla naval». En resumen, de semejante forma de expresión no cabe extraer ninguna clase de argumentos en pro del determinismo, lo que libera finalmente a Aristóteles de la obligación de ver en ella una excepción al principio de bivalencia.

Tras de haber distinguido entre oraciones y proposiciones, estamos asimismo en situación de comprender por qué es innecesario que Aristóteles excluya los ruegos, interrogaciones, órdenes, etc., de su consideración por parte de la lógica. Las expresiones lingüísticas de los mismos (oraciones optativas, interrogativas, imperativas, etc.) no son, efectivamente, enunciados en nuestro primer sentido del término, ni tampoco nos servimos de tales locuciones para enunciar nada en el segundo sentido de «enunciado» antes descrito. Pero no hay posibilidad de formular un ruego, una interrogación, una orden, etc., sin expresar una proposición, proposición que habrá de ser verdadera o falsa. Así, en la orden «Cierre la puerta» se expresa la proposición de que la puerta va a ser cerrada; y esa proposición es susceptible de verdad o falsedad según que la puerta se cierre efectivamente o no. Tal circunstancia explica el hecho, por lo demás bastante obvio cuando se reflexiona un poco sobre ello, de que las órdenes pueden hallarse lógicamente relacionadas entre sí, así como adoptar una diversidad de formas lógicas. Si, por ejemplo, una persona ordena «Cierre la puerta» y una segunda «No la cierre», dirigiéndose ambas sucesivamente al mismo interlocutor, sus respectivas órdenes se contradicen la una a la otra. De modo semejante, podrían darse ruegos condicionales, como «Venga Vd., por favor, si hace buen tiempo», o interrogaciones existenciales, como «¿Hay habitantes en Marte?», no menos que oraciones enunciativas de todos esos tipos.

Los enunciados, órdenes, ruegos, etc., se distinguen entre sí por sus diferentes cometidos en la vida social. La función de los enunciados consiste principalmente, aunque no con exclusividad, en transmitir información; la de las órdenes y ruegos, en inducir a los demás a hacer esto o lo otro, etc. En conexión con esta asignación de cometidos a tales locuciones de uno u otro género se halla el hecho de que una de esas locuciones no sólo expresa una proposición, sino asimismo manifiesta o patentiza una cierta actitud hacia la proposición expresada. Cuando enunciamos algo manifestamos nuestra creencia en la proposición expresada, cuando ordenamos algo manifestamos nuestro deseo de que la proposición expresada sea verdadera, etc. Por lo demás, podemos ser insinceros en nuestra manifestación de todas esas actitudes. Al manifestar insinceramente una creencia,

se dice que mentimos; pero la noción de mentir no alcanza a las restantes formas de locución, con la dudosa salvedad de las promesas. Es justamente porque la función primordial de los enunciados es la de transmitir información, esto es, inducir a otros a aceptar como verdadera una proposición, por lo que son evaluados ante todo como verdaderos o falsos, en tanto que las órdenes lo son como adecuadas o inadecuadas y no sólo por relación a si se cumplen o se dejan de cumplir. De ahí la usual caracterización de los enunciados, en nuestros dos sentidos antedichos, como si fuesen las únicas locuciones susceptibles de verdad o falsedad.

Es conveniente enumerar, en fin, los diferentes usos de «verdadero» y «falso» a este respecto, explicando de paso cómo se relacionan entre sí:

(1) Las proposiciones son verdaderas o falsas en la acepción más básica de dichos predicados.

(2) Las oraciones-casos son verdaderas cuando expresan proposiciones verdaderas.

(3) Las oraciones-tipo de la variedad enunciativa son verdaderas cuando expresan proposiciones verdaderas; pero sucede que una oración-tipo que contenga una oración-caso de carácter reflexivo puede expresar en un momento y en un contexto dados una proposición verdadera, mientras que en otro momento y otro contexto puede expresar una proposición falsa. Es esta circunstancia, justamente, la que conduce a las dificultades de los διασοὶ λόγοι así como a las del capítulo 9 del *De Interpretatione*. Habría que hacer notar también que una oración-tipo que contenga una oración-caso de carácter reflexivo tomada fuera de contexto no expresaría proposición alguna, ni cabría decir de ella por lo tanto que fuese verdadera o falsa. Así sucede, por ejemplo, con la oración «Habrá mañana una batalla naval» tal y como nos hemos servido de ella en este capítulo, donde desempeñaba un cometido puramente ilustrativo sin expresar en ningún caso una proposición. Las oraciones comprendidas en este tercer apartado —oraciones-tipo que contienen una oración de carácter reflexivo entre sus casos— son confundentes porque incitan a decir de ellas que «se han convertido en verdaderas», que «siguen siendo verdaderas» o que «han dejado de ser verdaderas». Por ejemplo, «El monarca reinante en Inglaterra es una reina» ha sido una oración verdadera en diversas ocasiones del pasado, lo es en la actualidad y cesará de serlo un día. Correctamente interpretado, lo que sucede es que en ciertas ocasiones la situación es tal que la oración expresa una proposición verdadera.

(4) Una persona enuncia algo con verdad o da lugar a un enunciado verdadero cuando profiere una oración enunciativa que expresa una proposición verdadera. No es necesario a estos efectos que esa persona sea sincera, pues es posible formular un enunciado verdadero por error, creyendo uno mismo estar mintiendo.

(5) Las creencias, pensamientos y opiniones son verdaderas cuando sus expresiones son expresiones de proposiciones verdaderas.

De nuestra precedente caracterización se desprende que Aristóteles cometió dos errores en el *De Interpretatione*. En primer lugar, la confusión entre oración enunciativa y enunciado, por un lado, y proposición, por

otro, le condujo a una inoportuna disquisición en conexión con el problema del determinismo y, como consecuencia, a una innecesaria limitación del principio de bivalencia. En segundo lugar, el hecho de confinar su atención a las oraciones enunciativas o declarativas le llevó a sugerir, equivocadamente, que no se pueden dar relaciones lógicas entre otros géneros de locuciones. Ambos errores revisten una considerable trascendencia filosófica, mas por fortuna no son demasiado importantes desde un punto de vista estrictamente lógico. En el caso concreto de Aristóteles, el primero de ellos no tuvo ninguna repercusión de índole lógica porque, como ya vimos en los *Tópicos*, su interés se concentraba esencialmente en los enunciados generales. Las dificultades relativas a los tiempos verbales y las palabras-casos de carácter reflexivo no se plantean respecto de los enunciados generales de la ciencia que, si expresan proposiciones verdaderas, lo hacen así de una vez por todas, esto es, expresan siempre proposiciones verdaderas con la única condición de que el significado de los símbolos que los integran no experimente variación. De ahí que el error del capítulo 9 del *De Interpretatione* no haya entrañado graves consecuencias para su lógica, tal y como Aristóteles la desarrolla en otros apartados del *De Interpretatione* y en los *Primeros Analíticos*. En cuanto a su segundo error, tampoco las ha entrañado, puesto que la lógica se ocupa de estudiar las relaciones entre proposiciones y —una vez llevado a cabo dicho estudio— nada hay que impida extender sus conclusiones a otros géneros de oraciones que los enunciados.

5. Las cuatro formas del enunciado general.

Aristóteles se ocupa en el *De Interpretatione* de agrupar enunciados por parejas tales que el segundo miembro de las mismas constituya la negación del primer miembro. Por regla general, pero no siempre, uno de dichos enunciados es el contradictorio del otro, de suerte que si el primero es verdadero el segundo sea falso. Dejando a un lado el discutido caso de los enunciados relativos al futuro, la obvia excepción a aquella regla la constituyen los enunciados cuantitativamente indefinidos o indeterminados, como por ejemplo «El hombre es blanco». No hay otra forma de negar este enunciado que mediante el enunciado «El hombre no es blanco»; pero, como Aristóteles apunta, nuestros dos enunciados pueden ser ambos verdaderos [85]. El enunciado indefinido, por lo demás, queda ahora fuera de consideración desde el punto de vista lógico. En los *Primeros Analíticos*, Aristóteles estipula que, para los propósitos de la silogística, resulte equivalente a un enunciado particular [86]; esto es, lo trata, según la doctrina prefigurada ya en los *Tópicos* [87], como la disyunción de un enunciado universal y otro particular, equivalente por ello a este último en cuanto a su potencia inferencial. Tendríamos de este modo alguna justificación para tratarlo como un enunciado existencial.

Prescindiendo del enunciado indefinido, Aristóteles reconoce tres formas de enunciados en que se afirma un predicado de un sujeto: el enunciado singular, el enunciado universal y el enunciado particular. En un enunciado singular, el término que oficia de sujeto es el nombre de un individuo que

85 *De Interpretatione*, 7 (17b30).
86 *An. Pr.* I, 7 (29a27).
87 *Topica*, III, 6 (120a15-17).

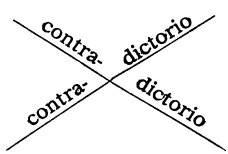
no puede ser él mismo predicado de ninguna otra cosa, por ejemplo «Callias». En un enunciado general, por el contrario, el término que oficia de sujeto se dice que es el símbolo de un género de cosas, por ejemplo «hombre», y como tal se puede predicar de una pluralidad de individuos. Dentro ahora ya de semejantes enunciados relativos a géneros, cabe aún la posibilidad de distinguirlos según que sean o no de alcance universal. Así, «Todo hombre es blanco» es un enunciado universal, puesto que versa acerca de todos los seres humanos, y esa circunstancia lo distingue del enunciado particular «Algún hombre es blanco». El apartado más importante e influyente de la teoría es, justamente, el que se ocupa de la oposición entre enunciados universales y particulares.

La combinación de esta distinción entre enunciados universales y particulares con la que existe entre enunciados afirmativos y negativos arroja una cuádruple clasificación de los enunciados generales de acuerdo con el siguiente esquema, en el que cada tipo de enunciado viene ilustrado por el correspondiente ejemplo de Aristóteles:

Universal afirmativo (*A*)
Todo hombre es blanco

Universal negativo (*E*)
Ningún hombre es blanco

contrario



Particular afirmativo (*I*)
Algún hombre es blanco

Particular negativo (*O*)
Algún hombre no es blanco

Para facilitar las referencias se han añadido a nuestro cuadro las vocales con que los cuatro tipos de enunciados se conocen desde la Edad Media, por más que desde luego no figuren en la presentación aristotélica. La figura, que comúnmente se conoce como el cuadrado de la oposición, tampoco se encuentra en el texto de Aristóteles, pero nos proporciona un buen resumen de su doctrina. De acuerdo con sus explicaciones, dos enunciados se oponen entre sí como *contradictorios* (ἀντιφατικῶς) cuando no pueden ser ambos verdaderos ni ambos falsos, mas lo hacen sólo como *contrarios* (ἐναντίως) [88] cuando no pueden ser ambos verdaderos pero sí los dos falsos. En ocasiones, Aristóteles ejemplifica el enunciado particular negativo por medio de la forma «No todo hombre es blanco» [89], lo que evidencia que ha de ser considerado como la simple negación del enunciado universal afirmativo. Los dos enunciados particulares han sido llamados por los lógicos posteriores *subalternos* de los universales correspondientes, bajo los cuales aparecen en el gráfico, y *subcontrarios* entre sí. Aunque Aristóteles no emplea estas expresiones, se halla interesado en las relaciones que se acaban de describir. Supone que los enunciados subcontrarios no pueden ser ambos falsos, aunque podrían ser ambos verdaderos, lo que

88 *De Int.* 7 (17b16-25).
89 Ibid. 8 (18a5).

parece desprenderse de su descripción de los mismos como contradictorios de enunciados contrarios. Asimismo supone que cada enunciado universal implica su subalterno. Consideremos ahora con detalle el contenido de su teoría de la oposición.

La necesidad de distinguir entre contrariedad y contradictoriedad de los enunciados generales revela en estos últimos una complejidad lógica incomparablemente superior a la de los enunciados singulares. Aunque «Todo hombre es blanco» y «Algún hombre es blanco» son gramaticalmente semejantes en algunos aspectos a «Sócrates es blanco» y «Platón es blanco», «todo hombre» y «algún hombre» no son símbolos del mismo género que «Sócrates» y «Platón». Es decir, si sustituyésemos «Sócrates» en «Sócrates es blanco» por una de esas expresiones, la oración resultante de esa sustitución diferiría de la oración originaria en una medida en la que no lo hace la oración «Platón es blanco». Tales diferencias se pasan por alto cuando, sin más cualificaciones, se dice que los enunciados generales revisten la misma forma sujeto-predicativa que los enunciados singulares. De ahí que recientemente se hayan hecho algunos intentos por reformular la doctrina aristotélica, tratando de exhibir más claramente la complejidad de las proposiciones generales.

Estos intentos parten usualmente de la observación de que los enunciados particulares, ya sean afirmativos o negativos, constituyen aserciones existenciales. En lugar de «Algún hombre es blanco» escribiremos, pues, «Existe algo que es a la vez hombre y blanco» o, para abreviar, «!(H&B)»; y, en lugar de «Algún hombre no es blanco», escribiremos la correspondiente fórmula «!(H&$\bar{B}$)», donde la raya horizontal se emplea para indicar la negación de la expresión sobre la que interviene. A continuación, y tomando el enunciado universal afirmativo como contradictorio del particular negativo y el enunciado universal negativo como contradictorio del particular afirmativo, obtendremos el esquema siguiente de la oposición entre enunciados generales:

Universal afirmativo	*Universal negativo*
$\overline{!(H\&\bar{B})}$	$\overline{!(H\&B)}$
Particular afirmativo	*Particular negativo*
$!(H\&B)$	$!(H\&\bar{B})$

Este procedimiento de simbolización tiene el mérito de poner de relieve dos particularidades de notable interés.

En primer lugar, los enunciados universal y particular negativos sólo se agrupan conjuntamente como negativos por contener cada uno de ellos alguna clase de partícula negativa, pero sería un error considerarlos como negativos en el mismo sentido que «Sócrates no es blanco». En una oración como «Algún hombre no es blanco», la palabra «no» ha de entenderse como formando cuerpo con la palabra «blanco». Por medio del recurso conocido con el nombre de *obversión*, podemos, si lo deseamos, transcribir la oración como «Algún hombre es no-blanco», transcripción que revelaría que aquella última no es menos afirmativa que la oración «Algún hombre es blanco». De modo semejante, «Ningún hombre es

blanco» podría ser reemplazada, sin alterar por ello su sentido, por «Todo hombre es no-blanco», a la que correspondería el mismo estatuto que «Todo hombre es blanco». Aristóteles no desconoció estas particularidades del empleo de términos privativos, concediendo que «Todo hombre es no- blanco» podría implicar «Ningún hombre es blanco» [90], mas rechazando en cambio la implicación conversa, requerida para que pueda hablarse de obversión, sobre la base de que «es no-blanco» resulta interpretable en un sentido más restringido que «no es blanco» [91]. Es cierto, desde luego, que los términos privativos tales como «injusto» tienden a adquirir por sí propios un sentido positivo que los hace contrarios, más bien que contradictorios, de los términos positivos a partir de los cuales se construyen; pero no es necesario preocuparnos por ello en este contexto, ya que el propósito de nuestra construcción no es crear nuevas expresiones para el uso ordinario sino tan sólo esclarecer su relevancia lógica.

En segundo lugar, los enunciados particular afirmativo y universal negativo resultan *convertibles* sin que se altere su sentido. Esto es, «Algún hombre es blanco» es estrictamente equivalente a «Alguna cosa blanca es un hombre», y «Ningún hombre es blanco» lo es a «Ninguna cosa blanca es un hombre». En nuestra simbolización de ambas formas de enunciado, tal circunstancia se refleja en el hecho de que «H» y «B» juegan papeles exactamente similares, con la única diferencia de que el uno aparece antes y el otro después del signo de conjunción. Los enunciados universal afirmativo y particular negativo, por su parte, no pueden convertirse, ya que sus términos —como se deja ver por la distribución de los signos de negación en nuestro simbolismo— juegan papeles diferentes. En el pasaje en que se ocupa de la conversión [92], Aristóteles repara en que se da una diferencia entre los términos, pero mantiene que el enunciado universal afirmativo es parcialmente convertible, esto es, que podemos pasar de «Todo placer es bueno» a «Alguna cosa buena es un placer». Esta doctrina se halla en evidente conexión con el supuesto de que los enunciados universales implican sus subalternos. Pues si es posible pasar de «Todo placer es bueno» a «Algún placer es bueno», podremos ciertamente pasar de ahí a «Alguna cosa buena es un placer». Pero queda aún por ver si esa inferencia por subalternación resulta válida dentro de nuestro esquema.

Al llegar a este punto tropezamos con una dificultad. Si los enunciados universales no comportan sino lo que hemos estipulado en nuestra nueva versión de los mismos, sería indudablemente incorrecta la transición del enunciado universal al enunciado particular correspondiente; pues la existencia de una cosa de un cierto género no se sigue de la inexistencia de cosas de otro género. Y no es éste el único punto en el que nuestro nuevo esquema difiere del aristotélico. Desde un punto de vista estrictamente lógico, es muy posible que «$!(\overline{H\&B})$» y «$!(H\&\overline{B})$» expresen por igual proposiciones verdaderas y, de manera semejante, que «$!(H\&B)$» y «$!(H\&\overline{B})$» expresen por igual proposiciones falsas. Si admitimos que los enunciados de la fila superior de nuestro cuadro guardan entre sí la relación aristotélica de contrariedad y que los enunciados de la fila inferior guardan la relación correspondiente de subcontrariedad, ello es sólo porque damos

90 Ibid. 10 (20a20).
91 *An. Pr.* I, 46 (51b8).
92 Ibid. I, 2 (25a5).

por supuesto que existen hombres, lo cual no es más que un hecho contingente. Se ha insinuado, en consecuencia, que para Aristóteles, y lo mismo quizá para el común usuario de un lenguaje natural, los enunciados universales poseen siempre un *alcance existencial* (*existential import*), lo que podría expresarse en nuestro nuevo simbolismo transcribiendo el afirmativo mediante «!(H&$\overline{B}$)&!H» y el negativo mediante «$\overline{!(H\&B)}$&!H». No tendría en cambio objeto, por descontado, añadir «!H» a la expresión de un enunciado particular, puesto que la aserción de que existe un hombre que es blanco, o no-blanco según los casos, envuelve ya la aserción de la existencia de un hombre. Esta interpretación tiene el mérito de proveer de alguna justificación al tratamiento aristotélico de la subalternación y la contrariedad, pero en cambio no coincide enteramente con su caracterización de la oposición contradictoria. Pues, en efecto, la negación estricta de «$\overline{!(H\&\overline{B})}$ &!H» no es «!(H&$\overline{B}$)», sino más bien la disyunción de esta expresión y de «!H». Y, recíprocamente, tampoco de la falsedad de la proposición expresada por «!(H&$\overline{B}$)» puede inferirse la verdad de la proposición expresada por «!(H&$\overline{B}$)&!H». ¿Habremos de acusar, pues, de inconsistente a la doctrina aristotélica y rechazar aquella parte de la misma que presupone el alcance existencial de los enunciados universales?

El sistema de relaciones entre enunciados propuesto por Aristóteles ha sido aceptado sin rechistar durante siglos por los miles de estudiosos de su obra. Es muy probable, por lo tanto, que esa obra constituya un fiel reflejo de nuestro uso normal de aquellas oraciones en las que entran en juego las palabras «todo» y «algún» o sus equivalentes. Y hasta sería posible encontrar alguna fácil justificación del conjunto de su doctrina, justificación que se acomode a nuestro análisis de los enunciados generales en términos de existencia o inexistencia, si diésemos por sentado que Aristóteles únicamente se ocupaba de términos cuya aplicación se halla garantizada. Si confinamos exclusivamente nuestra atención a lo que se explicita en nuestro simbolismo, no nos será posible mantener que la proposición expresada por «$\overline{!(H\&\overline{B})}$» implique la expresada por «!(H&B)» y excluya la expresada por «$\overline{!(H\&B)}$»; pero la aserción de tales relaciones resultaría, en cambio, enteramente apropiada *bajo la condición tácitamente presupuesta de que haya al menos un hombre*. Si, tras de prestar oídos a la conversación de la Sra. López, una de sus interlocutoras afirmase que la Sra. Rodríguez es una mujer sensata mientras que otra sostuviese que no lo es, una tercera persona que asimismo creyese en la existencia de la Sra. Rodríguez podría decir que esos dos juicios se contradicen entre sí. Pero si se llegase a establecer que la Sra. Rodríguez no existe, no tendría objeto ya continuar hablando de la posible relación entre dichos dos juicios, puesto que ambos descansan en la presuposición de su existencia y dejan de ser útiles para cualquier propósito tan pronto se abandone tal presuposición. Pero esto no equivale ni a decir que aquellos juicios sean compatibles entre sí ni a sostener que la aserción de la existencia de la Sra. Rodríguez se halle implícita en el significado de los mismos. De la misma manera, también un cierto uso de un término general podría basarse en la presuposición de que existe algo que responde por dicho término, por más que el uso en cuestión no comporte ninguna clase de aserción existencial. Nuestros dos casos, desde luego, no son exactamente paralelos, puesto que la presupo-

sición de que un término general no carece de aplicación no se puede identificar con la intención de referirse a un individuo o a una serie de individuos, pero la analogía es lo suficientemente estrecha como para servir de alguna ayuda en el intento de explicarnos el cuadrado de la oposición.

Cuando por vez primera se cayó en la cuenta de las dificultades de la teoría aristotélica de la oposición, la atención se concentró principalmente en la cuestión de si cabía decir con propiedad que los enunciados generales implicasen sus subalternos, introduciéndose la noción de alcance existencial como algo especialmente requerido para la comprensión de los enunciados universales dentro del esquema aristotélico. Pero no hay que pensar que todo se arregle considerando el modo como Aristóteles se sirvió de los enunciados de aquella forma. De no admitir tácitamente el supuesto de que existe al menos un hombre, no estaremos autorizados a aseverar con Aristóteles que uno u otro de los dos enunciados «Algún hombre es blanco» y «Algún hombre no es blanco» ha de ser verdadero. Y no basta tampoco con decir que, para los propósitos de Aristóteles, es suficiente suponer que los términos generales poseen aplicación cuando ofician de sujetos de enunciados. Pues la doctrina de Aristóteles comporta la admisión de la posibilidad de conversión simple de los enunciados particulares afirmativos y universales negativos, lo que implica que en tales casos será preciso suponer que los términos que ofician de predicado poseen aplicación en no menor medida que los que lo hacen de sujeto. En los enunciados particulares afirmativos, la satisfacción de este requisito es automática: si alguien asevera que algún hombre es blanco, se compromete con ello a la aserción de que hay al menos una cosa blanca. Pero cuando Aristóteles reclama el derecho de pasar de «Ningún hombre es blanco» a «Ninguna cosa blanca es un hombre» y de ahí, a su vez, a «Alguna cosa blanca no es un hombre», revela presuponer no sólo la existencia de por lo menos un hombre sino asimismo la existencia de por lo menos una cosa blanca, donde la segunda presuposición es independiente de la primera.

En orden a justificar la doctrina aristotélica en su integridad es necesario admitir, pues, que Aristóteles presupone la aplicación de *todos* los términos generales con que opera. Para un lógico moderno esto pudiera parecer una limitación harto chocante del dominio de la lógica. Pues no es nada difícil construir un enunciado general en el que al menos uno de los términos carezca de aplicación, como por ejemplo «Ningún matemático ha logrado la cuadratura del círculo»; y, una vez comprobado dicho extremo, resulta clara la ventaja de un sistema en que los postulados de existencia sólo intervengan de manera explícita. ¿Cómo pudo Aristóteles pasar esto por alto? La explicación acaso sea que Aristóteles estaba interesado, ya en este momento, en el proyecto de elaborar un sistema silogístico en el que cada término fuese capaz de ocupar tanto la posición de sujeto cuanto la de predicado de un enunciado. Los términos generales que ocupen la posición de sujeto han de ser nombres o cláusulas denominativas, y el alcance existencial (en el sentido de su presuposición implícita, en cuanto diferente de su explícita aserción) es poco menos que consustancial a dichos términos. Si tratamos de convertir el enunciado «Ningún matemático ha logrado la cuadratura del círculo», tendremos que empezar por reescribirlo de la forma «Ningún matemático es una persona que haya logrado la cuadratura del círculo», pasando de aquí luego a «Ninguna persona que

haya logrado la cuadratura del círculo es un matemático». Mas la última formulación sugiere ya, cosa que no hacía en cambio la primera, que alguien ha logrado la cuadratura del círculo. Tan fuerte es la sugestión de que los nombres no pueden carecer de aplicación o referencia que, cuando deseamos usar un nombre desproveyéndolo de alcance existencial, hemos de acudir a algún recurso que cancele la natural inclinación a concederle dicho alcance. A estos efectos, podría acudirse, por ejemplo, al empleo de la forma verbal condicional, como en la oración «Un dragón sería peligroso para tenerlo en casa», o al de otras expresiones que combinen la idea de condicionalidad con la de universalidad, como en la oración «Quienquiera que creyese poder cruzar a nado el Océano Atlántico estaría loco».

Quizás valga la pena hacer notar que las dificultades de la caracterización aristotélica de la oposición entre enunciados se ven innecesariamente agravadas, como ocurre en algunas modernas presentaciones de la doctrina, por el uso de ejemplos y de fórmulas en plural. Pues las oraciones «Todos los hombres son blancos» y «Algunos hombres son blancos» sugieren no sólo que la voz «hombre» tiene aplicación, sino que hay de hecho varios hombres. Tales ejemplos, en cualquier caso, no son normales en la obra de Aristóteles mismo.

El método de exposición de los *Primeros Analíticos* difiere en dos aspectos muy notables del *De Interpretatione*. En primer lugar, Aristóteles se sirve de letras como términos-variables, esto es, como signos que indican espacios a rellenar mediante cualesquiera términos generales que elijamos, bajo la sola condición de que los espacios indicados por la misma letra sean rellenados por el mismo término en todos y cada uno de los enunciados que entren en juego en una argumentación dada. Se trata de una importantísima e histórica innovación en la técnica de la lógica. Aparece por vez primera, sin más explicaciones, en el segundo capítulo de los *Primeros Analíticos* [93], que se ocupa de la conversión, y constituye por lo visto una invención aristotélica. En sus primeras obras, la generalidad viene expresada por el uso, un tanto desmañado, de pronombres, o mediante ejemplos que dejan entrever la irrelevancia de los casos concretos de que tratan. Ambos procedimientos son empleados tanto por Platón como por Aristóteles. Un ejemplo de dicho empleo por parte del primero es el siguiente, procedente de la *República*: «Cuando las cosas son por su naturaleza relativas a algo, entonces aquellas que son de un cierto género son relativas a algo de un cierto género» [94]. Este otro ejemplo es de Aristóteles y proviene del *De Interpretatione*: «La manera apropiada de negar la afirmación 'Todo hombre es blanco' es 'No todo hombre es blanco', la de negar la afirmación 'Algún hombre es blanco' es 'Ningún hombre es blanco'» [95]. El ejemplo de Platón sería prácticamente ininteligible sin las ilustraciones que éste añade a continuación; y, en cuanto al de Aristóteles, requiere del lector que no lo tome en su sentido literal, sabiendo hacerse cargo de que los términos «hombre» y «blanco» no hacen concretamente al caso para los fines perseguidos por el autor. En uno y otro ejemplo se habría ganado mucho en claridad y concisión mediante el uso de variables. Y para el enunciado de reglas lógicas más complicadas, como las silogísticas, dicho uso resulta poco menos que indispensable.

[93] Ibid. I, 2 (25a14).
[94] *Respublica*, 438 B.
[95] *De Int.* 7 (18a14).

Parece obligado preguntarnos si esta gran innovación de Aristóteles tuvo algún precedente en la práctica anterior. Un recurso que acaso se la hubiera podido sugerir es el empleo de letras para designar una línea en geometría. El propio Aristóteles estaba familiarizado con el mismo [96] y su origen podría hallarse en Eudoxo, pues lo encontramos en el libro V de los *Elementos* de Euclides, que se dice obra suya. Para los griegos era difícil servirse de letras como variables numéricas, puesto que ya las empleaban para designar numerales. Diofanto, cuya actividad se fija con toda probabilidad en el siglo III d. C., introdujo un signo especial para las incógnitas algebraicas y ésta parece haber sido la primera aparición de algo que se asemeje a una variable numérica en matemáticas.

En lugar de una simple variable, como por ejemplo «A», Aristóteles se sirve a veces de la cláusula «aquello a lo que A» (*ἐφ' ᾧ* A) o «aquello de lo que A» (*ἐφ' οὗ* A). Nosotros diríamos que se trata de una diferente convención en la que el símbolo «A» está siendo *mencionado*, más bien que *usado* a los efectos de reemplazar a un nombre substantivo o adjetivo corriente. Pero Aristóteles no parece consciente de la diferencia entre ambas convenciones, ya que pasa directamente de una a otra sin concederle mayor importancia [97].

La segunda innovación de los *Primeros Analíticos* es la casi total desaparición de la sencilla fórmula «B es A», en beneficio de fórmulas más complicadas como «A pertenece (*ὑπάρχει*)* a B» y «A se predica (*κατηγορεῖται*) de B». En el *De Interpretatione* se servía de la forma predicativa griega con o sin la cópula *ἐστι*, de la que todavía se conserva alguna que otra muestra en los *Primeros Analíticos*; pero aquellas dos formulaciones son ahora muchísimo más frecuentes. En líneas generales, parece claro que Aristóteles consideraba equivalentes las cuatro formulaciones siguientes:

(1) A se predica de B.

(2) A pertenece a B.

(3) B es A.

(4) B se halla en A como en un todo.

Todas estas expresiones resultan intercambiables en los *Primeros Analíticos*, pero (1) es la predominante. Este hecho guarda probablemente relación con la introducción de variables; pues su empleo dentro de la fórmula predicativa ordinaria conduce en griego, donde el orden de las palabras no se halla exactamente prefijado, a expresiones forzadas y hasta ambiguas. Por ejemplo, Aristóteles ilustra la conversión simple de una proposición universal negativa por medio de la frase: *εἰ μηδεμία ἡδονὴ ἀγαθόν, οὐδ' ἀγαθὸν οὐδὲν ἔσται ἡδονή,* («Si ningún placer es un bien, tampoco ningún bien será un placer») [98]. En este caso, la frase es preservada de ambigüedad gracias a la diferencia de género; pero las variables todas son tratadas como correspondientes al género neutro, de modo que, si Aristóteles hubiese intentado expresar aquella regla recurriendo para ello a variables, habría obtenido el resultado: *εἰ μηδὲν* AB, *οὐδὲ* B *οὐδὲν ἔσται* A, que es una frase

96 *Ethica Nicomachea*, V, 4 (1132b6).
97 Cf. por ejemplo *An. Pr.* I, 31 (46b12-14), 35 (48a34 y ss.).
* Cf. la nota al pie de la pág. 35 *(T.)*.
98 Ibid. I, 2 (25a6).

evidentemente ambigua. Cuando se sirve, en cambio, de los verbos **ὑπάρχειν** o **κατηγορεῖσθαι**, el sujeto y el predicado se hallan en casos diferentes, de suerte que la ambigüedad queda evitada. La regla ahora rezaría: **εἰ μηδενὶ τῷ** B **τὸ** A **ὑπάρχει, οὐδὲ τῷ** A **οὐδενὶ ὑπάρξει τὸ** B. Es esta forma de expresión, precisamente, la que se usa en la prueba de la regla [99].

Parece probable que el uso de **ὑπάρχειν** con un nombre substantivo o un adjetivo neutro como sujeto sea un invento inconsciente de Aristóteles tendente a facilitar el uso de variables. Pues es difícil imaginar que **ἄνθρωπος οὐ παντὶ ζῴῳ ὑπάρχει** [100] («(El) hombre no pertenece a todo animal») fuese en griego una forma natural de expresar «Algún animal no es un hombre»; y se aprecia en cambio fácilmente cómo, al ofrecer ejemplos concretos, Aristóteles tiende a servirse nuevamente de la forma ordinaria de expresión predicativa [101]. Hay un uso más normal de **ὑπάρχειν** con un abstracto, a veces un infinitivo, como sujeto. Así lo tenemos, por ejemplo, en un pasaje de los *Tópicos* donde se dice que el dormir pertenece al hombre y también a otras cosas [102]; y es posible que, cuando Aristóteles se sirve de las palabras «hombre», «animal», etc., como sujetos del verbo **ὑπάρχειν**, pretenda que las leamos como «ser un hombre», «ser un animal», etc. [103]. Pero, por más que esta lectura daría al uso de **ὑπάρχειν** una considerable naturalidad, no constituye una interpretación muy defendible, pues ya hemos visto que el sistema aristotélico exige que el intercambio de los términos de un enunciado general arroje otro enunciado general, cosa que estaría lejos de ocurrir si uno de dichos términos se leyese como «ser A» y el otro simplemente como «B». Así, el principio de la conversión simple para las proposiciones particulares afirmativas se expresa de la forma «Si A pertenece a algún B, entonces B pertenece a algún A» [104]. Mas la sencilla operación de intercambiar un nominativo y un dativo no podría realizarse si interpretásemos la primera cláusula como una abreviatura de «Si ser A pertenece a algún B». En realidad hay que concluir que, debido a las peculiaridades de la lengua griega, el precio a pagar por el avance técnico experimentado con la introducción de variables fue una considerable dosis de oscuridad filosófica, que se habría de cernir sobre la lógica durante muchos siglos.

Para sus propósitos, Aristóteles necesitaba una teoría de los enunciados, y un modo de expresarlos, que se ajustase a las cinco condiciones siguientes: (I) Dentro de la teoría se ha de poder considerar a los enunciados singulares y generales como especies por igual de un mismo género. La cópula y el predicado desempeñarían idéntica función en ambos casos, y las dos clases de enunciados diferirían únicamente por la índole del término que oficia de sujeto en cada uno. Esta parece haber sido la línea inicial de pensamiento del *De Interpretatione* [105]. (II) Todo término general ha de poder intervenir en el enunciado tanto como sujeto cuanto como predicado, permaneciendo invariable en ambos casos su significado. (III) La cópula ha de retener la misma significación en las cuatro diversas formas del

---

99 Ibid. I, 2 (25a14 y ss.). Aristóteles escribe a veces *τὸ AB* o *ἡ AB* para indicar la premisa en la que *A* oficia de predicado y *B* de sujeto. Cf. a este respecto *An. Pr.* I, 9 (30a33).
100 Ibid. I, 2 (25a25).
101 Ibid. I, 10 (31b9).
102 *Top.* I, 5 (102a23).
103 Compárese la fórmula *τινὶ . . . ὑπάρχειν ἡδονῇ ἀγαθῷ εἶναι* (*Top.* III, 6 (120a22)).
104 *An. Pr.* I, 2 (25a21).
105 *De Int.* 7 (17a38 y ss.).

enunciado general. (IV) El uso de variables no debe conducir a expresiones ambiguas ni forzadas de acuerdo con las especiales características de la lengua griega. (V) Todas las inferencias autorizadas en el sistema aristotélico han de conservar su vigencia. Era imposible, sin embargo, la satisfacción simultánea de todos estos requisitos, como permite verlo así la consideración de las diversas interpretaciones alternativas de las cuatro formas aristotélicas. La mayor parte de las interpretaciones que siguen a continuación se hallan sugeridas por su propia terminología o por observaciones incidentales de Aristóteles.

(1) Se podría interpretar que el término que oficia de sujeto indica o se refiere distributivamente a un cierto número de individuos, expresando una propiedad o grupo de propiedades que dichos individuos comparten en común. La cópula expresaría entonces la noción, ulteriormente inanalizable, de predicación. Y el predicado, por su parte, se limitaría a expresar la propiedad que la oración en su conjunto tiene por cometido adscribir a los individuos indicados por el término sujeto. Podríamos llamar a ésta la interpretación predicativa, y constituye probablemente la más obvia lectura tanto de la oración castellana «Algún (todo) hombre es blanco» cuanto de la correspondiente griega *ἄνθρωπος τίς* (*πᾶς*) *ἐστι λευκός*. En esta interpretación resulta natural la cuantificación del sujeto, esto es, la adición de «todo» o «algún» en orden a poner de manifiesto si el enunciado se aplica a todos o sólo a alguno de los individuos indicados por el término sujeto. La cuantificación del término-predicado, por su parte, arrojaría una oración carente de sentido. Esto es posiblemente lo que Aristóteles quiere dar a entender cuando afirma que los enunciados con predicados universalmente cuantificados no son nunca verdaderos [106], aunque pudiera ser también que estuviese pensando en otra cosa. Dentro de esta interpretación predicativa, los términos sujeto y predicado no se podrían intercambiar sin que sus significados experimentasen alteración.

(2) Se podría interpretar que la cópula expresa una relación de identidad, en tanto que los términos sujeto y predicado se refieren a individuos, expresando propiedades de los mismos. En este caso, el término-predicado de un enunciado afirmativo tendría que ir implícitamente precedido de la partícula «algún», entendida ahora no como un cuantificador sino como equivalente en su sentido al de «un cierto», «algún que otro», etcétera. Esta interpretación resulta bastante natural en el caso de una oración castellana cuyo predicado sea un substantivo con artículo indefinido. Por ejemplo, la oración «Todo hombre es un animal» podría entenderse fácilmente como equivalente a «Todo hombre es idéntico a algún (un cierto, algún que otro) animal». Es probable que asimismo resulte natural en el caso de una oración griega con un substantivo por predicado. Acaso Aristóteles pensase en esta interpretación en el pasaje sobre la cuantificación del predicado a que aludimos más arriba. En rigor, «Todo hombre es idéntico a todo animal» parece una oración falsa más bien que carente de sentido, pues sería verdadera de no haber más que un solo animal.

(3) El término que oficia de sujeto podría ser interpretado como en el caso anterior, pero interpretando ahora al predicado como si su misión

106 Ibid. 7 (17b12). En *An. Pr.* I, 27 (43b20) parece dar a entender que son absurdos

fuese nombrar, más bien que expresar, una determinada propiedad. Esto es, habría que interpretarlo como un término abstracto. Esta interpretación resulta poco menos que inevitable si se traduce literalmente la formulación aristotélica con el verbo ὑπάρχειν y es probable asimismo que la fórmula griega originaria la sugiera; pero, dada la ambigüedad frecuente en griego respecto de lo abstracto y lo concreto [107], quizá Aristóteles no cayese en la cuenta de que su nueva formulación envolvía el uso de un nuevo tipo de término. El libre intercambio de los términos sujeto y predicado no es admisible dentro de esta interpretación.

(4) Sujeto y predicado podrían ambos interpretarse como nombres de clases, otorgándose a la cópula del enunciado universal afirmativo la significación de «se incluye en». Esta interpretación se desprende directamente de la formulación aristotélica con ἐν ὅλῳ εἶναι. En su favor hay que decir que permite un completo intercambio de los términos del enunciado, pero presenta la desventaja de que la cópula tendría que revestir diversas significaciones en enunciados de formas asimismo diversas. «Todos los hombres son animales» se habría de interpretar como «La clase de los hombres se incluye en la clase de los animales», mientras «Algunos hombres son blancos» lo habría de ser como «La clase de los hombres se intersecta con la clase de las cosas blancas». Más aún, las oraciones interpretadas de esta suerte no admitirían como sujetos términos singulares. Fue el desarrollo de esta interpretación de las formas aristotélicas del enunciado el que condujo al reconocimiento de las cinco posibles relaciones entre clases que ya se mencionaron a propósito de los *Tópicos*.

(5) El término-sujeto podría ser entendido como en las interpretaciones (1) a (3) antes citadas, en tanto el término-predicado se entendería como el nombre de una palabra que se aplica a, o se predica de, los individuos a los que se refiere el término-sujeto. Esta interpretación es sugerida por la formulación aristotélica τὸ Α κατηγορεῖται τοῦ Β y su traducción castellana «A se predica de B», aunque quizá lo sea con menos fuerza en griego que en castellano a causa de la común ausencia de distinción entre el uso y la mención de las palabras. Dentro de ella es obvio que los términos no pueden intercambiarse libremente.

(6) Tanto el sujeto como el predicado se podrían interpretar como términos abstractos. En este caso los términos serían libremente intercambiables, pero la cópula habría de significar «implica» en el enunciado universal y «es compatible con» en el particular. Tal interpretación resulta natural en el primero de ambos casos, pero parece un tanto artificial en el segundo. Un término singular y concreto no podría ser sujeto de un enunciado de esta especie.

(7) Los enunciados podrían interpretarse como positiva y negativamente existenciales. Esta interpretación permite el libre intercambio de los términos, así como la preservación de una significación constante de la cópula, pero establece una distinción excesivamente rígida entre las proposiciones generales y las singulares. Estas últimas no son, de hecho, expresables en el simbolismo apropiado a la interpretación. Más aún, tal interpretación no tolera aquellas inferencias aristotélicas que dependan de la

[107] Véase más arriba, p. 18.

concesión de alcance existencial a los enunciados universales. La interpretación vendría sugerida por una formulación del enunciado particular afirmativo a la manera de ἔστι τις ἄνθρωπος λευκός [108], formulación que hay que leer naturalmente con un sentido existencial.

Ninguna de estas interpretaciones satisface todos los requisitos antes enumerados. Las más acordes con el uso del verbo εἶναι («ser») resultan incompatibles con la cuarta condición, pues son precisamente dichas formulaciones las que en griego dan lugar a expresiones forzadas o ambiguas para nuestros efectos. A este respecto habría que hacer notar que en castellano, donde la posición de las palabras en la frase responde a un orden más o menos fijo, no se suscitarían dificultades similares de nuestro uso del verbo «ser». Las interpretaciones sugeridas por las formulaciones arbitradas para hacer frente a estas dificultades no se ajustan en cambio al **requisito de la libre intercambiabilidad de los términos, cumplido únicamente** por la interpretación en términos de clases, que a su vez no satisface las condiciones primera y tercera, esto es, no es aplicable al caso de las oraciones singulares y tampoco permite que la cópula retenga la misma significación en todas y cada una de nuestras cuatro formas de enunciados.

Aristóteles, por supuesto, no tuvo plena conciencia de todas estas complicaciones. Se limitó en cada caso a escoger aquellas formulaciones que mejor se adecuaban a las exigencias de orden técnico del momento y, cuando fue preciso, dejó sin más en la penumbra su interpretación filosófica. Sin embargo, demostró no estar enteramente ciego para las dificultades planteadas por su uso del verbo ὑπάρχειν, como lo revela el pasaje de los *Primeros Analíticos*, I, 36, donde señala que en muchas ocasiones no podemos considerar al sujeto del enunciado como un predicado corriente, ya que es posible decir que una ciencia dada pertenece a los contrarios (esto es, que la ciencia de las cosas contrarias entre sí es una y la misma) sin por ello obligarnos a decir que los contrarios sean una ciencia.

Afortunadamente, la oscuridad filosófica no es un obstáculo insuperable para el progreso lógico. Las inferencias del sistema aristotélico son todas ellas válidas bajo cualquiera de sus posibles interpretaciones, excepción hecha de aquéllas que descansan en el alcance existencial de las proposiciones universales. Su correcta interpretación sería, no obstante, algo más complicada de lo que Aristóteles pensara. Por ejemplo, la regla que preside la conversión simple de los enunciados universales negativos tendría que formularse como sigue dentro de las diversas interpretaciones reseñadas:

(1) Si ninguna de las cosas X es Y, entonces ninguna de las cosas Y es X.

(2) Si ninguna cosa X es idéntica a una cosa Y, entonces ninguna cosa Y es idéntica a una cosa X.

(3) Si ninguna de las cosas X posee la propiedad Y, entonces ninguna de las cosas Y posee la propiedad X.

(4) Si la clase de las cosas X se halla totalmente excluida de la clase de las cosas Y, entonces la clase de las cosas Y se halla totalmente excluida de la clase de las cosas X.

108 *De Int.* 7 (17b19).

(5) Si ninguna de las cosas X se puede describir mediante la palabra «Y», entonces ninguna de las cosas Y se puede describir mediante la palabra «X».

(6) Si la propiedad X es incompatible con la propiedad Y, entonces la propiedad Y es incompatible con la propiedad X.

(7) Si ninguna cosa es a la vez X e Y, entonces ninguna cosa es a la vez Y y X.

6. La doctrina del silogismo.

La caracterización aristotélica de las proposiciones generales prepara el camino para su doctrina del silogismo. Al comienzo de los *Primeros Analíticos,* Aristóteles define el silogismo como aquel discurso en el que, sentadas ciertas proposiciones, se sigue necesariamente de ellas algo otro, distinto de lo previamente establecido [109]. Esta fórmula es lo suficientemente amplia como para abarcar prácticamente a todo argumento en que se infiera una conclusión a partir de dos o más premisas; y con este sentido amplio fue utilizada ya en los *Tópicos* [110]. Pero cuando entra con detalle en el estudio del silogismo, Aristóteles se ocupa casi con exclusividad de argumentos en los que tanto las premisas (llamadas ahora *προτάσεις*) cuanto la conclusión (*συμπέρασμα*) son proposiciones simples, en su sentido del término, y generales; y, en sus momentos de mayor precisión, todavía añade que toda conclusión silogística se sigue de dos premisas que ponen en relación los términos (*ὅροι*, literalmente «límites») de la conclusión con un tercer término, llamado término medio [111]. De acuerdo con esta última acepción más restringida, no se podría aplicar la denominación de «silogismo» a un argumento como «Si llueve, el suelo se moja; pero llueve; luego el suelo se moja» ni a ningún otro en el que oficie de premisa un enunciado compuesto. Se ha dicho asimismo que tampoco cabría aplicar tal denominación a un argumento en que intervenga un enunciado singular como premisa, pero lo cierto es que, en un pasaje posterior, se nos muestra un ejemplo de silogismo con ese tipo de premisa [112]. Este hecho concuerda con la tesis, oficialmente sustentada por Aristóteles, de que los enunciados singulares se hallan a la par de los universales y los particulares. Los términos singulares, sin embargo, poseen la peculiaridad de poder oficiar únicamente a título de sujetos, de suerte que Aristóteles se acabó viendo conducido, no sólo por un certero instinto lógico, sino también por el deseo de preservar la universal intercambiabilidad de los términos del enunciado, a concentrar su atención en argumentos exclusivamente integrados por enunciados generales.

El interés de Aristóteles por las formas de argumentación basadas en las relaciones entre términos generales obedece, sin duda, a su interés por la ciencia demostrativa. Pero parece muy probable que el modo como presenta su teoría estuviese determinado en buena parte por sus reflexiones acerca del método platónico de la división [113]. Este último es mencio-

109 *An. Pr.* I, 1 (24b18).
110 *Top.* I, 1 (100a25).
111 *An. Pr.* I, 25 (41b36).
112 Ibid. II, 27 (70a27).
113 Véase más arriba, p. 9.

nado en los *Primeros* [114] y *Segundos Analíticos* [115], y en el primero de esos pasajes se señala con acierto que no constituye un método de demostración. Pues, para servirnos del ejemplo del propio Aristóteles, si partimos del género animal y suponemos que todo animal es mortal o inmortal, incluyendo luego al hombre en el apartado de los animales que son mortales, habremos dado por sentada aquella parte de la definición final en la que se nos dice que el hombre es un animal mortal, esto es, habremos dado justamente por supuesto lo que tratábamos de demostrar. El método platónico, por tanto, es simplemente un método de exposición o aclaración mediante el cual podemos articular nuestro pensamiento. Pero, en cualquier caso, parece haberle sugerido a Aristóteles el esquema general del razonamiento silogístico. En el pasaje a que nos acabamos de referir, Aristóteles apunta que la división es, por así decirlo, un silogismo debilitado en que se parte de admitir lo que tendría que ser probado, afirmando a continuación que en la demostración se hace patente cómo el término mayor, o más general, es predicable del término medio, que a su vez lo es del término menor. Evidentemente, Aristóteles tiene *in mente* un encadenamiento de formas, pongamos por caso la X-dad, la Y-dad y la Z-dad, dispuesto de tal suerte que podamos decir «Dado que la X-dad pertenece a todo Y y la Y-dad pertenece a todo Z, la X-dad ha de pertenecer a todo Z». Este patrón de argumentación es en rigor característico de una de las formas silogísticas reconocidas por Aristóteles, pero nos suministra en última instancia la terminología de todo su sistema.

Antes de proceder al desarrollo pormenorizado de su teoría del silogismo, Aristóteles explica por qué los enunciados (*προτάσεις*) de las formas A, E e I son susceptibles de conversión y no lo son, en cambio, los de la forma O [116]. Se trata de uno de los preliminares esenciales de la doctrina de la reducción. Es en este pasaje donde por vez primera emplea variables como términos.

Según Aristóteles, hay tres figuras (*σχήματα*) del silogismo, que se distinguen entre sí por las tres diferentes relaciones que el término medio puede guardar con los extremos. En la primera figura, el término medio es sujeto respecto de uno de ellos y predicado respecto del otro; en la segunda figura es predicado respecto de los dos; en la tercera, sujeto en ambos respectos. Las figuras podrían representarse mediante los esquemas siguientes:

(1)	(2)	(3)
A–B	*M–N*	*Π–Σ*
B–Γ	*M–Ξ*	*P–Σ*
A–Γ	*N–Ξ*	*Π–P*

Cada par de mayúsculas griegas se supone que exhiben el esqueleto de un enunciado general (afirmativo o negativo, universal o particular), correspondiendo en cada caso a la primera letra el papel de predicado según la formulación usual en Aristóteles. El predicado de la conclusión en cada esquema se identifica como el término mayor (*τὸ μεῖζον*), el sujeto lo hace con el término menor (*τὸ ἔλαττον*), y por término medio, finalmente, se toma

114 *An. Pr.* I, 31 (46a31).
115 *An. Post.* II, 13 (96b25).
116 *An. Pr.* I, 2 (25a1).

el que es común a ambas premisas. La terminología parece haber tenido origen en el hecho de que, en un silogismo del primer modo de la primera figura, el predicado de la conclusión es por lo general el término de mayor extensión; pero la artificialidad de dicha terminología es fácil de apreciar cuando se aplica a la segunda y tercera figuras. Consideremos, por ejemplo, el siguiente silogismo de la segunda figura: «Ninguna salamandra acuática es un mamífero; pero algún organismo es un mamífero; luego algún organismo no es una salamandra acuática». De acuerdo con las explicaciones de Aristóteles, «organismo» sería el término menor y «salamandra acuática» el mayor, correspondiéndole a «mamífero», que es el término medio, un lugar entre ambos en un orden de generalidad; pero, de hecho, «organismo» es más general que los otros dos términos, y entre «mamífero» y «salamandra acuática» no hay ni siquiera base de comparación, puesto que las características por ellos denotadas no corresponden a un mismo encadenamiento de formas. Por lo demás, las deficiencias de la terminología de Aristóteles no afectan sólo a su caracterización de la segunda y tercera figuras, sino se dejan apreciar de igual manera en conexión con tres de los cuatro tipos de silogismo que distingue en la primera. Supongamos, por ejemplo, que se somete a nuestro análisis el siguiente argumento: «Ninguna abeja es una hormiga; pero algún animal gregario es una abeja; luego algún animal gregario no es una hormiga». Se trata de un silogismo correspondiente a la primera figura y, por lo tanto, los términos «hormiga», «abeja» y «animal gregario» tendrían que observar según Aristóteles un orden decreciente de generalidad, pero tampoco aquí los hechos se ajustan a su descripción.

La fuente de estas perplejidades parece residir en el hecho de que Aristóteles intenta extender a los términos de cualquier clase de enunciados generales una jerga que sólo es aplicable para el caso de los términos de enunciados universales afirmativos. Ya en la antigüedad se vieron turbados los comentaristas por la dificultad de hallar una definición de las expresiones «mayor» y «menor» que se adecuara a todos los contextos en los que se echa mano de las mismas. Pero lo cierto es que Aristóteles define «mayor» y «menor» independientemente para cada figura, sobre la base de las posiciones que los términos ocupan en la formulación típica de los silogismos de aquella última. Tan sólo en las definiciones correspondientes a la primera figura se hace referencia a la extensión comparativa de la aplicación de los términos. Así, Aristóteles nos dice: «Llamo término mayor a aquel en el que el medio se halla contenido, término menor a aquel que se subordina al medio» [117]. Pero en su caracterización del término medio en esta figura introduce aún otra noción: «El término medio es aquel que se incluye en otro y él mismo incluye a otro, ocupando asimismo un lugar intermedio por su posición (*θέσει*) [118]». La última cláusula se refiere aquí aparentemente a la posición del término en cualquiera de las formulaciones que correspondan al patrón genérico de los silogismos de la primera figura. En cualquier caso, y una vez ordenadas las premisas en su disposición correcta, el término medio se mencionará siempre a continuación del mayor y con anterioridad al menor [119].

Aristóteles vuelve a emplear esta noción de posición al distinguir entre los términos mayor y menor de la segunda y tercera figuras, dándose cuenta

117 Ibid. I, 4 (26a21).
118 Ibid. (25b35-36).
119 Ibid. (25b32-35 y 37-39).

al parecer de la inaplicabilidad a tales casos de la noción de extensión comparativa. Así, dice respecto de la segunda figura: «El término mayor es aquél que cae próximo al medio; el término menor, aquél que cae más lejos de este último» [120]. Tal descripción alude al procedimiento usual de formulación de un silogismo de la segunda figura, como por ejemplo, «No sea M predicado de ningún N, pero sí de todo Ξ» [121], o también «Si M pertenece a todo N, pero a ningún Ξ» [122]. En ambos casos, el término mayor N se menciona en la exposición detrás del medio. Al describir la tercera figura, Aristóteles dice: «El término mayor es aquél que queda más alejado del medio; el menor, el que queda más cercano» [123], lo que de nuevo alude a una formulación tal como «Cuando Π y P pertenecen a la vez a todo Σ» [124]. En este caso, Π se dice el término mayor en virtud de su posición, que es la más alejada del término medio. Aristóteles se atiene siempre a este orden cuando sobre la marcha da instrucciones para la construcción de pares de premisas en las diferentes figuras. Por ejemplo, la abreviatura «Términos: animal, substancia, cuervo» [125], formulada en el contexto de su discusión de la segunda figura, quiere indicar que se han de construir dos premisas en la disposición apropiada a esa figura con «animal» de término medio, «substancia» de mayor y «cuervo» de menor. El orden propuesto para la primera figura es el de mayor-medio-menor [126], y para la tercera el de mayor-menor-medio [127]. Pero, aunque Aristóteles se sirve de la noción de posición de los términos como un recurso explicativo, colocando siempre al término mayor antes del menor, es difícil creer que sea ésta su última palabra sobre nuestra cuestión; pues ello equivaldría a conceder una importancia un tanto artificiosa al orden de las premisas, que Aristóteles, con acierto, estaba lejos de considerar como sacrosanto. Alejandro de Afrodisia sugiere que el término mayor es, en definitiva, el predicado del «problema» cuya demostrabilidad hay que dilucidar por medio de la construcción del silogismo [128]. Tal sugerencia cuenta con no pocos indicios a su favor, pues, en los siguientes capítulos de los *Primeros Analíticos* [129], Aristóteles da a veces la sensación de considerar a la silogística como un medio de resolver problemas de aquel tipo. Es posible, ciertamente, que Aristóteles piense en el predicado de la conclusión siempre que habla del término mayor; pero no se le ocurriría decir tal cosa a título de definición, puesto que, al enfocar la cuestión de la validez de una determinada forma silogística, lo que hace no es proceder a construir el silogismo en su totalidad, sino más bien presentar un par de premisas y preguntar qué conclusión, si alguna, pudiera derivarse de las mismas. Por consiguiente, ha de contar con algún modo de identificar al término medio sobre la base de lo manifestado en las premisas y sin expresa referencia al resultado de la conclusión. Por otra parte, ni tan siquiera es imposible para él hablar de un silogismo en que el término menor sea predicado del mayor [130].

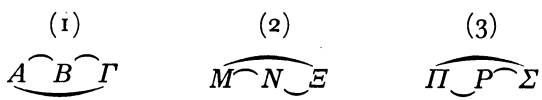
120 Ibid. I, 5 (26b37-38).
121 Ibid. (27a25).
122 Ibid. I, 6 (27a9).
123 Ibid. I, 6 (28a14).
124 Ibid. (28a18).
125 Ibid. I, 5 (27b5).
126 Ibid. I, 4 (26a8).
127 Ibid. I, 6 (28a32).
128 *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 75.
129 Cf., por ejemplo, I, 28 (44a36).
130 *An. Pr.* I, 7 (29a23).

Parece, pues, que el significado de las expresiones «mayor» y «menor» ha ido evolucionando al compás del pensamiento de Aristóteles. En sí mismas, las *palabras* expresan la relación que, a su juicio, subsiste entre las extensiones de los términos en la primera figura; y ya que en un silogismo en *Barbara* con premisas verdaderas, que es el que le sirve de modelo, el término de mayor extensión es de hecho el predicado de la conclusión, Aristóteles se servirá de esta noción al adaptar su terminología a los casos de las figuras segunda y tercera. Sin embargo, define «término mayor» por referencia a la posición del término en la formulación típica de las premisas, de acuerdo con la cual el término mayor es siempre mencionado delante del menor. En el momento de redactar el capítulo 7 de los *Primeros Analíticos*, éste es el *significado* de «término mayor», de modo que, al preguntarse si las premisas «Algún N es M» y «Ningún Ξ es M» arrojan una conclusión, responde que no podemos concluir «Algún Ξ no es N» pero sí «Algún N no es Ξ», esto es, podemos predicar del término mayor el término menor. El término mayor sería aquí, simplemente, el mencionado en primer lugar.

Comoquiera que sea, toda esta cuestión apenas tiene otro interés que el puramente erudito. Desde el siglo XVII, la generalidad de los autores han adoptado el expediente propuesto por Juan Filopón, consistente en *definir* el término mayor como el predicado de la conclusión. Filopón reconoce abiertamente que se trata de una decisión arbitraria. Así, escribe:

> «Es posible definir a éste [el término mayor] tanto de un modo común a todas las figuras cuanto de un modo peculiar a la primera. Según este último tipo de definición, por exclusiva referencia a la primera figura, el término mayor es el que se predica del medio, siendo el menor el que hace de sujeto respecto de éste. Pero, ya que en ninguna de las otras dos figuras ocupan los extremos una posición diferente respecto del medio, resulta claro que dicha definición no tiene aplicación a esas figuras. Por consiguiente, habremos de aplicarles la regla, común a todas, de que el término mayor es el predicado de la conclusión» [131].

La insistencia de Aristóteles en la disposición de los tres términos del silogismo en una ordenación lineal sugiere que, en lugar de los esquemas silogísticos a base de letras y líneas ofrecidos más arriba, podía quizá haberse servido para sus tres figuras de diagramas como los que se indican al final de este párrafo, diagramas que de hecho se asemejan a algunos de los encontrados en manuscritos de comentaristas antiguos [132]. En ellos, cada uno de los enlaces superiores entre pares de letras se ha de entender que representa una relación entre términos correspondiente a una de las premisas, en tanto que cada uno de los enlaces inferiores representa una relación correspondiente a la conclusión. Si el pensamiento de Aristóteles se dejó guiar por tales diagramas, es fácil comprender por qué dio por sentado que no podía haber más que tres figuras; pues evidentemente hay sólo tres maneras como el término medio puede ordenarse con respecto a los extremos, dado que el término mayor ha de preceder siempre al término menor.



131 Filopón, *In Aristotelis An. Pr. Commentaria*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* XIII (II), p. 67.
132 Cf., por ejemplo, Ammonio, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* IV (VI), p. x.

Con posterioridad a Aristóteles, las diversas construcciones silogísticas posibles dentro de cada figura vinieron a llamarse modos. Sirviéndonos de esta terminología para nuestros propósitos, podríamos decir que Aristóteles distingue catorce modos válidos, aparte de unos cuantos esquemas derivados a que en breve aludiremos. Para cada uno de dichos modos formula un principio con carácter de enunciado condicional, en el que como variables se emplean letras al estilo que se acaba de indicar. En el cuadro que sigue hemos abandonado las del propio Aristóteles en favor de una formulación unificada en la que «M» indique siempre el lugar del término medio, «P» el del término menor (esto es, más pequeño) y «G» el del término mayor (esto es, más grande). Por otra parte, se hace constar al comienzo de cada figura el orden que en ella corresponde a los términos, en sustitución de la práctica aristotélica de servirse de letras consecutivas. La numeración, así como la denominación medieval, de los diversos modos, todo lo cual se añade a los efectos de facilitar nuestras referencias, no forman parte por supuesto de la obra de Aristóteles. El orden en que los modos se suceden es, sin embargo, el suyo, y se ha de entender que cada una de las fórmulas que siguen fueron concebidas por él como un patrón al que se ajustan multitud de enunciados expresivos de una conexión necesaria.

Primera figura: G, M, P.

1. 1. *Si todo M es G y todo P es M, entonces todo P es G.* (Barbara).
1. 2. *Si ningún M es P y todo P es M, entonces ningún P es G* (Celarent).
1. 3. *Si todo M es G y algún P es M, entonces algún P es G* (Darii).
1. 4. *Si ningún M es G y algún P es M, entonces algún P no es G* (Ferio).

Segunda figura: M, G, P.

2. 1. *Si ningún G es M y todo P es M, entonces ningún P es G* (Cesare).
2. 2. *Si todo G es M y ningún P es M, entonces ningún P es G* (Camestres)
2. 3. *Si ningún G es M y algún P es M, entonces algún P no es G* (Festino).
2. 4. *Si todo G es M y algún P no es M, entonces algún P no es G* (Baroco).

Tercera figura: G, P, M.

3. 1. *Si todo M es G y todo M es P, entonces algún P es G* (Darapti).
3. 2. *Si ningún M es G y todo M es P, entonces algún P no es G* (Felapton).
3. 3. *Si algún M es G y todo M es P, entonces algún P es G* (Disamis).
3. 4. *Si todo M es G y algún M es P, entonces algún P es G* (Datisi).
3. 5. *Si algún M no es G y todo M es P, entonces algún P no es G* (Bocardo).
3. 6. *Si ningún M es G y algún M es P, entonces algún P no es G* (Ferison).

Para satisfacer la curiosidad del lector, ofrecemos a continuación dos ejemplos de la formulación aristotélica de tales principios en griego. Se observará que en ninguno de ambos casos emplea Aristóteles la simple forma predicativa de expresión empleada por nosotros en castellano. En correspondencia con 1. 1. (*Barbara*), Aristóteles escribe εἰ γὰρ τὸ Λ κατὰ παντὸς τοῦ

B *καὶ τὸ* B *κατὰ παντὸς τοῦ* Γ, *ἀνάγκη τὸ* A *κατὰ παντὸς τοῦ* Γ *κατηγορεῖσθαι*, esto es, literalmente «Si A se predica de todo B y B se predica de todo Γ, entonces es necesario que A se predique de todo Γ» [133] Y, en correspondencia con 2. 3. (*Festino*), escribe *εἰ γὰρ τὸ* M *τῷ μὲν* N *μηδενί, τῷ δὲ* Ξ *τινί ὑπάρχει, ἀνάγκη τὸ* N *τινὶ τῷ* Ξ *μὴ ὑπάρχειν*, esto es, literalmente «Si M no pertenece a ningún N, pero pertenece a algún Ξ, entonces es necesario que N no pertenezca a algún Ξ» [134].

Quien argumente en la primera figura probará su conclusión mostrando que ha sido satisfecha una condición suficiente. Se trata de la única figura en que pueden probarse o demostrarse enunciados correspondientes a cada una de las cuatro formas del enunciado general. Sus reglas específicas son (I) que la premisa mayor (esto es, la premisa que contiene al término mayor) ha de ser universal, y (II) que la premisa menor ha de ser afirmativa. En opinión de Aristóteles, sólo los silogismos de la primera figura son perfectos o completos (*τέλειος*). La razón de ello es presumiblemente que sólo en la primera figura, cuando los términos se hallan dispuestos en la ordenación usual, resulta evidente de inmediato la transitividad de la conexión entre esos términos [135]. Esta peculiar característica de la primera figura no se deja apreciar cuando, como sucede en los libros de texto escritos en latín y en muchos idiomas europeos modernos, se emplea el verbo «ser» en las premisas y la conclusión, hecho éste que ha dado origen a numerosas y fútiles especulaciones en torno al significado de *τέλειος* en Aristóteles. Al formular la regla para la primera figura en la versión a base de la cláusula *ἐν ὅλῳ εἶναι*, Aristóteles invierte el orden usual de las premisas con el fin de hacer patente aquella relación. Es instructivo a estos efectos comparar con una de las anteriores la nueva formulación del principio correspondiente al modo Barbara:

«Cuando los términos se relacionan entre sí de manera que el último se halle contenido en el medio como en un todo y el medio se halle contenido como en un todo en el primero, tendrá que haber necesariamente un silogismo perfecto que conecte entre sí los dos extremos» [136].

«Si A se predica de todo B y B se predica de todo Γ, es necesario que A se predique de todo Γ» [137].

Quien argumente en la segunda figura probará su conclusión, que ha de ser negativa, mostrando que no ha sido satisfecha una condición necesaria para la aplicación del predicado al sujeto. Las reglas específicas de esta figura son (I) que la premisa mayor ha de ser universal, y (II) que una de las premisas ha de ser negativa.

Quien argumente en la tercera figura probará su conclusión, que ha de ser particular, mostrando la posibilidad de aducir ejemplificaciones relativas a casos particulares. Dicho paso es esencial, puesto que un enunciado particular constituye, como hemos visto, una aserción existencial, y la existencia no puede establecerse sino por referencia a ejemplos concretos de lo existente. Aparte del requisito de que la conclusión sea particular, la única regla específica de esta figura es la que impone que la premisa menor sea afirmativa. Pero habría que hacer notar que los dos primeros modos de la enumeración

133 *An. Pr.* I, 4 (25b37).
134 Ibid. I, 5 (27a32).
135 G. Patzig, *Die Aristotelische Syllogistik*, c. 3.
136 *An. Pr.* I, 4 (25b32-35).
137 Ibid. I, 4 (25b37-39).

aristotélica (*Darapti* y *Felapton*) son válidos tan sólo en el supuesto de conceder alcance existencial a los enunciados universales que les sirven de premisas. Si en un silogismo de uno de esos dos modos una de las premisas universales implicase el enunciado particular que se dice su subalterno, podríamos evidentemente construir un silogismo con los mismos términos e idéntica conclusión en uno de los cuatro restantes modos de la figura. Con otras palabras, el silogismo con dos premisas universales resultaría innecesariamente fuerte para la tarea que le había sido encomendada. Por el contrario, si ninguna de ambas premisas universales implicase su subalterna, no se podría seguir de esas premisas la conclusión particular del silogismo. En una teoría del silogismo que no diera cabida al alcance existencial de las premisas universales, cabría excluir nuestros dos modos mediante la adición de una regla específica que estipulase que una de las premisas ha de ser particular.

Aunque los dos primeros modos de la tercera figura son los únicos esquemas silogísticos de la lista de Aristóteles que dependen de la admisión del alcance existencial de las premisas universales, se echa de ver que la admisión de dicho alcance permitiría derivar conclusiones particulares de cualesquiera dos premisas que autoricen la derivación de una conclusión universal. En tal caso, podríamos añadir los cuatro siguientes a nuestra colección de principios silogísticos:

1. 11. *Si todo M es G y todo P es M, entonces algún P es G* (Barbari).
1. 21. *Si ningún M es G y todo P es M, entonces algún P no es G* (Celaront).
2. 11. *Si ningún G es M y todo P es M, entonces algún P no es G* (Cesaro).
2. 21. *Si todo G es M y ningún P es M, entonces algún P no es G* (Camestros).

De tales modos subalternos (como fueron llamados en la Edad Media) no hay rastro en Aristóteles. Su principal interés radica en que permiten nivelar el número de modos reconocidos por este último en las tres figuras. Si se prescinde del alcance existencial, habrá entonces cuatro, y sólo cuatro, modos válidos por figura; pero, si se concede dicho alcance, entonces serán seis los modos válidos dentro de cada una.

En el transcurso de su exposición, Aristóteles enuncia algunas reglas genéricas para todos los silogismos, como, por ejemplo, la de que al menos una de las premisas ha de ser universal y al menos una afirmativa [138]. Pero, a diferencia de lo que hicieron algunos de sus sucesores, no trata en ningún caso de derivar la totalidad de la teoría a partir de un conjunto de semejantes reglas genéricas. Su modo de proceder consiste en examinar qué pares de premisas arrojan silogismos válidos, esto es, dan lugar a conclusiones dentro de la figura considerada en cada caso, excluyendo a continuación aquellos pares de premisas que no lo hagan así. A este respecto, aporta con frecuencia el material necesario para probar que el par en cuestión no conduce a ninguna conclusión. Este procedimiento ha sido calificado de prueba mediante ejemplos contrastados [139]. Quizás sería mejor calificarlo de exclusión o contra-

138 Ibid. I, 24 (41b6 y ss.).
139 W. D. Ross, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*, p. 30.

prueba mediante ejemplos contrastados [140]. En efecto, consiste en la presentación de dos tríadas de términos tales que, en cada una, las relaciones de los extremos con el medio respondan al patrón considerado, aunque en una de ellas el mayor pertenezca al menor universalmente tomado y en la otra no se dé dicha pertenencia. Evidentemente, la primera tríada actuará de contraejemplo en orden a mostrar que las relaciones establecidas entre los términos no permiten la inferencia de una conclusión negativa, universal ni particular, mientras que la segunda actuará de contraejemplo en orden a mostrar que dichas relaciones tampoco permiten la inferencia de una conclusión, universal ni particular, afirmativa. Conjuntamente consideradas las dos tríadas, probarán que aquellas relaciones no permiten la inferencia de ninguna conclusión. El primero de los propios ejemplos de Aristóteles contribuirá a poner en claro este procedimiento:

> «Si el primer término pertenece al término medio tomado universalmente, pero el medio no pertenece al último término tomado universalmente, no habrá silogismo que conecte esos extremos. Pues, así planteadas las cosas, nada se sigue necesariamente de ellas. Dado que el primer término puede pertenecer o no al último, ni la conclusión universal ni la particular tendrán carácter necesario. Y si nada se sigue con necesidad de esas premisas, no habrá entonces silogismo. Como términos susceptibles de pertenencia a otro universalmente tomado, consideremos: animal, hombre, caballo. Como términos no susceptibles de pertenencia a otro universalmente tomado, consideremos: animal, hombre, piedra» [141].

Aristóteles nos invita aquí a considerar las dos parejas de enunciados verdaderos «Todo hombre es un animal» y «Ningún caballo es un hombre», por un lado, y «Todo hombre es un animal» y «Ninguna piedra es un hombre», por otro, considerando luego que todo caballo es un animal y que ninguna piedra es un animal. Se sigue de estas relaciones que una pareja de enunciados de las formas «Todo M es G» y «Ningún P es M» es compatible con enunciados de cada una de las cuatro formas «Todo P es G», «Ningún P es G», «Algún P es G» y «Algún P no es G». A primera vista, el procedimiento pudiera dar la sensación de alambicado, pero resulta comparativamente económico, toda vez que permite rechazar a un mismo tiempo cuatro patrones inválidos de razonamiento.

El propósito de las reglas específicas suministradas por Aristóteles en su tratamiento de las diversas figuras es servir de resumen de este último, a la vez que facilitar la exclusión por grupos de los modos inválidos. Sería un error, empero, tachar a su exposición de asistemática; pues su doctrina de la reducción de una figura a otra, a la que continuamente recurre, sirve de cañamazo a lo que de otro modo constituiría un simple catálogo de principios independientes entre sí. Tras de enunciar cada uno de los principios correspondientes a un modo válido de la segunda o la tercera figuras, Aristóteles muestra, pues, cómo podemos validarlo directa o indirectamente por referencia a un silogismo de la primera figura.

En su origen, la doctrina de la reducción se halla estrechamente emparentada con la tesis de que sólo los silogismos de la primera figura son perfectos de por sí, esto es, son evidentemente concluyentes sin necesidad de

---

140 J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic*, pp. 67 y ss.
141 *An. Pr.* I, 4 (26a2-9).

acudir a ninguna argumentación suplementaria [142]. Para la mayor parte de los modos de las figuras imperfectas, esa argumentación suplementaria toma la forma de un proceso de conversión entre enunciados. Así, por ejemplo, 2. 2 (*Camestres*) podría ser validado por recurso a 1. 2 (*Celarent*) y a la conversión de dos enunciados universales negativos:

$$\dfrac{\text{Todo G es M} \qquad \dfrac{\text{Ningún P es M}}{\text{Ningún M es P}}}{\dfrac{\text{Ningún G es P}}{\text{Ningún P es G}}}$$

Hay, no obstante, dos modos —a saber, 2. 4 (*Baroco*) y 3. 5 (*Bocardo*)— que no se pueden validar de esta manera y para los que Aristóteles emplea el procedimiento que más tarde llamaría de reducción *per impossibile* o reducción indirecta. Consideremos, por ejemplo, el caso de 2. 4 (*Baroco*), cuyo principio es:

Si todo G es M y algún P no es M, entonces algún P no es G.

En orden a validarlo, Aristóteles toma la contradictoria de la conclusión (esto es, «Todo P es G») junto con la primera de las premisas y argumenta, de acuerdo con 1. 1 (*Barbara*), que dicha combinación implica la contradictoria de la otra premisa, esto es:

Si todo G es M y todo P es G, entonces todo P es M.

Ello es tanto como decir que quien acepte las dos premisas del silogismo originario, pero niegue la conclusión, se vería envuelto en una contradicción. Aristóteles compara en una ocasión esta argumentación con la famosa prueba de la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado [143].

Para evitar confusiones, empleamos el vocablo castellano «reducción» para verter la *ἀναγωγή* aristotélica, que es la validación de un silogismo correspondiente a una figura dada por medio de la construcción de un silogismo correspondiente a otra figura, y reservamos el vocablo latino *reductio* para su *ἀπαγωγή*, que es un argumento del estilo de los de Zenón. Así, la reducción *per impossibile* será un caso de reducción en la que el nuevo silogismo equivale a una *reductio ad impossibile* de la negación de la conclusión del silogismo originario. Pero, por lo demás, también cabría considerar a la reducción *per impossibile* como un caso particular de aplicación de la regla lógica que nos dice que, si dos proposiciones implican una tercera, la falsedad de la tercera junto con la verdad de la primera (o la segunda) implica la falsedad de la segunda (o la primera). Aristóteles se aproxima bastante a la formulación de este principio, en conexión con su silogística, cuando afirma: «Es obvio, pues, que, si la conversión es falsa, alguna o todas las premisas lo habrán de ser también necesariamente» [144]. Pero el objetivo perseguido por su aserto es aquí diferente.

142 Ibid. I, 1 (24b22); I, 4 (26b28); I, 5 (28a4); I, 6 (29a14).
143 Ibid. I, 23 (41a26).
144 Ibid. II, 4 (57a36).

Aparte de la conversión y la reducción *per impossibile,* Aristóteles recurre a otro procedimiento llamado *écthesis* (ἔκθεσις), o exposición, para establecer algunas de sus fórmulas. La noción entra en juego por vez primera, aun sin ser empleada expresamente la palabra, a propósito de la conversión simple: «Si A no pertenece a ningún B, tampoco B pertenecerá a ningún A; pues si perteneciera a algún A, por ejemplo a Γ, no sería entonces cierto que A no pertenece a ningún B, ya que Γ es un B» [145]. *Ecthesis* es el nombre que se dará en otros lugares a la introducción del término extra Γ. Aristóteles maneja dicho vocablo en conexión con el modo *Darapti* de la tercera figura: «Es posible probarlo *per impossibile* y por *écthesis* (τῷ ἐκθέσθαι). Pues si Π y P pertenecen ambos a Σ y tomamos un Σ, por ejemplo N, tanto Π como P pertenecerán a N, de suerte que Π pertenecerá a algún P» [146]. Asimismo establece que la *écthesis* se puede emplear para la prueba de *Disamis* y *Datisi* [147], y da instrucciones para su uso en la prueba de *Bocardo*: «Cabe probarlo sin necesidad de *reductio* si se encuentra un Σ al que no pertenece Π» [148]. Desde los tiempos antiguos se ha discutido mucho acerca del sentido de estos pasajes. La cuestión en disputa es la de si el nuevo término introducido (Γ, por ejemplo, en nuestro primer pasaje) se ha de referir a un individuo o a una subclase incluida bajo B. Parece que se trata de una cuestión imposible de zanjar. Es casi seguro que, en la prueba de *Darapti,* Aristóteles pensaba en un individuo; pues de otro modo el argumento, como Alejandro puso de relieve, habría de ser circular [149]. Pero, en otros casos, el argumento exigiría más bien que se tratase de una subclase. Por fortuna, la cuestión es de escasa relevancia. El propio Aristóteles omite toda alusión a la *écthesis* a la hora de compendiar su silogística, y el único lugar en que aquélla juega un papel esencial es en la prueba de dos silogismos modales [150]. Pero, también aquí, una teoría de la modalidad más apropiada le habría permitido pasarse sin ella.

Muchos críticos han objetado la superfluidad de cualquier tipo de reducción, toda vez que los silogismos de la segunda y tercera figuras resultan suficientemente satisfactorios tal y como están. Esta sería una observación muy justa si lo que se tratara de contrarrestar fuese la creencia de que la reducción es el único modo de apreciar la cogencia de aquellos argumentos. Pero es difícil imaginar que Aristóteles sea menos consciente que sus críticos de las implicaciones de su propia teoría. En cualquier caso, si todo el interés del procedimiento se redujese a facilitar nuestra comprensión de determinados procesos de argumentación, la cuestión toda de la necesidad de la reducción sería una cuestión de la incumbencia de la psicología, más bien que de la lógica como Aristóteles parece sostener. Hay que pensar, por consiguiente, que la primera figura es para él la más fundamental en algún sentido plenamente objetivo del término. Se ha visto más arriba, ciertamente, que en Aristóteles influyó con toda probabilidad la consideración de que es la única figura en que el término medio se presenta como el eslabón central de una cadena de predicados a la usanza platónica. Mas, comoquiera que

145 Ibid. I, 2 (25a15-17).
146 Ibid. I, 6 (28a22-24).
147 Ibid. (28b14).
148 Ibid. (28b20-21).
149 *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (1), p. 99.
150 En relación con la *écthesis,* pueden ampliarse referencias en Alejandro, *op. cit.*, pp. 32-33, 99-100, 104. Cf. sobre este punto Sir David Ross, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*, p. 32; J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic*, pp. 59-67; G. Patzig, *Die Aristotelische Syllogistik*, pp. 166-80.

ello sea, el caso es que su tratamiento del tema de la reducción habría resultado un tanto ocioso si únicamente hubiese pretendido convencerse a sí mismo y convencer a sus lectores de la validez de los silogismos de la segunda y tercera figuras. Así, por ejemplo, se esforzó por mostrar que la reducción *per impossibile* podía ser aplicada universalmente (esto es, no sólo a aquellos casos que no admiten la reducción directa), e incluso tomó en cuenta la posibilidad de reducir los silogismos de la primera figura a los de la segunda o la tercera. Su más interesante resultado a estos efectos es la demostración de que todos los silogismos se pueden reducir a los silogismos de la primera figura con conclusión universal [151]. La trama de esta prueba consiste en hacer ver cómo los silogismos de la primera figura con conclusión particular se pueden reducir *per impossibile* a silogismos de la segunda figura, que a su vez son reducibles por conversión a silogismos de la primera figura con conclusión universal. Como él mismo detalla, la reducción completa de un silogismo de la tercera figura con una premisa particular envuelve los tres siguientes pasos: (I) reducción a un silogismo de la primera figura con una conclusión particular, (II) reducción *per impossibile* de este último a la segunda figura, (III) reducción a partir de la segunda figura a un silogismo de la primera con una conclusión universal [152]. Es evidente que al autor de esta teoría de la reducción no le preocupaba ni poco ni mucho la cogencia de los silogismos de la segunda o la tercera figuras. Su objetivo era idéntico al del geómetra que trata de construir un sistema deductivo partiendo de un pequeño número de axiomas y elige a estos efectos aquéllos que de algún modo le parecen los más «naturales».

La reducción *per impossibile* merece especial interés porque permite asociar los diversos modos en grupos de a tres, correspondiendo cada modo a distinta figura. Así, cada uno de los modos siguientes puede ser reducido a uno cualquiera de los otros mencionados en la misma tríada [153]:

1.1, 2.4 y 3.5 (*Barbara, Baroco*, y *Bocardo*)
1.2, 2.1 y 3.3 (*Celarent, Festino* y *Disamis*)
1.3, 2.2 y 3.6 (*Darii, Camestres* y *Ferison*)
1.4, 2.1 y 3.4 (*Ferio, Cesare* y *Datisi*).

Y tríadas similares se pueden construir para los modos que comportan el alcance existencial de sus premisas universales. Sirviéndonos de este procedimiento, junto con los de conversión y obversión (no admitido este último por Aristóteles), podríamos reducir cualquiera de los dieciocho modos válidos de las tres figuras aristotélicas a cualquiera de los restantes y, por lo tanto, a 1.1 (*Barbara*). Concedido el recurso a la obversión, la posibilidad de reducir todos los modos válidos a 1.1 se sigue de los resultados de Aristóteles reseñados en el párrafo anterior. Pues el principio rector de 1.2 (*Celarent*) podría reformularse del siguiente modo:

Si todo M es no-G y todo P es M, entonces todo P es no-G,

que constituye evidentemente un caso particular de 1.1. Pero para la reducción de los modos que envuelven la exigencia de alcance existencial se necesita, por supuesto, la autorización de la subalternación a partir de los

151 *An. Pr.* I, 7 (29b1) y I, 23 (40b17).
152 Ibid. I, 7 (29b6).
153 Para la elaboración aristotélica de tales resultados, cf. *An. Pr.* II, 8-10.

enunciados universales correspondientes. En resumen, quien acepte los diversos principios lógicos que intervienen en la reducción no necesita considerar como independientes, en el sentido técnico del vocablo, los principios que rigen los diferentes modos silogísticos.

En los siglos recientes se ha discutido mucho acerca de la esencia del razonamiento silogístico, habiéndose aducido fuera de contexto ciertos pasajes de Aristóteles, que nada tienen que ver con su doctrina del silogismo, en apoyo de tal o cual generalización. La fórmula que ha disfrutado a este respecto de una mayor aceptación es el *dictum de omni et de nullo*: «Lo que se predica de un todo se predica de cualquier parte de ese todo» [154], aunque también se ha argumentado en favor del adagio *Nota notae est nota rei ipsius*: «Lo que cualifica a un atributo cualifica a la cosa que lo posee» [155]. Ninguna de estas máximas permitiría dar satisfactoria cuenta del primer modo de la primera figura; mas no vale la pena discutirlas en detalle, ya que todo el debate parece haber surgido de un malentendido. Aristóteles formuló por separado un principio para cada uno de sus catorce modos, mostrando a continuación en su doctrina de la reducción de una figura a otra cómo los doce últimos podían ser derivados de los dos primeros. Quienes ignoran su doctrina de la reducción e insisten, en cambio, en preguntarse por un único principio del razonamiento silogístico no tienen idea clara de qué es lo que se traen entre manos.

A lo largo de sus escritos lógicos, Aristóteles siguió la práctica de expresar los principios correspondientes a los diversos modos silogísticos por medio de enunciados condicionales, tales como «Si todo M es G, y todo P es M, entonces todo P es G». Algunos de sus admiradores en la antigüedad posterior, como Galeno y Boecio, acostumbraron en cambio a presentar su obra mediante esquemas inferenciales, esto es, como una teoría en que las reglas de inferencia que la integran son exhibidas por recurso a armazones argumentales del tipo de «Todo M es G, y todo P es M; luego todo P es G», costumbre ésta que ha prevalecido en la mayor parte de los expositores modernos de la misma. Interesaba de algún modo, por lo tanto, retornar como aquí se ha hecho a la práctica originaria de Aristóteles. Pero sería probablemente equivocado conceder demasiada trascendencia a la apuntada distinción entre ambos modos de presentación. Pues, en efecto, en la concreta aplicación de su teoría Aristóteles razona como si sus enunciados condicionales constituyesen de hecho reglas de inferencia más bien que tesis lógicas. Así, al explicar su método de reducción *per impossibile*, lo que intenta no es mostrar que un enunciado condicional se siga de otro de acuerdo con el principio general:

Si (si P y Q, entonces R), entonces (si P y no-R, entonces no-Q),

sino más bien hacer ver que si alguien rechazase un determinado patrón de inferencia, pero aceptase al mismo tiempo otro patrón determinado, incurriría en contradicción. De ahí la comparación entre su propio método de reducción y el argumento que establece la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado. En la obra de Aristóteles escasean de hecho las indicaciones *acerca de* la forma condicional de los principios silogísticos, aunque

154 Supuestamente derivable de ibid. I, 1 (24b26).
155 Se ha creído ver origen en *Cat.*, 3 (1b10).

se hace por lo demás un *uso* muy frecuente de esa forma con el fin de expresar tales relaciones de inferencia o implicación entre enunciados.

Recientemente, Lukasiewicz ha tratado de representar la silogística de Aristóteles como un sistema deductivo (esto es, a la manera de los *Elementos* de Euclides) con cuatro axiomas específicos, a saber, dos principios silogísticos —1.1 (*Barbara*) y 3.4 (*Datisi*)— y dos leyes de identidad —«Todo X es X» y «Algún X es X» [156]—. El resultado de ese intento es en sí mismo sumamente interesante, pero difiere bastante de la concepción que el propio Aristóteles tenía de su obra. Y, para una exacta comprensión de la historia de la lógica, es importante apuntar tales diferencias.

En primer lugar, y aunque Aristóteles presentó sus principios silogísticos valiéndose para ello de enunciados condicionales por su forma, parece que no consideró el empleo de dicha forma más que como un recurso, entre otros, que le permitiera decir que ciertas premisas autorizan la inferencia de ciertas conclusiones. A diferencia de Lukasiewicz, no pensó nunca que su teoría silogística presupusiese un apartado más fundamental de la lógica en que ocuparse de las nociones de condicionalidad y negación. Y, cuando hablaba de la reducción de todos los silogismos a 1.1 (*Barbara*) y 1.2 (*Celarent*), lo que tenía *in mente* era un procedimiento semejante a la derivación arboriforme que ilustramos páginas atrás, más bien que la deducción de una tesis condicional a partir de otra.

En segundo lugar, Aristóteles estaba lejos de pensar que su tarea consistiese, como la de Lukasiewicz, en formular axiomas destinados a delimitar el sentido de signos relacionales tales como los medievales A e I. La universal y la particular afirmativas no gozaban para él de prioridad entre las cuatro formas del enunciado general; y, aunque sin duda supuso que sus términos generales no carecían de aplicación, se habría visto probablemente sorprendido y confundido de escuchar que su teoría presupone la segunda ley de identidad de Lukasiewicz.

En tercero y último lugar, es evidente por el modo como Aristóteles introduce la conversión que la consideraba una forma de argumentación independiente del silogismo. Mientras Lukasiewicz deriva los principios de la conversión a partir de axiomas que no parecen a primera vista tener que ver nada con ella, Aristóteles presentó esos principios, en el capítulo segundo de sus *Primeros Analíticos*, como evidentes para cuantos se hallasen familiarizados con el procedimiento de la *écthesis* y la noción de *reductio ad impossibile*. Es cierto que el curso de su exposición en el capítulo no es demasiado claro, y que el comentarista Alejandro de Afrodisia pensó que podía haber tratado acaso de servirse de un silogismo de la tercera figura más bien que de la simple *écthesis*. Pero el tipo de prueba aducido por Lukasiewicz para los principios de la conversión parece no haber sido concebido por primera vez sino hasta la Edad Media (quizás por el lógico inglés Kilwardby), y su adopción resulta inconsistente con el programa aristotélico de considerar a 1.1 (*Barbara*) y 1.2 (*Celarent*) como los principios básicos

156 J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic* (1ª ed., 1951).

de la silogística. Pues, en efecto, la prueba envuelve el uso de un silogismo de la segunda o la tercera figuras, que no puede a su vez ser reducido a uno de los dos patrones silogísticos fundamentales de Aristóteles sino por recurso a la conversión.

7. La lógica modal aristotélica.

Además de la teoría de los enunciados generales puros (o asertóricos) y de los silogismos construidos mediante ellos, Aristóteles elaboró una teoría de los enunciados y silogismos modales. Un enunciado modal es aquel que encierra palabras tales como «necesario» o «posible», o equivalentes de las mismas; y un silogismo modal es aquel en que al menos una de sus premisas constituye un enunciado modal. Los enunciados de la forma «Es necesario que-P» fueron llamados más tarde apodícticos; los de la forma «Es posible que-P», problemáticos; los desprovistos de una u otra cualificación, asertóricos. En lo que sigue adoptaremos esta terminología por razones de conveniencia.

La teoría de los enunciados modales se halla desarrollada en el *De Interpretatione*, capítulos 12 y 13, y los *Primeros Analíticos*, I, 3 y 13; la de los silogismos modales, en los *Primeros Analíticos*, I, 8-22. En el primero de estos pasajes, Aristóteles no explicita por qué se ocupa de la modalidad ni qué relación guarda esta última con la temática general de su obra; pero, al comienzo de su discusión de la silogística modal, detalla expresamente:

> «Puesto que hay diferencia entre simplemente pertenecer, pertenecer necesariamente y poder pertenecer (pues muchas cosas pertenecen a otras, pero no necesariamente, mientras que otras cosas no lo hacen así ni necesaria ni simplemente, sino tan sólo pueden pertenecer), resulta claro que ha de haber un silogismo en cada uno de dichos casos y que los términos del mismo se relacionarán unos con otros de distinta manera, según que las premisas permitan la aserción de una simple pertenencia, una pertenencia necesaria o una pertenencia posible» [157].

El texto precedente permite comprender por qué Aristóteles incluye la teoría de la modalidad en la teoría formal de la argumentación. En efecto, las nociones de posibilidad y necesidad gozan de esa completa generalidad que, según la *Retórica*, caracteriza a los *tópoi* dialécticos y retóricos [158]. Cualquier enunciado, sea cual sea la materia de que trate, se dejaría cualificar por los adverbios «posiblemente» o «necesariamente». Más aún, la distinción entre predicación necesaria y no-necesaria se halla a la base de la teoría de los predicables, donde un accidente (*συμβεβηκός*) se define como aquella característica que puede (*ἐνδέχεται*) o no pertenecer a alguna cosa dada, como el estar sentado, por ejemplo, podría pertenecer o no pertenecer a un cierto hombre [159].

Antes de examinar si Aristóteles acertó o no al considerar a la teoría de la modalidad como un capítulo de la teoría de la argumentación, hemos de preguntarnos qué entendía por necesidad y posibilidad; y antes aún de responder a esa pregunta, procederemos a esbozar el contenido de las secciones relevantes de su obra a que acabamos de aludir.

---

157 *An. Pr.* I, 8 (29b29-35).
158 Véase la cita correspondiente a la nota 29 del presente capítulo.
159 *Topica*, I, 5 (102b6).

En el capítulo 12 del *De Interpretatione,* Aristóteles se enfrenta con estas dos cuestiones: «¿Cuál es el adecuado contradictorio de un enunciado modal?» y «¿Modifican las partículas modales al predicado de una oración o a la oración en su conjunto?». La segunda cuestión no se halla claramente planteada, pero en el curso de la discusión de la primera aflora incidentalmente una posible solución.

La respuesta de Aristóteles a la primera pregunta consiste en hacer ver que la contradicción de «Es posible que-P» es «No es posible que-P» y no «Es posible que-no-P». Algo semejante sucede con «Es necesario que-P» y otras aserciones modales [160]. La posición de Aristóteles en este punto es obviamente correcta.

Por lo demás, Aristóteles incluye la contraposición de «verdadero» y «no-verdadero» en su lista de pares contradictorios, lo que constituye probablemente el primer precedente histórico del tratamiento de la verdad como una noción cuasi-modal.

Su respuesta a la segunda pregunta consiste en afirmar que las partículas modales se ha de entender que modifican la oración toda en que intervienen, más bien que una palabra o una cláusula aislada de esta última. Esta afirmación no está expresada con demasiada nitidez, pero la opinión de Aristóteles parece ser que hay que considerar a la cláusula subordinada como el sujeto de la oración modal, que en su conjunto se destina a afirmar o denegar la posibilidad, o alguna otra noción modal, de lo expresado por la cláusula subordinada. Una expresión como «es posible» jugaría, así, un papel análogo al de los verbos «ser» o «haber» en su uso existencial. Se la emplea para formular una aserción acerca de lo expresado por la cláusula subordinada; y, para denegar esta aserción, tendremos que aplicar la partícula negativa a la expresión modal y no a la cláusula, tal y como la negación de «Hay un hombre» es «No hay un hombre» y no «Hay un no-hombre» [161]. Hasta aquí, la analogía con los anuncios existenciales coadyuva a los propósitos argumentales de Aristóteles, pero la consideración de las oraciones asertóricas con verbo «ser» le tienta a generalizar que los contradictorios se forman siempre a base de la aplicación de la partícula «no» a dicho verbo, cuandoquiera y dondequiera que este último entre en juego. Los enunciados y cláusulas modales, sin embargo, constituyen una excepción a semejante regla. Pues, en efecto, la contradictoria de la cláusula «La posibilidad de que X sea» es «La imposibilidad de que X sea» y no «La posibilidad que X no sea». De este modo, Aristóteles llega al convencimiento de que, en los enunciados modales, la expresión modal constituye el predicado principal de la oración y resulta, por así decirlo, extrínseca más bien que intrínseca al resto de la misma. Idéntica observación hace Aristóteles en los *Primeros Analíticos* a propósito de la cláusula «Es contingente» [162], por lo que hay que pensar que ése es su punto de vista predilecto, aunque, como veremos, se desvíe de él en ocasiones.

También en este punto parece perfectamente correcta su posición y de ahí que nos sirvamos, a todo lo largo de nuestro examen de la modalidad, de las formas, por lo demás un tanto artificiosas, «Es posible (necesario,

160 *De. Int.* 12 (22a12).
161 Ibid. (21b26-32 y 22a8-11).
162 *An. Pr.* I, 3 (25b19-25).

etcétera) que-P», donde «P» indica el hueco o lugar vacío a rellenar mediante un signo proposicional. Tanto en griego como en castellano se cuenta con numerosos giros idiomáticos alternativos para expresar enunciados modales; por ejemplo, expresiones alternativas respecto de «Es necesario que X sea Y» serían «X ha de ser Y» o «X es necesariamente Y». Estas dos formas pudieran ambas resultar confundentes, especialmente la última, que parece dar idea de que la cualificación del término modal recae sobre el predicado. Para una persona que se sirviese del griego, esa falsa pista se vería propiciada, en particular a propósito de los enunciados apodícticos, por el empleo frecuente de cláusulas adverbiales como ἐξ ἀνάγκης («de necesidad», «por necesidad»). Los enunciados problemáticos, en cambio, no eran tan fáciles de expresar de esa manera, ya que en griego no hay ningún adverbio que corresponda al castellano «posiblemente»; en Aristóteles, al menos, lo más común es ver expresada la problematicidad mediante el verbo ἐνδέχεσθαι («ser lícito», «ser posible»).

En el capítulo 13 del *De Interpretatione,* Aristóteles se ocupa de esclarecer las relaciones lógicas que subsisten entre «Es posible (δυνατόν) que-P», «Es contingente (ἐνδεχόμενον) que-P», «Es necesario (ἀναγκαῖον) que-P), sus diversos enunciados contradictorios y las correspondientes expresiones con cláusulas subordinadas negativas, como, por ejemplo, «Es posible que-no-P», etcétera. El curso de sus consideraciones es bastante difícil de seguir, proviniendo la principal dificultad de que Aristóteles trata en un primer momento de combinar dos tesis contradictorias, a saber, (I) que «Es posible que-P» y «Es contingente que-P» se implican mutuamente [163] y (II) que «Es posible que-P» equivale a «No es necesario que-no-P» [164]. La contradicción surge del siguiente modo. «Es contingente que-P» implica «Es contingente que-no-P», de suerte que, si identificáramos posibilidad con contingencia, «Es posible que-P» implicaría «Es posible que-no-P». Ahora bien, «Es necesario que-P» implica evidentemente «No es necesario que-no-P»; esto es, implica, de acuerdo con la segunda tesis, «Es posible que-P». Pero, a su vez, «Es posible que-P» implicaba, de acuerdo con la primera tesis, «Es posible que-no-P». Habríamos llegado, por lo tanto, a la contradictoria conclusión de que «Es necesario que-P» implica «Es posible que-no-P». Para resolver esta dificultad, Aristóteles acaba finalmente estipulando la regla de que «posible» (δυνατόν) ha de considerarse compatible con «necesario». De hecho, «es posible» se sigue de «es necesario», si bien, por descontado, no todo lo que es posible es asimismo necesario [165].

A Aristóteles le habría convenido servirse de vocablos diferentes para expresar las nociones de lo que no es imposible y lo que no es ni imposible ni necesario. No es esto lo que hace, sin embargo, sino que en los *Primeros Analíticos* usa predominantemente ἐνδεχόμενον y otras formas verbales de la misma raíz, tratando esa expresión como sinónima de δυνατόν, y permitiéndole usufructuar dos sentidos, uno más restringido en que significaría «ni imposible ni necesario» y otro más laxo en que vendría a significar sencillamente «no imposible». Los siguientes pasajes son suficientemente explícitos a este respecto: «Llamo ser posible (ἐνδέχεσθαι) y lo posible (τὸ ἐνδεχόμενον) a aquello que no es necesario y cuya existencia podemos

163 *De. Int.* 13 (22a15).
164 Ibid. (23b20).
165 Ibid. (23a17).

suponer que no entraña imposibilidad. Por extensión, y en un sentido amplio, también se dice de lo necesario que es posible» [166]. Aquí, *τὸ ἐνδεχόμενον* se define, según vemos, como aquello que no es ni necesario ni imposible, pues sólo lo imposible entraña imposibilidad. Pero, en la última frase, Aristóteles autoriza un sentido lato del término en que lo necesario podría también decirse que es posible. El segundo pasaje reza así: «Por consiguiente, A posiblemente no pertenece a ningún B. Este silogismo no establece la posibilidad tal como la hemos definido, sino más bien en el sentido de la no-necesidad de dicha pertenencia, esto es, en el sentido de que A no pertenece necesariamente a ningún B (*τοῦ μηδενὶ ἐξ ἀνάγκης*)[167]. Aristóteles apunta ahora que la conclusión del silogismo en cuestión, «Es posible que ningún B sea A», quiere simplemente decir «No es necesario que todo B sea A», esto es, «No es imposible que ningún B sea A», y no «No es ni necesario ni imposible que ningún B sea A». En uno y otro contexto, por lo tanto, se manejan dos nociones distintas, por más que se haga uso de la misma palabra. Por nuestra parte, nos atendremos en lo que sigue a la interpretación de Sir David Ross y expresaremos la noción más estricta de Aristóteles mediante «es contingente que», reservando «es posible que» para dar a entender «no es imposible que».

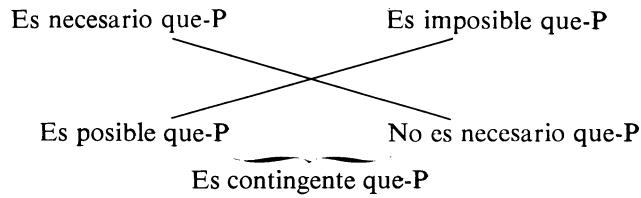
En los *Primeros Analíticos*, *ἐνδεχόμενον* significa, siempre que interviene en una premisa, «es contingente que»; cuando lo hace en una conclusión, como acabamos de ver, significa también a veces «es posible que», pero en tales casos Aristóteles advierte siempre dicha particularidad. Otras veces, usada esa expresión con *οὐδενί*, significa asimismo «es posible», como, por ejemplo, en *ἄνθρωπον οὐδενὶ ἵππῳ ἐνδέχεται* [168]. («No es posible para ningún caballo ser un hombre»). En todos estos casos, el sentido de nuestra expresión viene generalmente dado por el contexto.

Aristóteles se vio probablemente conducido por consideraciones metafísicas a hacer de la noción de contingencia, más bien que la de posibilidad, la noción clave de su teoría del silogismo problemático; pues la distinción entre lo necesario y lo imposible, por una parte, y lo meramente fáctico, por otra, reviste capital importancia para su metafísica. Mas su elección en tal sentido, aunque comprensible, es desafortunada desde un punto de vista lógico, ya que, como hemos visto, el enunciado de una contingencia es en definitiva un enunciado conjuntivo disfrazado, cuando lo cierto es que todos los enunciados silogísticos tendrían que ser simples según el propio Aristóteles.

Ni en los *Primeros Analíticos* ni en el *De Interpretatione* se aborda un análisis de las nociones de necesidad y posibilidad, pero sí se señala que cada una de ellas podría ser definida en términos de la otra con ayuda de la negación. Nosotros ya hemos visto que lo posible podía definirse como lo «no-necesariamente-no». Recíprocamente, lo necesario se puede definir como lo «no-posiblemente-no». Lo contingente sería entonces definible como lo que es posible y no necesario. Así pues, cabría definir todas las nociones modales a partir de las de necesidad o posibilidad y el com-

166 *An. Pr.* I, 13 (32a18-21).
167 Ibid. I, 15 (34b25).
168 Ibid. (34b13).

plemento de la negación. Las relaciones entre ellas quedarían esquemáticamente recogidas en el siguiente cuadrado de la oposición:



En el cuadrado se mantienen las relaciones de contradicción, contrariedad y subalteración tal y como en el de los enunciados asertóricos, definiéndose «Es contingente que-P» como la conjunción de los dos subcontrarios.

Hay un acuerdo general en considerar como confusa e insatisfactoria la teoría aristotélica de los silogismos modales, habiéndose conjeturado que se trata de una obra tardía e inacabada, insertada en los *Primeros Analíticos* mucho después de la terminación del resto del libro. Pero no es preciso acudir a esa conjetura para dar cuenta de sus deficiencias. Aristóteles no sólo se vio obstaculizado por su elección de una definición innecesariamente complicada de posibilidad, sino asimismo por el hecho de no contar con una adecuada lógica proposicional, como la que desarrollaron los estoicos un siglo más tarde, y la carencia de un perspicuo simbolismo. Su método de trabajo consiste en recorrer todos y cada uno de los modos asertóricos válidos, poniendo a prueba los nuevos silogismos resultantes de reemplazar una o las dos premisas asertóricas por proposiciones modales. El número de combinaciones posibles es crecido ($8 \times 14 = 112$), y aunque muchas se dejan resumir en una sola (como cuando Aristóteles reduce a un solo argumento los silogismos modales con dos premisas apodícticas correspondientes a todos los modos asertóricos, excepción hecha de *Baroco* y *Bocardo*) [169], la cantidad de argumentaciones que entran en juego a este respecto es todavía considerable, de suerte que el lector de esos capítulos tiene la inevitable sensación de que la maraña de árboles no deja ver el bosque. Y lo que es más, desde la época de sus propios seguidores inmediatos, como Eudemo y Teofrasto, se ha reconocido abiertamente que algunas de esas argumentaciones son en rigor harto dudosas.

Antes de entrar en el tratamiento de los silogismos modales por parte de Aristóteles, nos vamos a ocupar de su teoría de la conversión de los enunciados modales. En este punto, Aristóteles se deja guiar casi invariablemente por la idea del *De Interpretatione* de que las partículas modales cualifican a la totalidad de la proposición. Se sigue de ahí que, si una proposición implica otra, la necesidad, o la posibilidad, de la primera se extenderá asimismo a la segunda. Aristóteles se atiene a esta regla en su teoría de la conversión de los enunciados apodícticos, declarando que dichos enunciados se convierten exactamente de la misma manera que los correspondientes enunciados asertóricos [170].

Su teoría de la conversión de los enunciados problemáticos presenta dos peculiaridades. En primer lugar, permite un nuevo tipo de conversión, lla-

169 *An. Pr.* I, 8 (29b35 y ss.).
170 Ibid. I, 3 (25a27-35).

mada por Sir David Ross conversión complementaria [171]. Se trata de la inferencia que conduce de «Es contingente que-P» a «Es contingente que-no-P» [172]. Asimismo podremos inferir que, supuesto que una proposición sea contingente, su contraria será asimismo contingente. A la luz de la definición de contingencia antes propuesta, todo ello resulta irreprochable.

Pero Aristóteles mantiene también que el enunciado problemático universal y negativo no admite, si se le considera un enunciado contingente, la conversión simple, para lo que arguye [173]: «Es contingente que todo P sea G» implica, en virtud de la regla de la conversión complementaria, «Es contingente que ningún P sea G». Si se aceptase que este último enunciado implica «Es contingente que ningún G sea P», que a su vez implica «Es contingente que todo G sea P» por conversión complementaria, entonces «Es contingente que todo P sea G» implicaría «Es contingente que todo G sea P». Aristóteles juzga que éste no es el caso, presumiblemente sobre la base de que «Todo P es G» no implica «Todo G es P». Este último no constituye un argumento de peso, pues del hecho de que «Es contingente que-P» implique «Es contingente que-Q» no se sigue ciertamente que «P» implique «Q». Aristóteles, sin embargo, refuerza su argumento por medio de un ejemplo. Nos dice, así, que es contingente que ningún hombre sea blanco, pero no contingente que ninguna cosa blanca sea un hombre, puesto que necesariamente muchas cosas blancas no son hombres. Cuando habla de «muchas cosas blancas», Aristóteles piensa por ejemplo, según Alejandro, en cosas como la nieve o los cisnes [174]. Pero, si Alejandro está en lo cierto, la posición aristotélica resultará entonces chocante; pues, si la proposición convertida es falsa por el hecho de existir la nieve y los cisnes, también la proposición originaria ha de ser falsa por el hecho de existir hombres negros. En realidad, ambas proposiciones parecen verdaderas, ya que igualmente contingente es que no existan cisnes como que no existan negros.

Sería poco grato, tedioso y de ningún provecho someter la totalidad de la teoría aristotélica de los silogismos modales a un detallado examen crítico. Nosotros sólo vamos a ocuparnos con alguna extensión de dos apartados de la misma que han servido de punto de partida a ulteriores desarrollos lógicos.

Aristóteles parece andar completamente descaminado, o poco menos, en su teoría de los silogismos con premisas problemáticas. Nos dice en ella, por ejemplo, que los silogismos de la primera figura correspondientes al modo *Barbara* son válidos y arrojan una conclusión problemática cuando ambas premisas son problemáticas o cuando la mayor lo es, siendo asertórica la menor. Que no ocurre así puede apreciarse claramente con los siguientes pares de premisas:

(1) Es contingente que todo triángulo sea azul
Es contingente que toda cosa roja sea un triángulo

(2) Es contingente que todo animal sea bípedo
Todo hombre es un animal.

171 *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*, p. 298.
172 *An. Pr.* I, 13 (32a35 y ss.).
173 Ibid. I, 17 (36b35).
174 *In An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 220.

En cada uno de esos casos, la conclusión extraída de acuerdo con las instrucciones de Aristóteles sería evidentemente falsa, por más que las premisas sean todas verdaderas.

Aristóteles no prodiga los ejemplos en esta sección, lo que hace difícil detectar la fuente de su error. Pudiera suceder que, a despecho de sus declaraciones, estuviese considerando la contingencia como intrínseca a la proposición y dejándose extraviar por argumentos como éste:

Para todo mamífero es contingente el hecho de tener rojizo el pelo.
Todo hombre es un mamífero.
Luego para todo hombre es contingente el hecho de tener rojizo el pelo.

Este argumento es válido, y en castellano se entendería mejor bajo la siguiente formulación:

Todo mamífero puede tener o no el pelo rojizo.
Todo hombre es un mamífero.
Luego todo hombre puede tener o no el pelo rojizo.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que la premisa mayor no equivale a la proposición «Es contingente que todo mamífero tenga el pelo rojizo», que puede seguir siendo verdadera aunque haya mamíferos, como por ejemplo los zorros, que necesariamente tengan rojizo el pelo. Más todavía, aun admitiendo dicho análisis de las proposiciones problemáticas seguiría siendo inválido el silogismo con ambas premisas de este género, como lo deja ver la consideración del par siguiente de premisas:

Todo triángulo puede o no ser azul.
Toda cosa roja puede o no ser un triángulo.

Esta formulación muestra con claridad las dos falacias envueltas en la extracción de una conclusión problemática universal y afirmativa a partir de dos premisas del mismo género. La primera de ellas es la falacia del cuarto término, puesto que «poder ser un triángulo» es un término diferente de «ser un triángulo». La segunda consiste en suponer que, si las dos premisas son posibles por separado, tienen también que serlo conjuntamente tomadas. Aristóteles observa con acierto que lo implicado por lo posible ha de ser a su vez posible [175], pero de ahí no se sigue que lo implicado por un conjunto de premisas separadamente posibles haya de ser también posible.

Parece que Aristóteles fue consciente del peligro de incurrir en la falacia del cuarto término, pues da la sensación de tratar de escapar a ella al sugerir que a veces, aunque no siempre, «Todo B es posiblemente A» se ha de entender como «Todo lo que es contingentemente B es contingentemente A» [176]; y quizás fuese su designio que las premisas del silogismo con ambas problemáticas se entendieran de esta suerte. De acuerdo con esta interpretación, nuestro primer silogismo vendría a explayarse ahora como sigue:

Todo lo que puede o no ser un triángulo puede o no ser azul.
Todo lo que puede o no ser rojo puede o no ser un triángulo.

175 *An. Pr.* I, 15 (34a25-33).
176 *Ibid.* I, 13 (32b25 y ss.).

Luego todo lo que puede o no ser rojo puede o no ser azul.

Cabría argüir que, en este caso, la conclusión es verdadera y el silogismo válido; pero tampoco este recurso superaría completamente las dificultades con que Aristóteles tropieza, puesto que el silogismo con premisa menor asertórica continuaría siendo inválido aun si se interpretase de ese modo la mayor.

El segundo apartado de que nos vamos a ocupar es el tratamiento aristotélico de los silogismos con una premisa apodíctica y otra asertórica. Se trata de una cuestión que ha venido sembrando el desconcierto entre los lógicos desde los tiempos de Eudemo. Para facilitar nuestras referencias, nos serviremos de las abreviaturas A^n y E^n para designar, respectivamente, a una proposición apodíctica universal y afirmativa y a una proposición apodíctica universal y negativa [177]. Lo que Aristóteles afirma entonces en los *Primeros Analíticos*, I, 9, es, en efecto, que un silogismo de la forma A^nAA^n en la primera figura es válido, en tanto que uno de la forma AA^nA^n sería inválido; y, de manera semejante, que un silogismo de la forma E^nAE^n es válido, mientras que uno de la forma EA^nE^n sería inválido. Esta afirmación es sorprendente. Consideremos los ejemplos:

(1) Es necesario que ningún gato macho sea hembra.
Todo gato de color castaño es un gato macho.
Luego es necesario que ningún gato de color castaño sea hembra.

(2) Ninguna gata es de color castaño.
Es necesario que toda madre de un gato sea una gata.
Luego es necesario que ninguna madre de un gato sea de color castaño.

Cualquiera de nosotros concedería de buena gana que (2) es tan válido como (1) o, mejor, que (1) es tan inválido como (2). En rigor, Aristóteles tendría que haber rechazado por igual ambos silogismos; sin embargo, rechaza sólo (2), sobre la base de que, al combinar la conclusión con la premisa menor en un silogismo modal de la tercera figura correspondiente a *Felapton*, sería posible inferir «Es necesario que alguna gata no sea de color castaño», enunciado al que cabría objetar que excede en mucho la conexión meramente fáctica entre ambas características —la de ser una gata y ser de color castaño— establecida en la premisa mayor. Tal objeción no se suscita en el caso de (1), dado que la combinación de la premisa mayor y la conclusión, negativas ambas, no permite llevar a cabo ninguna inferencia. Es posible, no obstante, construir un argumento aceptable, aunque no enteramente silogístico, que demuestra que la admisión de la conclusión de (1) excede de lo establecido en su premisa menor en la misma medida exactamente que Aristóteles encontraba objetable a propósito de la premisa de (2). Partiríamos para ello de la irreprochable proposición «Es necesario que todo gato sea macho o hembra», de donde derivaríamos «Es necesario que todo gato no-hembra sea macho». Unido este enunciado al resultado de la obversión de la conclusión de (1), «Es necesario que todo gato de color castaño sea no-hembra», arrojaría —en el interior de un silogismo totalmente apodíctico correspondiente al modo *Barbara*— «Es necesario que todo gato de color castaño sea macho». Por consiguiente, si rechazamos (2) sobre la

177 Seguimos aquí la notación de Sir David Ross en su edición de los *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*. Véase en especial la tabla adjunta a la p. 286.

base de que aceptar su conclusión equivaldría a aceptar un enunciado apodíctico no implicado por su premisa mayor, tendremos asimismo que rechazar (1), ya que, si aceptásemos su conclusión, nos veríamos obligados a aceptar un enunciado apodíctico —más fuerte que el anterior— no implicado por su premisa menor. Aristóteles, por tanto, debería haber rechazado nuestros dos silogismos a la vez, que es a lo que de hecho invita una consideración intuitiva de la cuestión. ¿Qué erróneo razonamiento le indujo, pues, a aceptar (1)? Aristóteles escribe :

«Si A es considerado como necesariamente (ἐξ ἀνάγκης) perteneciente o no perteneciente a B, y B como simplemente perteneciente a Γ; y, si ésta es la disposición de las premisas, A necesariamente pertenecerá o no pertenecerá a Γ. Pues ya que A pertenece por necesidad a todo B y Γ es uno de los B, es evidente que una u otra de dichas relaciones regirá para Γ» [178].

Al parecer, Aristóteles se ha dejado aquí extraviar, como en el caso de los silogismos con premisas problemáticas, por su formulación adverbial de la modalidad, que le ha llevado a considerar la cualificación modal como intrínseca a la proposición. Esto es, en lo que piensa es en un silogismo de la forma:

Todo B es necesariamente-A.
Todo Γ es B.
Luego todo Γ es necesariamente-A.

Pero tal línea de pensamiento no está coherentemente mantenida, ya que conduce a la conclusión de que premisas de la forma «Todo B es A» y «Todo Γ es necesariamente-B» no permiten inferir nada (en vez de dar lugar a la inferencia, que Aristóteles concede, de una conclusión asertórica), pues en efecto encierran cuatro términos.

En resumidas cuentas, pues, no parece sino que Aristóteles, que en su teoría de la conversión de los enunciados modales se muestra generalmente inclinado hacia lo que podría llamarse la interpretación extrinsecista de la modalidad, se inclinase en su tratamiento de los silogismos hacia su interpretación intrinsecista. Se registra, por tanto, una cierta incongruencia entre ambas partes de la teoría [179], y la última de ellas es decididamente errónea. Si las partículas modales modifican predicados, no hay entonces necesidad de una teoría especialmente dedicada a los silogismos *modales*, pues los así llamados serían sólo silogismos asertóricos cuyas premisas contienen predicados de una índole peculiar. Si, por el contrario, las partículas modales modifican a los enunciados considerados como un todo, entonces no hay necesidad de una específica *silogística*, ya que las reglas que presiden las relaciones lógicas entre enunciados modales serían independientes de la naturaleza de las proposiciones gobernadas por las partículas modales en cuestión. Para decirlo de otra manera, los enunciados modales podrían ser todos ellos considerados no sólo como afirmativos, según ya vio Aristóteles, sino asimismo como singulares; o, dicho con mayor rigor, las distinciones

178 *An. Pr.* I, 9 (30a18 y ss.).
179 A. Becker, *Die Aristotelische Theorie der Möglichkeitschlusse*. Para una ulterior discusión de la silogística modal aristotélica, cf. también I. M. Bochenski, *La Logique de Théophraste*, pp. 67 y ss.; J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic*, pp. 133 y ss.; y J. Hintikka, "Necessity, Universality, and Time in Aristotle", *Ajatus*, XX (1957), pp. 65-90, y "An Aristotelian Dilemma", ibid. XXII (1959), pp. 87-92.

de cantidad entre enunciados no tienen aplicación en este dominio. De ahí que Aristóteles se equivocase cuando, deslumbrado por el descubrimiento del silogismo, trató de erigirlo en guía de su investigación de la lógica modal.

La base requerida para una lógica modal es una lógica de las proposiciones sin analizar, tal y como la que desarrollaron los estoicos [180]. A falta de ella, Aristóteles carecía de todo hilo conductor que le pudiera servir de orientación; pero es interesante destacar que fue a propósito de la lógica modal cuando por vez primera hizo uso de variables proposicionales, esto es, de letras reemplazables por signos proposicionales, más bien que términos, lo que casi produce la impresión de que las propias exigencias de su temática le estuviesen impulsando a la adopción del simbolismo pertinente. El pasaje a que nos referimos reza así:

«Primeramente hay que decir que si, al ser A, es necesario que B sea, entonces, si A es posible, será asimismo necesario que B sea posible. Pues supongamos que lo que llamamos A (τὸ ἐφ' ᾧ A) es posible y lo que llamamos B imposible. Si entonces lo posible, ya que es posible, llegara a ser, y lo imposible, siendo imposible, no llegara a ser, entonces sería posible para A llegar a ser sin B y, de este modo, puesto que era posible, ser ...

Más aún, cuando decimos que, si A es, B ha de ser, no hay que entender a A como algo singular, puesto que nada se sigue por necesidad de algo singular, sino de dos cosas al menos, como ocurre por ejemplo con las premisas cuando éstas se comportan en el silogismo del modo que hemos indicado. Pues si Γ rige para Δ y Δ para Z, entonces Γ regirá necesariamente para Z. Y si ambas premisas son posibles, la conclusión será entonces posible. De modo que, si llamamos A a las premisas y B a la conclusión, resultará no sólo que B es necesario si A es necesario, sino también que es posible si A es posible» [181].

Aristóteles establece aquí dos importantes tesis modales, a saber, que lo que se sigue de lo necesario es necesario y que lo que se sigue de lo posible es posible. Es la primera de estas tesis la que sirve de base al desarrollo de su teoría del silogismo con dos premisas apodícticas, el único apartado indudablemente correcto de la silogística modal aristotélica. La segunda tesis no es tan fructífera, en cambio, por lo que se refiere al desarrollo de la teoría del silogismo con dos premisas problemáticas; pues mientras la conjunción de dos premisas necesarias es ella misma necesaria, la conjunción de dos premisas posibles no es siempre posible.

El fragmento que acabamos de citar es digno de mención no sólo por el uso que se hace en él de variables proposicionales, sino asimismo por el hecho de reconocer expresamente la posibilidad de que un par de premisas constituya un único enunciado. Al mismo tiempo pone de manifiesto el carácter balbuciente de los escarceos de Aristóteles, cuya obsesión por el modelo silogístico le lleva a decir que nada se sigue de una única premisa y a suponer que la conjunción de dos proposiciones posibles tiene siempre carácter de posible. Pero, en cualquier caso, nuestro pasaje constituye un prometedor primer paso hacia la lógica modal, y otras tesis modales semejantes tampoco faltan en el resto de la obra de Aristóteles, aun en contextos alejados del *Organon*. Así, escribe por ejemplo en el *De Caelo*:

---

180 J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic*, p. 133.
181 *An. Pr.* I, 15 (34a5-24).

«No es lo mismo sentar una hipótesis falsa que una hipótesis imposible. Lo imposible se sigue de lo imposible. Un hombre tiene al mismo tiempo el poder de estar de pie y el poder de estar sentado, porque si puede lo uno puede también lo otro, pero no de manera que pueda estar de pie y sentado al mismo tiempo» [182].

Tenemos aquí una tesis modal formalmente derivable de la segunda de las tesis citadas en el fragmento anterior. Cabría formularla con más exactitud como «Sí 'P' implica 'Q' y es imposible que-Q, entonces es imposible que-P». Aristóteles reconoce abiertamente en el pasaje que dos proposiciones separadamente posibles no necesitan serlo conjuntamente tomadas y que, por consiguiente, cabría establecer una distinción entre posibilidad absoluta y relativa, paralela a la establecida entre necesidad absoluta y relativa en los fragmentos que siguen:

«No es lo mismo decir que toda cosa, cuando existe, existe necesariamente, que decir simple y absolutamente que dicha cosa necesariamente existe» [183].

«Se podría mostrar, mediante ejemplos escogidos al efecto, que la conclusión no es absoluta o simplemente (ἁπλῶς) necesaria, sino que es necesaria por relación a las premisas (τούτων ὄντων)» [184].

El reconocimiento de la distinción entre posibilidad absoluta y relativa se halla implícito en un pasaje, históricamente influyente, del *De Sophisticis Elenchis*, en que se explica en qué consiste la falacia de la composición:

«La falacia de composición surge en conexión con enunciados tales como 'El hombre que está sentado puede andar' y 'El hombre que no escribe puede escribir' Pues no es lo mismo decir que es posible que un hombre sentado ande si se toma la frase en sentido dividido (διελών) que si se la toma en sentido compuesto (συνθείς). De análoga manera, 'El hombre que no escribe puede escribir' querría decir, tomada en sentido compuesto, que dicho hombre podría escribir mientras no escribe; mas, si no se la toma en tal sentido, querría decir que, aun cuando no esté ahora escribiendo, ese hombre tiene posibilidad de escribir» [185].

La oportunidad de semejante distinción entre ambos usos, absoluto y relativo, de los términos modales resulta manifiesta, puesto que lo que es necesario por relación a algún otro enunciado no tiene por qué serlo considerado en sí mismo y lo que en sí mismo es posible no tiene por qué serlo en relación con todos los demás enunciados. Tanto en griego como en castellano se usan idénticas palabras para expresar nuestros dos géneros de posibilidad o de necesidad, y ello en definitiva es natural; pues todo caso de necesidad o posibilidad relativa podría ser expresado como un caso de necesidad o posibilidad absoluta. Si en la silogística, por ejemplo, una conclusión es necesaria por relación a unas premisas dadas, será absolutamente necesario que dicha conclusión sea verdadera si lo son las premisas. De modo semejante, si la verdad de «P» es posible por relación a «Q», la verdad de «P y Q» será posible en sentido absoluto. Pero, aunque natural, ese uso de los términos modales podría dar lugar a confusiones, dado que los enunciados de necesidad o posibilidad relativas son con frecuencia elípticos y cabría por ello malinterpretarlos como enunciados de necesidad o posibilidad absolutas.

---

182 *De Caelo*, I, 12 (281b14-18).
183 *De Interpretatione*, 9 (19a25-27).
184 *An. Pr.* I, 10 (30b32-33).
185 *De Sophisticis Elenchis*, 4 (166a22-30).

Aristóteles se muestra en parte consciente de estos hechos. Propone explícitamente la distinción entre necesidad absoluta y relativa, y no hay constancia de que confunda en la práctica una con otra. El pasaje del *De Interpretatione,* «Si es verdadero decir que ello es blanco o no es blanco, entonces es necesario que sea blanco o no lo sea» [186], que a menudo se cita como muestra de semejante confusión [187], es en rigor ambiguo y su ambigüedad se desvanece cuando se atiende al texto antes citado de la misma procedencia. En cambio, la distinción entre posibilidad absoluta y relativa, aunque inequívocamente reconocida de vez en cuando, sí planteó, como se ha visto, dificultades en la práctica a Aristóteles. Y éste nunca declara abiertamente que la necesidad o posibilidad relativas entrañen la necesidad o posibilidad absolutas.

La elaboración de una teoría de los silogismos modales con premisas apodícticas sería una tarea ociosa si no hubiese modo de distinguir entre proposiciones necesarias y universalmente verdaderas. Era de esperar, pues, que Aristóteles se detuviese a explicar la distinción entre necesidad y verdad universal; y así lo hizo en los *Analíticos Posteriores,* donde la predicación necesaria es caracterizada como no sólo universal(κατὰ παντός)sino asimismo esencial (καθ' αὑτό) [188]. La predicación κατὰ παντός se define como aquella predicación que se aplica a todo caso singular, definición ésta que coincide con la del mismo término en los *Primeros Analíticos* [189]. Mas es preciso admitir que los ejemplos de predicación κατὰ παντός que da el propio Aristóteles, a saber, «Todo hombre es un animal» y «Toda línea contiene un punto», constituyen proposiciones necesarias. La predicación καθ' αὑτό es definida como aquella que establece una conexión esencial [190], y los ejemplos de Aristóteles muestran que está pensando en enunciados que o bien son definiciones o bien se basan en definiciones, pues «punto» se halla esencialmente conectado con «línea» y otro tanto sucede con «par» e «impar» respecto de «número». Aristóteles continúa aquí ateniéndose a la distinción de los *Tópicos* entre definición y propiedad o conexión esencial y no esencial.

A la vista de estos hechos, un lector familiarizado con la filosofía posterior podría verse tentado de concluir que Aristóteles quería dar a entender con «necesario» lo que algunos lógicos modernos quieren dar a entender con «analítico». Tal conclusión iría descaminada, porque el adjetivo «analítico» se asocia de ordinario, en los últimos tiempos, a la idea de una convención lingüística, asociación esta última absolutamente extraña a la noción aristotélica de necesidad. Su teoría de la definición no es quizás absolutamente transparente, pero lo cierto es que concibe a la definición, tal y como Platón lo hacía, como definición de algo objetivo, de suerte que cualquier definición sería para él correcta o incorrecta. Una definición correcta equivale a una proposición verdadera y puede ser usada como premisa de una demostración. La demostración, nos dice, no involucra Formas a la usanza platónica, pero involucra un universal o naturaleza común:

«Así pues, la demostración no entraña necesariamente la existencia de Formas ni de un Uno aparte de lo Múltiple, pero sí entraña necesariamente la posibilidad de predicar con verdad una unidad de una multiplicidad; ya que, sin esa posibilidad,

186 *De Interpretatione,* 9 (18a39-18b1).
187 Así lo ha hecho, por ejemplo, J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic,* p. 152.
188 *An. Post.* I, 4 (73b25-28).
189 *An. Pr.* I, 1 (24b28).
190 *An. Post* I, 4 (73a34 y ss.).

no habría universal (τὸ καθόλου) y, sin universal, tampoco habría término medio, con lo que la demostración sería imposible. Concluiremos, por tanto, que ha de haber algo uno e idéntico, inequívocamente predicable de una pluralidad de individuos» [191].

Es este universal o naturaleza común lo que para Aristóteles constituye el objeto de la definición. De nuevo aquí nos encontramos, una vez más como en el caso de Platón, con la imagen de una cadena de universales conectados entre sí por medio de definiciones y cuyas necesarias conexiones se supone que hacen posible el razonamiento demostrativo, silogístico, de la ciencia.

Hemos visto que Aristóteles distingue entre premisas universales simplemente verdaderas y premisas universales necesarias. De modo semejante, cuando usa la voz ἀνάγκη para indicar la conexión entre premisas y conclusión no está queriendo simplemente decir que, allí donde sean verdaderas las premisas de esos géneros, lo sea también alguna conclusión del mismo género. No hay ningún testimonio de que fuera ése su designio. Lo más probable es que otorgase a la palabra ἀνάγκη idéntico significado cuando ésta interviene en una premisa que cuando indica el nexo entre premisas y conclusion. Pero, aunque dicha identificación sea correcta, ambos usos encierran una importante diferencia que Aristóteles no explicitó.

Consideremos el silogismo:

Todo animal es necesariamente mortal.
Todo hombre es necesariamente un animal.
Luego necesariamente todo hombre es necesariamente mortal.

De acuerdo con la teoría de Aristóteles, el adverbio «necesariamente» en el interior de las premisas indica las conexiones esenciales que se dan entre la animalidad, la mortalidad y la humanidad; y es fácil pasar de ahí a la creencia de que el «necesariamente» que introduce la conclusión no es sino una nueva indicación de lo mismo. Si reemplazásemos, no obstante, los términos de las premisas por variables, como el propio Aristóteles lo hace, veríamos que ése no puede ser el caso:

Todo M es necesariamente G.
Todo P es necesariamente M.
Luego necesariamente todo P es necesariamente G.

Pues, en efecto, el «necesariamente» que sirve ahora de introducción a la conclusión esquemática no podría ser expresión de ninguna conexión entre los términos concretos del ejemplo que antes utilizábamos. Resultaría apropiado a esos efectos si recurriésemos de nuevo a cualesquiera otros términos en lugar de las variables, e incluso lo sería si reemplazásemos las premisas modales por premisas meramente asertóricas. Mas eso quiere decir que la presencia del adverbio al frente de la conclusión de un silogismo no está entonces justificada por ninguna conexión definitoria entre sus términos, sino tan sólo por la índole de la conexión lógica representada mediante el «todo ... es» y, en el caso específico de los silogismos modales, mediante las intervenciones del propio adverbio en régimen de subordinación. Con otras palabras, se trata en dicho caso de una necesidad formal más bien

[191] Ibid. I, 11 (77a5 y ss.).

que material. Aunque Aristóteles *hace uso* de semejante distinción (envuelta en su empleo de variables), no parece haber cobrado conciencia de la misma con la suficiente penetración como para llegar a formularla.

De cuanto llevamos visto se desprende que la inclusión del estudio de la modalidad en las investigaciones lógicas de Aristóteles estuvo justificada por dos razones. En primer lugar, ya que podemos distinguir entre lo necesariamente verdadero y lo verdadero meramente *de facto*, así como entre lo meramente falso y lo imposible, y ya que semejantes distinciones, como la que se da entre verdad y falsedad, se aplican por igual a toda suerte de proposiciones, cualquiera que sea su contenido, la teoría de las inferencias dependientes del carácter modal de las proposiciones formará parte de la teoría general de la inferencia válida, esto es, de la lógica. En segundo lugar, el propio examen de la lógica impone ineludiblemente el recurso a las modalidades. Pues, en efecto, las conexiones formales a que en lógica se presta atención acostumbran por su naturaleza a describirse como *necesarias;* y, al tratar de explicar en qué consiste la validez de un silogismo, se dice comúnmente que es *imposible* que las premisas sean verdaderas siendo falsa la conclusión. Incluso si la indagación de estas nociones, tal y como se *usan* en la lógica, fuese encomendada a una ciencia diferente, llamada por ejemplo metalógica, habría en definitiva que seguirla considerando como una prolongación natural de la lógica. Corresponde a Aristóteles el mérito de haber dado inicio a dicha indagación; y el detalle de los defectos de su propia teoría no debe sorprendernos en una obra que, como la suya, se asomaba por vez primera a un territorio completamente inexplorado.

8. La lógica no-silogística en los *Analíticos*.

Hemos visto que Aristóteles no nos ofrece en ningún caso una teoría de los enunciados condicionales que pueda servir de infraestructura a su silogística, pero en los *Primeros Analíticos* hay un par de argumentos que a veces se han citado como tesis relativas a la forma condicional. En realidad, sería mejor considerarlos como verdades lógicas acerca de la implicación o necesidad relativa, comoquiera que deseemos expresar esta última. En la terminología moderna diríamos que se trata de los principios de contraposición y transitividad. El primero de ellos se introduce en el curso de una discusión del aserto de que premisas verdaderas no pueden implicar una conclusión falsa, aunque premisas falsas puedan implicar una conclusión verdadera. Es éste uno de los pocos pasajes de la obra aristotélica en donde se hace uso de variables proposicionales, y el principio en cuestión podría quedar transcrito como sigue:

> *Si dado que-P es necesario que-Q, entonces dado que-no-Q es necesario que-no-P* [192].

El segundo principio es presentado a través de un ejemplo, pero podríamos asimismo formularlo como sigue mediante variables proposicionales:

> *Si dado que-P es necesario que-Q y dado que-Q es necesario que-R, entonces dado que-P es necesario que-R* [193].

---

192 *An. Pr.* II, 2 (53b12).
193 Ibid. II, 4 (57b6).

Con ayuda de estos dos principios, considerados como reglas de inferencia, Aristóteles trata de demostrar que una proposición y su contradictoria no pueden ambas implicar la misma conclusión [194]. Su argumentación resulta fuera de lugar en el pasaje en que se desenvuelve. Asimismo resulta un tanto oscura, porque se halla explicitada por medio de un ejemplo; pero cabría formalizarla como a continuación se indica. Supóngase que tenemos

(1) Dado que-P, es necesario que-Q

y

(2) Dado que-no-P, es necesario que-Q.

En ese caso, y gracias al principio de contraposición, se podría obtener de (1) la consecuencia

(3) Dado que-no-Q, es necesario que-no-P.

De donde, en combinación con (2), cabría obtener por el principio de transitividad la ulterior consecuencia

(4) Dado que-no-Q, es necesario que-Q.

Pero tal conclusión, piensa Aristóteles, es absurda, lo que permite demostrar que (1) y (2) no pueden ser ambas verdaderas. La derivación de (4) a partir de (1) y (2) es, por supuesto, perfectamente válida, pero Aristóteles se equivoca al pensar que (4) constituye un absurdo. Por el contrario, el establecimiento de (4) supondría un resultado sumamente interesante, puesto que equivaldría a una demostración de la necesidad absoluta de que-Q. Semejante demostración ha jugado un papel importante no sólo en filosofía sino asimismo en matemáticas, y en el próximo capítulo veremos que fue objeto de una atención considerable por parte de los lógicos de la escuela estoica. Nada hay en el pasaje de Aristóteles que revele la existencia de una precedente discusión de la cuestión, pero resulta tentador conjeturar que su digresión pudiera dirigirse contra alguna doctrina de cuño megárico. Lo que Aristóteles ataca, en efecto, no es sino la contrapartida positiva de la *reductio ad impossibile* de Zenón, y la tradición de la dialéctica zenónica perpetuábase en tiempos de Aristóteles en el círculo de sus rivales filosóficos los megáricos. Por lo demás, el ejemplo mejor conocido de semejante tipo de razonamiento, con anterioridad a los *Primeros Analíticos*, no procede de una fuente megárica, sino de una obra primeriza del propio Aristóteles conocida bajo el nombre de *Protréptico*. Deseando allí demostrar que la necesidad de cultivar la filosofía es en rigor ineludible, Aristóteles escribe: «O debemos filosofar o no debemos hacerlo. Si debemos hacerlo, entonces debemos hacerlo. Si no debemos hacerlo, entonces también debemos hacerlo [a saber, en orden a justificar semejante punto de vista]. Así pues, en cualquier caso debemos filosofar» [195].

Que Aristóteles no reconoció la forma condicional del enunciado, ni el género de argumentación que sobre ella descansa, como un objeto de investigación lógica comparable al silogismo, se desprende inequívocamente

---

194 Ibid. (57a36-57b17).

195 *Aristotelis Fragmenta*, ed. V. Rose, frag. 51; W. D. Ross, *Select Fragments of Aristotle*, p. 27. Este fragmento, así como el pasaje de los *An. Pr.* II, 4, mencionado en la nota precedente, han sido estudiados por W. Kneale en "Aristotle and the *Consequentia Mirabilis*", *Journal of Hellenic Studies*, LXXVII, I (1957), pp. 62-66.

de su tratamiento de los llamados argumentos «a partir de hipótesis» (ἐξ ὑποθέσεως). La cuestión debatida en este punto exigía una expresa consideración de los diversos tipos de argumentos con una premisa condicional, pero Aristóteles formula sus distinciones al respecto desde otras perspectivas. Las formas básicas de argumentación en que entra en juego una premisa condicional son los dos argumentos que habrían luego de llamarse *modus ponendo ponens* y *modus tollendo tollens*, esto es, argumentos de las formas «Si P, entonces Q; pero P; luego Q» y «Si P, entonces Q; pero no-Q; luego no-P». La segunda se dejaría obviamente ejemplificar mediante una *reductio ad impossibile*, tal como la demostración de que la diagonal del cuadrado es inconmensurable como el lado del mismo. En tres lugares diferentes caracteriza Aristóteles semejante *reductio* como un caso de razonamiento a partir de hipótesis [196], y en el primero y el tercero de ellos se ocupa de apuntar las diferencias existentes entre la *reductio* y la otra especie de argumento hipotético. Cuando no se trata de una *reductio*, nos dice, el razonamiento a partir de hipótesis comienza con la admisión o concesión de que, si una cierta proposición es verdadera, se sigue entonces la conclusión deseada. A continuación, se demuestra silogísticamente la primera proposición introducida en sustitución, esto es, como suplente (μεταλαμβανόμενον) de la conclusión y de ese modo queda ésta establecida ἐξ ὑποθέσεως. Por ejemplo, se concede de entrada que, si la facultad de los contrarios no es siempre una y la misma, la ciencia de los contrarios tampoco será siempre una y la misma; luego, se demuestra silogísticamente que la facultad de los contrarios no es siempre una y la misma; de donde se desprende que la ciencia de los contrarios tampoco será siempre una y la misma [197]. A juzgar por las apariencias, la hipótesis es el enunciado condicional inicialmente concedido. Con este tipo de razonamiento constrasta Aristóteles la *reductio ad impossibile* [198], advirtiendo que en ella no se requiere de ninguna concesión inicial, sino que el asentimiento se halla garantizado «porque la falsedad es obvia» (διὰ τὸ φανερὸν εἶναι τὸ ψεῦδος). De nuevo aquí tiene presente el argumento que demuestra la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado.

Todo esto suena extraño y resulta confuso. Sin duda, para clasificar los argumentos con premisas condicionales es posible servirse de más de un criterio de distinción. El criterio relevante desde el punto de vista lógico es el que tiene en cuenta si la segunda premisa constituye la afirmación del antecedente o la negación del consecuente de la premisa condicional (esto es, el que atiende a las formas *ponendo ponens* y *tollendo tollens*). Pero también cabría acudir a otros criterios, de corte epistemológico más bien que estrictamente lógico, como el que atiende a las razones de aceptación de las premisas. Aristóteles parece ignorar el primer tipo de criterio, limitándose a distinguir entre aquellos casos en que hay que conceder de antemano la premisa condicional y aquellos otros en que la segunda premisa (como la que afirma, por ejemplo, que un número impar no es igual a un número par) constituye una verdad obvia.

El origen de la confusión radica en el constante afán aristotélico de determinar cuántos de entre los pasos de un argumento dado se pueden

196 *An. Pr.* I, 23 (40b25); I, 29 (45b15); y I, 44 (50a32).
197 Ibid. I, 44 (50a29).
198 Ibid. (50a31 y ss.).

reducir a forma silogística. En un pasaje anterior, Aristóteles había sentado que todo argumento válido envuelve razonamiento silogístico, aun cuando no sea enteramente reducible a éste último [199]; y el nombre de «hipótesis» parece constituir la denominación genérica reservada a un enunciado que desempeña un papel esencial en un argumento, pero que no entra a formar parte de ningún silogismo ni tan siquiera en orden a permitir su formulación condicional. Así tendríamos, por ejemplo:

(1) Si la facultad de los contrarios no es siempre una y la misma, la ciencia de los contrarios no es siempre una y la misma (*Hipótesis que se supone inicialmente concedida*).
La facultad de los contrarios no es siempre una y la misma (*Demostrable silogísticamente*).
Luego la ciencia de los contrarios no es siempre una y la misma (*Conclusión obtenida por un procedimiento no-silogístico*).

(2) Si la diagonal y el lado son conmensurables, un número impar será igual a un número par (*Resumen abreviado de un silogismo en forma condicional*).
No es el caso que un número impar sea igual a un número par (*Exclusión de una hipótesis abviamente falsa*).
Luego la diagonal y el lado no son conmensurables (*Conclusión obtenida por un procedimiento no-silogístico*) [200].

Aunque Aristóteles era consciente de que hay diversas clases de argumentos válidos que no se dejan reducir a forma silogística, no acertó en cambio, que sepamos, a ofrecer un análisis formal de ninguno de ellos. Nuestro autor promete ocuparse más detalladamente de las variedades de argumentos a partir de hipótesis (en el sentido amplio de «hipótesis» que se acaba de indicar) [201]; y en un lugar reseña dos formas de los mismos, los argumentos *κατὰ μετάληψιν* y *κατὰ ποιότητα* [202]. Pero no los estudia ulteriormente en ninguna de las obras que han llegado a nosotros, y tampoco podemos estar seguros de que esas expresiones tuvieran para él el mismo significado que para su discípulo Teofrasto. Aristóteles no incluye en su vocabulario una denominación específica para el enunciado condicional, no se sirve jamás del adjetivo *ὑποθετικός* a esos efectos ni llega a distinguir entre enunciados o silogismos categóricos e hipotéticos. La teoría de aquellos argumentos cuya validez depende del funcionamiento de las oraciones condicionales u otras oraciones complejas fue en la antigüedad la obra de los estoicos. Aristóteles y su escuela, fascinados por el hallazgo de la silogística, hicieron pocos progresos en esa dirección, aunque —como veremos en el próximo apartado— debamos a sus discípulos alguna aportación en cumplimiento de la promesa del maestro.

9. La escuela aristotélica: Teofrasto.

Tras la muerte de Aristóteles, sus obras fueron reunidas y editadas por sus discípulos. El editor jefe fue presumiblemente Teofrasto, su sucesor al frente del Liceo. También este filósofo escribió por su cuenta obras

199 Ibid. I, 23 (40b23).
200 Ibid. (41a28).
201 Ibid. I, 44 (50a39).
202 Ibid. I, 29 (45b17).

de lógica. Ninguna de ellas ha llegado hasta nosotros, pero por referencias de comentadores posteriores parece que se ocupaban principalmente de desarrollar y perfeccionar la presentación de la doctrina del maestro. Algunas de sus contribuciones han sido incorporadas al acervo de la tradición aristotélica y merecen ser reseñadas en este capítulo.

En primer lugar, se atribuye a Teofrasto la adición de cinco modos indirectos a la primera figura silogística [203]. Se trata de modos cuyo término medio oficia de sujeto en una premisa y de predicado en la otra, pero cuyos términos mayor y menor aparecen respectivamente como sujeto y predicado de la conclusión. Los principios correspondientes a esos modos son:

1. 5. *Si todo M es G y todo P es M, entonces algún G es P* (Baralipton).
1. 6. *Si ningún M es G y todo P es M, entonces ningún G es P* (Celantes).
1. 7. *Si todo M es G y algún P es M, entonces algún G es P* (Dabitis).
1. 8. *Si todo M es G y ningún P es M, entonces algún G no es P* (Fapesmo).
1. 9. *Si algún M es G y ningún P es M, entonces algún G no es P* (Frisesomorum).

Como el comentarista Alejandro de Afrodisia puso de relieve, Teofrasto se limita en este punto a la elaboración de algunas observaciones incidentales de Aristóteles en los *Primeros Analíticos* [204] y no hay que suponer que creyese estar haciendo otra cosa que sistematizar sus enseñanzas. Con posterioridad, los cinco modos fueron asignados a una cuarta figura en que el término medio actúa de predicado en la premisa que contiene al predicado de la conclusión y de sujeto en la otra premisa. Para presentar nuestros principios en la forma requerida por esta innovación, sólo necesitamos transponer las premisas, modificando a tenor de ello la posición de las variables «G» y «P»:

4. 1. *Si todo G es M y todo M es P, entonces algún P es G* (Bramantip).
4. 2. *Si todo G es M y ningún M es P, entonces ningún P es G* (Camenes).
4. 3. *Si algún G es M, y todo M es P, entonces algún P es G* (Dimaris).
4. 4. *Si ningún G es M y todo M es P, entonces algún P no es G* (Fesapo).
4. 5. *Si ningún G es M y algún M es P, entonces algún P no es G* (Fresison).

Si añadimos el modo subalterno al que corresponde el principio:

4.21. *Si todo G es M, y ningún M es P, entonces algún P no es G* (Camenos),

obtendremos seis modos válidos en esta figura, esto es, el mismo número de modos de cada una de las figuras reconocidas por Aristóteles; pero los

203 *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), pp. 69 y ss.
204 *An. Pr.* I, 7 (29a19) y II, 1 (53a8).

modos que requieren la concesión de alcance existencial a sus premisas universales (4.1, 4.21 y 4.4) serían en este caso tres en vez de dos.

Se ha discutido acaloradamente acerca de la existencia de una cuarta figura independiente, mas no está nada claro qué es lo que se persigue demostrar en esa discusión. A veces se habla de ello como si la disputa versase acerca del modo como la gente argumenta de ordinario. Si el problema fuese éste, el modo apropiado de resolverlo consistiría en embarcarnos en una encuesta empírica a gran escala, pero tendríamos que admitir en dicho caso la posibilidad de que la cuarta figura resultase un modo natural de argumentar según ciertas personas y no así, en cambio, según otras. Con otras palabras, ¡tendríamos que admitir la posibilidad de que la cuarta figura exista para las primeras, pero no para las segundas! Que los argumentos incluidos por algunos lógicos en la cuarta figura son válidos es algo que el propio Aristóteles dejó sentado expresamente, y la cuestión de si pertenecen o no a una figura autónoma dependerá sin duda de nuestra definición de lo que sea una figura. Si las figuras han de caracterizarse por el papel que el sujeto y el predicado de la conclusión desempeñan en las premisas, entonces es seguro que habremos de admitir cuatro figuras. Mas no era así como Aristóteles concebía la caracterización de las figuras. Para él, el sujeto y el predicado de la conclusión constituían respectivamente los términos menor y mayor en un orden de generalidad. Nosotros hemos visto que esta manera de describir las cosas resultaba insatisfactoria para cualquiera de los silogismos por él reconocidos, con la única excepción de los correspondientes al primer modo de la primera figura; mas, comoquiera que ello sea, resulta desde luego incompatible con el reconocimiento de una cuarta figura en la que el predicado de la conclusión aparezca como sujeto en su premisa, en tanto que el sujeto de la conclusión lo haga en la suya como predicado. Es este rasgo de la cuarta figura lo que determina su «falta de naturalidad»; pues, en efecto, nosotros no acostumbramos a presentar nuestras premisas de modo que *ambos* términos de la conclusión intervengan en ellas con sus papeles invertidos. Pero si se interpretan las figuras silogísticas como patrones diferentes de argumentación, dotado cada uno de fisonomía propia, también habrá por ello mismo que considerar a la cuarta como algo aparte de las demás, ya que la reducción *per impossibile* de sus modos no nos saca del interior de la figura como ocurría con la segunda y la tercera.

En segundo lugar, Teofrasto es recordado por un interesante intento de simplificación de la teoría de la modalidad. De diversos pasajes del comentario de Alejandro a los *Primeros Analíticos* parece desprenderse que Teofrasto entrevió las dificultades del tratamiento aristotélico de la cuestión, ofreciéndonos una definición según la cual «Es posible que-P» no implicaría «No es necesario que-P». Rechazaba por tanto como inválida la conversión complementaria [205]. Tal conclusión era obligada para Teofrasto, puesto que su teoría de la modalidad se ocupa de enunciados de posibilidad y no de contingencia. Asimismo sostenía, en contra de Aristóteles, que la proposición problemática universal y negativa admite la conversión simple. También en este punto es acertada su posición, y las razones que alega en su defensa —según Alejandro las refiere— resultan interesantes:

---

[205] *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 159.

«Si es posible que A no pertenezca a ningún B, entonces es posible que B no pertenezca a ningún A. Pues ya que es posible que A no pertenezca a ningún B, se sigue que, al no darse semejante pertenencia, A podrá ser separado (ἀπεζεῦχθαι) de todos los B (τῶν τοῦ B). En ese caso, también B quedaría separado de A» [206].

El argumento parece sugerido por algún género de diagrama espacial, reflejando quizá por vez primera el recurso a tales diagramas como instrumentos auxiliares de la reflexión lógica.

La tradición atribuye asimismo a Teofrasto una simplificación de la doctrina de los silogismos modales. Según Alejandro, Teofrasto mantenía que la conclusión de un silogismo modal reviste siempre el carácter de la más débil de las dos premisas [207]. Se sobreentiende aquí que el enunciado de una realidad de hecho es más débil que el de una necesidad y que el enunciado de una posibilidad es más débil que el de una realidad de hecho. A título comparativo, Alejandro apunta que el silogismo con una premisa particular ha de detentar una conclusión particular y el silogismo con una premisa negativa ha de detentar una conclusión negativa. Se trata, como puede pensarse, de la primera formulación histórica de la regla *Sectetur partem conclusio deteriorem*. La reforma de Teofrasto elimina aquellas tesis de la lógica modal aristotélica que resultaban insatisfactorias, simplificándola notablemente en su conjunto.

Por desgracia, las modificaciones por él introducidas tornan incoherente su propio sistema [208]; pues parece imposible mantener a un mismo tiempo la vigencia irrestricta de la regla *Sectetur partem conclusio deteriorem*, la aplicabilidad del principio aristotélico de reducción indirecta y la validez de ciertos modos reconocidos por Teofrasto. De acuerdo con el testimonio de Alejandro, Teofrasto aplicó la reducción indirecta por lo menos a algunos silogismos modales [209], lo que habría resultado chocante de no haberse admitido previamente la generalización del principio. Pero admitía también la validez de ciertos modos con una premisa asertórica y otra problemática, cuya conclusión sería problemática de acuerdo con la regla *deteriorem partem*.

En lo que sigue vamos a servirnos del mismo simbolismo que antes para representar las dos formas de la primera figura específicamente mencionadas por Alejandro [210], «PA^{n}G» simbolizará una proposición apodíctica universal y afirmativa, «PO^{p}G» una proposición problemática particular y negativa, etc. Tendríamos entonces las siguientes formas silogísticas:

(1*a*)	MA^{p}P	(2*a*)	MAG
	PAM		PA^{p}M
	PA^{p}G		PA^{p}G.

La inconsistencia surge como a continuación se indica. Ya que la contradictoria de una proposición de la forma «PA^{p}G» es de la forma «PO^{n}G»,

206 Ibid. p. 220.
207 Ibid. p. 124.
208 I. M. Bochenski, *La Logique de Théophraste*, p. 101.
209 *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 123.
210 Ibid. p. 173.

obtendríamos por la regla de reducción indirecta de los silogismos antes expuesta las dos formas siguientes:

(1*b*)	PO^nG	(2*b*)	MAG
	PAM		PO^nG
	MO^nG		PO^nM.

Cada una de ellas, sin embargo, atentaría contra la regla que prescribe la debilidad de la conclusión. Es evidente, pues, que no podemos retener dicha regla conjuntamente con el principio de reducción indirecta y la validez de los silogismos originarios. La salida consiste obviamente en rechazar estos últimos; y, en efecto, es fácil construir contraejemplos que acrediten su invalidez. Así, tendríamos:

(1*a*) Todos los caballos pueden ser negros.
Todos los alazanes son caballos.
Luego todos los alazanes pueden ser negros.

(2*a*) Todos los miembros del Gobierno tienen más de cuarenta años.
Todos los miembros del Parlamento de menos de cuarenta años pueden ser miembros del Gobierno.
Luego todos los miembros del Parlamento de menos de cuarenta años pueden tener más de cuarenta años.

Nuestra solución plantea la cuestión de la interpretación de la regla *deteriorem partem*. Cabría interpretarla en un sentido fuerte como si su misión fuera proporcionarnos un oportuno medio de derivar silogismos modales a partir de silogismos puramente asertóricos. Así interpretada, la regla vendría a decirnos: «Dado cualquier silogismo asertórico válido, le corresponderá un silogismo modal válido —cualquiera que sea la cualificación modal de sus premisas— siempre que la modalidad de la conclusión concuerde con la de la premisa más débil». La regla facilitaría en dicho caso una enorme simplificación de la teoría de los silogismos modales, pero conduce —como vimos— a una inconsistencia. Por otra parte, cabría interpretarla —tal y como sucede con la correspondiente regla para el silogismo asertórico— a título de condición necesaria, aunque en modo alguno suficiente, de la validez de los silogismos modales. Posiblemente era así como Teofrasto la concebía, habiéndola ideado con ocasión de su rechazo de la forma aristotélica A^nAA^n discutida más arriba. Entendida de este modo, la regla únicamente simplifica la teoría en el sentido de imponer una limitación adicional al número de posibles formas válidas, sin ofrecer en cambio ningún procedimiento definido para determinar estas últimas. En realidad, se requería una comprensión mucho más precisa de las nociones modales antes de que pudiera resolverse la cuestión de dar con una regla semejante.

Nos queda preguntarnos qué motivos impulsaron a Teofrasto a aceptar los dudosos silogismos antes expuestos si es que no interpretó la regla *deteriorem partem* en su sentido fuerte. Una respuesta podría ser que se dejó extraviar por ejemplos engañosamente plausibles de los mismos, así como por la confusión entre posibilidad absoluta y relativa. Para hacernos idea de cómo estos factores pudieron contribuir a la confusión, consideremos el siguiente silogismo, de la misma forma que el silogismo inválido (1*a*) citado más arriba:

Todos los microorganismos son posiblemente dañinos para los seres humanos.
Todos los mohos son microorganismos.
Luego todos los mohos son posiblemente dañinos para los seres humanos

Dejando a un lado ahora complicaciones que pudieran surgir de la consideración de la modalidad como una cualificación interna, cabría entender aquí «posible» en dos sentidos diferentes. En primer lugar, la cualificación pudiera afectar a la conclusión aisladamente considerada, queriendo por ejemplo decir que ésta es «consistente (i.e., no contradictoria) en sí misma». En este sentido, la conclusión es verdadera, pero no formalmente derivable de las premisas, como veíamos por el contraejemplo en que de dos premisas consistentes derivábamos una conclusión inconsistente sirviéndonos de la misma regla. Este último sentido es, sin embargo, el único sentido de «posible» que resulta de veras relevante para la teoría de los silogismos modales, en que la conclusión de un silogismo se considera *demostrada* si, y sólo si, se deja desprender de las premisas. Mas si entendemos «posible» en ese segundo sentido, esto es, en el sentido de «posible en relación con las premisas» (o «consistente con ellas»), entonces la conclusión sería en efecto posible, pero lo mismo ocurriría con cualquier otra proposición que no sea inconsistente con las premisas en cuestión, de suerte que igualmente podríamos concluir en nuestro silogismo:

Luego todos los quesos son posiblemente comestibles.

Por nuestra parte ya hemos reparado en una distinción paralela entre necesidad absoluta y relativa. El paralelismo queda de manifiesto cuando se considera un silogismo equivalente, en virtud de la regla de la reducción indirecta, a nuestro silogismo inválido (2*a*):

Todos los miembros del Gobierno tienen más de cuarenta años.
Necesariamente algunos miembros del Parlamento de menos de cuarenta años no superan los cuarenta años de edad.
Luego necesariamente algunos miembros del Parlamento de menos de cuarenta años no son miembros del Gobierno.

De nuevo aquí el razonamiento tiene las trazas de aceptable, pero tal sensación obedece al carácter ambiguo de «necesariamente» en la conclusión. La presencia del adverbio ni tan siquiera es obligada para que nuestra conclusión pueda considerarse necesaria en relación con las premisas, pero eso es sin más lo que sucede con la conclusión de cualquier silogismo válido. En sí misma considerada, la conclusión no es necesaria ni se ha demostrado que lo sea. Aristóteles, como se puso de relieve más arriba, reparó en esta circunstancia a propósito de la forma EA^{n}E de la segunda figura. Mas lo que pasa es que, sin darnos cuenta, nos dejamos influir por el hecho de que un enunciado sea relativamente necesario para aceptarlo sin más como absolutamente tal.

Es posible que debamos a Teofrasto una tercera y notable contribución a la lógica, consistente en el desarrollo de la doctrina del silogismo hipotético a partir de las insinuaciones de Aristóteles en su tratamiento de los argumentos (*ἐξ ὑποθέσεως*). No podemos atribuirle dicha contribución con absoluta certidumbre, pues los testimonios de la misma son escasos y bas-

tante confusos. Algunos de los descubrimientos mencionados bajo aquel encabezamiento podrían deberse al propio Aristóteles, aunque permanecieran inéditos en vida suya, mientras otros se deberían quizás a Eudemo u otros miembros de la escuela aristotélica. Al comenzar el tratamiento aristotélico de los argumentos a partir de hipótesis, Alejandro nos informa de que Teofrasto mencionó las variedades de argumentaciones hipotéticas contenidas en los *Analíticos* y de que otros discípulos de Aristóteles, Eudemo entre ellos, escribieron acerca de las mismas [211]. Alejandro aplica el vocablo ὑποθετικός tanto a las premisas [212] cuanto a los argumentos completos [213], contraponiéndolo a κατηγορικός. Aquél no reviste, sin embargo, el mismo sentido que para nosotros detenta el adjetivo «hipotético» (i.e., «condicional»), sino que significa «complejo(a)» cuando se aplica a un enunciado o premisa y «en posesión de por lo menos una premisa compleja» cuando se aplica a un argumento. Argumentaciones hipotéticas en este sentido de la expresión vendrían a declararse entonces las argumentaciones:

(1) a partir de una premisa condicional (διὰ συνεχοῦς, ὃ καὶ συνημμένον λέγεται, καὶ τῆς προσλήψεως ὑποθετικούς);
(2) a partir de una premisa disyuntiva (διὰ τοῦ διαιρετικοῦ τε καὶ διεζευγμένου);
(3) a partir de la negación de una conjunción (διὰ ἀποφατικῆς συμπλοκῆς);
(4) por analogía o similaridad de relaciones (ἐξ ἀναλογίας);
(5) por grados de una cualidad (κατὰ ποιότητα ὁ ἀπὸ τοῦ μᾶλλον καὶ ἧττον καὶ ὁμοίως).

No sabemos qué es lo que Aristóteles y sus discípulos entendían exactamente bajo los epígrafes (1), (2) y (3). Pero, en cualquier caso, no pudieron ir muy lejos en su tratamiento de los mismos, ya que el estudio de estos apartados de la lógica se consideraba en la antigüedad como una innovación de cuño estoico y Boecio diría expresamente que los peripatéticos no habían obtenido grandes frutos en ese dominio [214]. Que no obstante trabajaron en él parece confirmarlo la existencia de una terminología de origen no estoico, e independiente de esta orientación, para la discusión de los enunciados disyuntivos y condicionales. En la lista del párrafo anterior, Alejandro transcribe por igual las denominaciones técnicas de una y otra procedencia, colocando en segundo lugar la terminología de los estoicos como si se tratase de la más conocida. Y Galeno nos informa de que la terminología no estoica era de uso corriente entre los lógicos más antiguos, esto es, anteriores a los estoicos [215]. Ello debe querer decir que fue introducida por Aristóteles o sus discípulos.

En su descripción de (1), Alejandro se sirve de la voz πρόσληψις para designar la premisa no-condicional de lo que hoy llamaríamos un argumento correspondiente al *modus ponendo ponens*. Al comentar por otra parte el pasaje en que Aristóteles menciona casualmente los argumentos κατὰ μετάληψιν como una variedad de argumentos a partir de hipótesis, identifica

211 Ibid. pp. 389 y ss.
212 Ibid. p. 324.
213 Ibid. p. 390.
214 *De Syllogismo Hypothetico*, I, ed. Migne, col. 831 C.
215 *Institutio Logica*, ed. Kalbfleisch, pp. 8 y 32.

πρόσληψις con *μετάληψις*, añadiendo que los aristotélicos llamaban *μετάληψις* a lo que los modernos (esto es, los estoicos) llaman *πρόσληψις*[216]. Ambos vocablos podrían significar «algo tomado en adición», y para los estoicos la *πρόσληψις* constituía la premisa adicional de un argumento en el que la premisa principal era compleja[217]. Por ejemplo, en un argumento de la forma «Si lo primero, entonces lo segundo; pero lo primero; luego lo segundo», el enunciado representado por «lo primero» sería la *πρόσληψις*. En el pasaje en que identifica el significado de los dos vocablos, Alejandro parece estar pensando en un argumento de esa suerte, como lo muestra el ejemplo siguiente:

Si el alma siempre mueve, el alma es inmortal.
El alma siempre mueve.
Luego el alma es inmortal.

De acuerdo con la práctica usual en los aristotélicos de enfatizar la importancia del silogismo, Alejandro apunta que la *πρόσληψις* se demuestra silogísticamente por recurso al término medio «semoviente», pero su explicación da en su conjunto la sensación de que interpretaba el argumento aristotélico *κατὰ μετάληψιν* como correspondiente al tipo (1). En este pasaje, sin embargo, Alejandro no menciona a Teofrasto; y, en otro pasaje en que sí lo hace expresamente en conexión con las premisas y los argumentos *κατὰ πρόσληψιν*, el razonamiento en cuestión parece ser de un tipo diferente. Según Alejandro, las premisas que Teofrasto llamaba *κατὰ πρόσληψιν* son de la forma «*A* se predica de todo aquello de lo que *B* se predica universalmente»[218]. Y nos explica que tales premisas encierran potencialmente un tercer término, aunque no de un modo claro y definido. Se llaman presumiblemente *κατὰ πρόσληψιν* porque ese tercer término es añadido en la otra premisa. Asimismo nos dice que, de acuerdo con Teofrasto, las premisas *κατὰ πρόσληψιν* difieren sólo por su modo de expresión (*τῇ λέξει μόνον*) de las premisas categóricas ordinarias. Una afirmación por el estilo la encontramos en un escoliasta anónimo que nos informa de que Teofrasto consideraba a tales premisas como potencialmente equivalentes a premisas categóricas[219]. Este escoliasta nos relata asimismo que Teofrasto construía silogismos distribuidos en tres figuras a partir de tales premisas, pero únicamente transcribe la forma de la premisa principal en cada caso. Tan sólo en una fuente tropezamos con un silogismo completo de este género. Sucede así en un escolio atribuido a la escuela de Ammonio, comentarista alejandrino del siglo VI d. C., que lleva el interesante título de «Sobre todas las formas del silogismo»[220]. El silogismo *κατὰ πρόσληψιν* de la primera figura es:

Substancia es universalmente predicable de cuanto es universalmente predicable de hombre.
Pero animal es universalmente predicable de hombre.
Luego substancia es universalmente predicable de animal.

---

216 Ibid. p. 324.
217 Ibid. p. 263.
218 Ibid. p. 378.
219 *Scholia in Aristotelem*, ed. Brandis, 189b43.
220 Ammonio, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* IV (VI), Praefatio, p. XII.

Se trata de un argumento del tipo que los lógicos posteriores han llamado argumentos por sustitución y separación. No cabe reducirlo a forma silogística, por más que guarde alguna relación con el silogismo:

Todo animal es una substancia.

Todo hombre es un animal.

Luego todo hombre es una substancia.

Puede ser derivado de este último convirtiendo, primero, en indeterminado al término medio y combinando, luego, ambas premisas en una sola premisa principal. La nueva segunda premisa reintroduciría entonces al término medio sustituyéndolo por el indeterminado «cuanto (es ...)» de la nueva premisa principal, y la conclusión resultaría equivalente a la premisa mayor del silogismo originario. Los escoliastas parecen haber creído que Teofrasto derivó las otras dos figuras mediante la aplicación de operaciones similares a silogismos categóricos de la segunda y tercera figuras, pues en cada caso se dice que es el término medio el indeterminado y las formas correspondientes a las nuevas premisas principales vendrían a ser:

Fig. 2. Lo que se predica de A se predica asimismo de B.
Fig. 3. De aquello de lo que se predica A se predica también B [221].

Lo peculiar de las premisas proslépticas es envolver generalizaciones acerca de especies o géneros de cosas, en tanto que las generalizaciones envueltas en las premisas categóricas de los silogismos ordinarios recaen exclusivamente sobre individuos. En algunos pasajes de los *Primeros Analíticos*, sobre los que Teofrasto parece haber basado su discusión de la cuestión, Aristóteles entrevió la necesidad de generalizaciones específicas o genéricas dentro de las *premisas* [222], pero ni él ni Teofrasto trataron de expresarlas mediante variables, sin duda porque ambos se servían ya de letras para representar términos en su esquematización de las formas de los *argumentos*. En consecuencia, hubieron de confiar esos efectos a los recursos de los pronombres relativos griegos. Por ejemplo, en lugar de decir «Si A no pertenece a ningún δ, B pertenece a todo δ», empleando una clase especial de variable para desempeñar el nuevo cometido, Aristóteles escribía ᾧ τὸ A μηδενὶ ὑπάρχει, τὸ B παντὶ ὑπάρχει (literalmente, «B pertenece a todo aquello a nada de lo cual pertenece A») [223]. Semejantes expresiones resultan inevitablemente oscuras en griego, pero Aristóteles parece esforzarse en un pasaje por hacer ver que tales fórmulas envuelven dos niveles de generalización, ya que el pronombre antes expresado por medio de «aquello» y de «lo cual» no se ha de interpretar como si en realidad se refiriera a una única especie o género, sino a todas las especies o géneros que satisfacen una determinada condición, lo que a su vez es expresable mediante «todo (aquello, lo cual)», «nada (de aquello, de lo cual)», etc. [224]

Cuando las premisas proslépticas se expresan —como veíamos más arriba— recurriendo para ello a variables, resulta claro que han de diferir a tenor de la posible distribución de las cuatro formas categóricas en sus antecedentes y consecuentes. Aristóteles reconoce por lo menos dos varian-

221 *Scholia in Aristotelem*, loc. cit.
222 Por ejemplo, *An. Pr.* I, 27 (43b25); II, 5 (58a29, 59b9).
223 Ibid. II, 5 (58a29).
224 Ibid. I, 41 (49b14).

tes, respectivamente expresadas por medio de las fórmulas «Si todo δ es B, entonces todo δ es A» y «Si algún δ es B, entonces algún δ es A». Pero las tres figuras ya enumeradas envuelven 48 modelos de premisas proslépticas, y habría 64 si admitiéramos una cuarta figura ejemplificada por «Si todo δ es B, entonces todo A es δ» [225]. Sólo unas pocas de entre ellas aparecen en escritos antiguos, pero es el caso que una muestra de la cuarta figura ha logrado sobrevivir [226].

Se atribuye a Teofrasto la afirmación de que «A pertenece a todo aquello a lo que B pertenece universalmente» equivale a «Todo B es A» y de que «A no pertenece a nada de aquello a lo que B pertenece universalmente» equivale a «Ningún B es A» [227]. Pero Aristóteles supo al menos de la primera de esas equivalencias; pues sostenía que de «A pertenece a todo aquello a lo que pertenece B», junto con «B pertenece a algún Γ», es posible inferir «A pertenece a algún Γ», argumento que equivaldría a un silogismo en *Darii* [228]. Carecemos de pruebas que atestigüen que Teofrasto sustuviera que todas las premisas proslépticas resultan equivalentes a premisas categóricas, pero si lo hizo así se hallaba en un error. De las 64 formas mencionadas, 27 equivalen a formas categóricas reconocidas por Aristóteles, en tanto que otras 8 son equivalentes a la forma «Todo no-X es Y», que es categórica aunque no fue reconocida como tal por Aristóteles; mas 28 de esas formas requieren que por lo menos uno de los términos definidos abarque totalmente a los demás o sea vacío, y la última requiere simplemente que ninguno de dichos términos sea vacío. Así, en el ejemplo dado más arriba de la figura 2 la premisa resulta equivalente a «Todo B es A», y en el de la figura 3 a «Todo A es B»; mas en el de la figura 1 la premisa principal no equivale a una premisa categórica ordinaria, ya que requiere que el término que ocupa la posición de «substancia» sea omniabarcante. No es, pues, accidental que «substancia» aparezca donde lo hace en nuestro único ejemplo conocido de esta forma. Es posible que en la antigüedad se tuviese conciencia de algunos de estos hechos, pues Galeno sostiene que los silogismos proslépticos son superfluos [229]. Pero es difícil creer que haya llegado a semejante conclusión de una manera rigurosa y metódica, siendo probable que —a falta de un adecuado empleo de variables al respecto— la cosa no pasase de una mera intuición.

Todavía es teóricamente posible una nueva forma de premisa prosléptica en la que el antecedente o el consecuente, o ambos, constituyan conjunciones de cláusulas particulares afirmativas y negativas. Parece como si los autores antiguos hubiesen tenido que recurrir en ocasiones a dicha forma, y ésta da idea de ser la interpretación más natural de la cláusula dependiente en *ᾧ τὸ* A *οὐ παντὶ ὑπάρχει, τοῦτὸ τῷ* Γ *τινὶ ὑπάρχει* («Aquello a todo lo cual no pertenece A pertenece a algún Γ; esto es, si algún, pero no todo, δ es A, algún Γ es δ») [230]. Mas las premisas de esta forma parecen conducir en todos los casos a paradojas e incluso contradicciones.

---

225 Cf. C. Lejewski, "On Prosleptic Syllogisms", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, II (1961), pp. 158-167.
226 Filopón, *In Aristotelis An. Pr. Commentaria*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* XIII (II), p. 422.
227 Alejandro, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 378.
228 *An. Pr.* I, 41 (49b31).
229 *Institutio Logica*, p. 47.
230 Filopón, loc. cit.

En vista de que tanto Aristóteles como Teofrasto fueron conscientes de la equivalencia entre al menos ciertas formas de premisas proslépticas y las correspondientes proposiciones categóricas ordinarias, resulta sorprendente la afirmación galénica de que los peripatéticos creían en la utilidad de los silogismos proslépticos [231]. Es posible que elaboraran algún sistema en el que las premisas proslépticas carentes de contrapartida categórica fuesen utilizadas sometiendo a alguna restricción, explícita o sobreentendida, la sustitución del término indeterminado, de suerte que quedasen evitadas las aludidas consecuencias paradójicas.

Otro apartado interesante en la lista de los silogismos hipotéticos de Alejandro es (4), acerca del cual nos proporciona más información en otro lugar [232]. Los argumentos correspondientes a ese epígrafe fueron llamados a veces silogismos totalmente hipotéticos (δι' ὅλων ὑποθετικοί) o con tres proposiciones hipotéticas (διὰ τριῶν). Se dice que Teofrasto los ordenó en tres figuras, ofreciendo los cinco ejemplos siguientes de argumentos pertenecientes a las mismas:

1. 1. *Si A, entonces B; si B, entonces Γ; luego si A, entonces Γ.*
1. 2. *Si A, entonces B; si B, entonces Γ; luego si no Γ, entonces no A.*
2. 1. *Si A, entonces B; si no A, entonces Γ; luego si no B, entonces Γ.*
2. 2. *Si A, entonces B; si no A, entonces Γ; luego si no Γ, entonces B.*
3. 1. *Si A, entonces Γ; si B, entonces no Γ; luego si A, entonces no B.*

Alejandro cita como ilustración de 1.1 el argumento «Si existe un hombre, existe un animal; si existe un animal, existe una substancia; luego si existe un hombre, existe una substancia». El mismo argumento había sido propuesto por Aristóteles como ejemplo de razonamiento de forma no silogística en sentido corriente [233]. De modo que también en este punto parece razonable afirmar que Teofrasto se limitaba a desarrollar aspectos de la obra del maestro, aunque poniendo acaso orden en la enseñanza no escrita de los últimos años de Aristóteles. Esta impresión quedaría confirmada por una consideración más detallada de las fórmulas precedentes. Pues parece estar claro que se inspiran en una reflexión sobre las figuras del silogismo categórico expuestas por Aristóteles. La primera de dichas fórmulas se corresponde obviamente con un silogismo del primer modo de la primera figura, y la fórmula asignada por Teofrasto a su tercera figura se corresponde de manera no menos obvia con un silogismo categórico del primer modo de la segunda figura. De hecho, resulta incluso sorprendente que Teofrasto no tratara de hacer resaltar esa correspondencia numerando sus figuras como las de los silogismos categóricos. Es interesante reparar en que las variables de las fórmulas teofrásticas se destinan aparentemente a indicar lugares que habrían de ser rellenados por términos generales, sobreentendiéndose el añadido de palabras tales como «existe» cuando éstas no se incluyen expresamente. Alejandro nos dice que Teofrasto llamó a todos estos argumentos «silogismos por analogía», ya sea debido a la semejanza formal entre las tres proposiciones envueltas en los mismos o porque sólo arrojaban conclusiones condicio-

231 *Institutio Logica*, loc. cit.
232 Op. cit., *C.I.A.G.* II (I), p. 326.
233 *An. Pr.* I, 32 (47a28).

nales y no constituían, por consiguiente, auténticos silogismos en el sentido aristotélico de demostrar que algo es el caso o no lo es [234]. Ninguna de estas razones es demasiado convincente para explicar tal denominación; mas si Teofrasto tuvo en cuenta la primera de ellas, habríamos de considerarle familiarizado con lo que los lógicos modernos han llamado la transitividad de la implicación. En cualquier caso, lo que está claro es que no hablaba de argumentaciones por analogía en el moderno sentido de la expresión.

De acuerdo con la versión de Alejandro, Teofrasto se sirvió de esquemas inferenciales en su doctrina de los silogismos totalmente hipotéticos. Al tratar de los silogismos categóricos, Aristóteles había formulado un principio para cada modo válido por medio de un enunciado condicional. Muchos expositores modernos acostumbran a escribir «Todo M es G; y todo P es M; luego todo P es G». Mas ésta no es la práctica de Aristóteles y parece haber sido introducida por Teofrasto, pues Aristóteles seguía su propio método incluso en el dominio de los silogismos hipotéticos, a juzgar por el ejemplo al que se hizo antes mención. Ambos procedimientos son, por descontado, equivalentes en cuanto a sus efectos, ya que los enunciados condicionales de Aristóteles han de entenderse como principios necesariamente verdaderos por razones de orden lógico, en tanto los esquemas inferenciales de Teofrasto se han de entender como si fuesen precedidos del preámbulo «Cualquier argumento de una de las siguientes formas es válido». Comoquiera que nos sirvamos de los mismos, por lo tanto, estaremos formulando un enunciado de segundo orden, esto es, un enunciado acerca de otros enunciados. Pero la diferencia entre uno y otro modo de proceder es importante con vistas a ciertos desarrollos ulteriores de la lógica.

De la explicación de Alejandro se desprende que un argumento del tipo (5), esto es, κατὰ ποιότητα, es un argumento *a fortiori* con una premisa general condicional [235]. El ejemplo que Alejandro propone es el siguiente:

> Si aquello que parece más suficiente para la felicidad no es en realidad suficiente, tampoco lo será lo que parece menos suficiente para ello.
> La salud parece más suficiente para la felicidad que la riqueza y, sin embargo, no es del todo suficiente.
> Luego la riqueza no es suficiente para la felicidad.

La teoría de los argumentos κατὰ ποιότητα constituía probablemente un intento de sistematizar los que Aristóteles consideró argumentos *a fortiori* en diversos pasajes de sus *Tópicos*.

Todas las contribuciones de Teofrasto mencionadas hasta el momento parecen consistir en reelaboraciones de las doctrinas de Aristóteles, pero un escoliasta nos informa de que aquél discrepaba de su maestro en un pequeño punto no carente de interés [236]. Aristóteles había mantenido que una palabra como «todo» no se podía aplicar con propiedad al predicado de una proposición [237]. Al comentar esta tesis, el escoliasta nos dice que Teofrasto argüía que, si no se pudiera aplicar a un predicado ninguna pre-

---

234 Cf. Ibid., 23 (40b23).
235 *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 265.
236 *Aristotelis Organon Graece*, ed. Waitz, I, p. 40.
237 *De Interpretatione*, 7 (17b16).

cisión adicional (προσδιορισμός) del género de lo que hoy día se llaman cuantificadores, nos veríamos frecuentemente imposibilitados para expresar lo que deseamos, como sucedería por ejemplo si tuviésemos que decir «Fenias carece de ciencia» en lugar de «Fenias carece de *toda* ciencia». Está claro que lo que Teofrasto defiende aquí no es la cuantificación del predicado tal y como Sir William Hamilton la propugnara a mediados del siglo pasado, sino la tesis harto más interesante de que es posible aplicar un cuantificador a una palabra o expresión general que no tendría por qué ser ni sujeto ni predicado del enunciado en que entra en juego. Aristóteles podría haber replicado que la proposición de Teofrasto es susceptible de reformulación mediante el enunciado «Alguna ciencia no es poseída por Fenias», en que el cuantificador recaería ahora sobre el sujeto. Mas semejante recurso no sería viable allí donde haya que echar mano de dos distintos cuantificadores, como sucedería a propósito del enunciado «*Algún* hombre no posee *toda* ciencia»; y no hay que olvidar que tales enunciados múltiplemente generales son muy frecuentes en la ciencia y en la filosofía, como acontece por ejemplo con la formulación del principio «*Todo* suceso tiene *una* causa». Para decirlo en dos palabras, la teoría aristotélica de los enunciados generales únicamente se ocupa de aquellos que guardan un parecido superficial con el modelo sujeto-predicativo de los enunciados singulares del tipo de «Sócrates es blanco», por más que entre los primeros quepa de hecho una considerable variedad de formas diferentes. Pero esta moraleja sólo pudo extraerse muchos siglos más tarde.

III. LOS MEGARICOS Y LOS ESTOICOS

1. La filosofía megárica y los orígenes de la lógica estoica.

Dos grandes escuelas lógicas se distinguieron a todo lo largo de la antigüedad: la peripatética, heredera de Aristóteles, y la estoica, cuyo desarrollo fue impulsado por Crisipo sobre la base de las enseñanzas de los megáricos. Resulta mortificante pensar en lo poco que la tradición ha permitido conservar de la obra de estos últimos filósofos, pues lo que de ellos ha llegado hasta nosotros acredita considerable perspicacia y merece desde luego un trato más justo que el que los historiadores han acostumbrado dispensarle.

Mientras la teoría lógica de Aristóteles se vio estimulada, según todos los indicios, por la reflexión acerca de los procedimientos vigentes en el dominio de la geometría, los megáricos parecen haber concentrado su atención en la dialéctica zenónica y las diatribas argumentales de la vida cotidiana que dieron lugar a lo que Platón y Aristóteles llamaban erística. Por lo menos, es fácil imaginar cómo los rasgos característicos de su modo de argumentar podrían haber tomado origen de ese interés predominante, y tenemos por otra parte pruebas de la presencia en ellos de una herencia eleática. De Euclides, el fundador de la escuela megárica, se cuenta que se aplicó al estudio de la obra de Parménides [1]; y de Diodoro Cronos, uno de sus más destacados miembros, se dice que elaboró argumentos contra la posibilidad del movimiento [2]. Es asimismo significativo que la lógica estoica fuese conocida en la antigüedad bajo el nombre de dialéctica [3].

Euclides fue un contemporáneo de Platón, algo más viejo que éste último. Entre sus discípulos se cuentan Eubúlides, descubridor de buen número de paradojas [4], y Estilpón o, por lo menos, su maestro [5]. Estilpón fue a su vez maestro de Zenón, el fundador de la escuela estoica [6]. Uno de los discípulos de Eubúlides fue Apolonio Cronos [7], maestro de Diodoro Cronos, quien enseñó a finales del siglo IV a. C. Según una extravagante leyenda transmitida por Diógenes Laercio, Diodoro se suicidó por no haber podido resolver en el acto un enredo lógico con que Estilpón le desafiara en presencia de Ptolomeo Soter [8]. Por supuesto, éstas no son sino habladurías de patio de academia ateniense, pero nos sirven al menos para datar las actividades de Diodoro, pues Ptolomeo conquistó Megara el año 307 a. C.

A los megáricos se deben tres importantes contribuciones al desarrollo de la lógica: el hallazgo y formulación de un cierto número de interesantes paradojas, la reconsideración de las más relevantes nociones modales

---

1 Diógenes Laercio, II, 106.
2 Sexto Empírico, *Adversus Mathematicos*, X, 85.
3 Diógenes Laercio, VII, 43.
4 Ibid. II, 108.
5 Ibid. II, 113.
6 Ibid. II, 114.
7 Ibid. II, 111.
8 Ibid. II, 111-12.

y la iniciación de un importante debate sobre la naturaleza de los enunciados condicionales. Tendremos ocasión más adelante de detenernos en la segunda y la tercera de esas contribuciones, pero conviene antes decir algo acerca de la primera.

De las indicaciones suministradas por diversos escritores de la antigüedad más tardía parece desprenderse que algunas de las siete paradojas específicamente atribuidas a Eubúlides [9] no constituyen sino meras variantes de las otras, de suerte que la lista podría probablemente reducirse a los cuatro epígrafes siguientes:

(1) *El mentiroso.* «Un hombre afirma que está mintiendo. ¿Es verdadero o falso lo que dice?» [10]

(2) *El hombre encapuchado, el hombre que ha pasado inadvertido o la paradoja de Electra.* «Dices que conoces a tu hermano. Pero el hombre que acaba de llegar con la cabeza tapada era tu hermano y no has dado muestras de conocerlo» [11].

(3) *El hombre calvo o el montón.* «¿Dirías que un hombre es calvo si sólo tiene un pelo? Sí. ¿Dirías que es calvo si sólo tiene dos? Sí. ¿Dirías..., etc.? ¿Dónde sitúas entonces la línea divisoria entre ser calvo y no serlo?» [12]

(4) *El hombre cornudo.* «Lo que no has perdido, todavía lo tienes. Pero no has perdido los cuernos. De modo que aún tienes cuernos» [13].

Las paradojas del primer tipo demuestran el despropósito de pretender lograr que un enunciado enuncie algo acerca de su propia verdad o falsedad. Las del segundo tipo plantean cuestiones relativas a diferentes usos de la palabra «conocer», así como el problema de si —dada la identidad de X e Y— es apropiado o no afirmar que cuanto se diga con verdad acerca de X puede también ser dicho con verdad acerca de Y. Las del tercer tipo revelan la vaguedad que afecta esencialmente a algunas de nuestras más corrientes expresiones. Y las del cuarto y último tipo ponen de manifiesto que, si un enunciado (por ejemplo, «Alguien ha perdido los cuernos») envuelve una presuposición (por ejemplo, la de que ese alguien tuvo cuernos un día), es posible negarlo de forma restringida bajo la aceptación de dicho presupuesto o negarlo sin restricciones rechazando el presupuesto mismo. Todas las paradojas revisten interés y no parece verosímil que Eubúlides las propusiera por sí mismas y fuera de contexto, como la tradición pretende sugerir. Seguramente lo hizo al tratar de ilustrar algunos puntos doctrinales de la filosofía megárica, por más que hoy nos resulte imposible reconstruir los debates que motivaron su introducción. Mas se ha de ver que, incluso con las mutilaciones con que fue transmitido este fragmento del legado megárico, su importancia no sería escasa en la ulterior historia de la lógica.

Parece probable, sin embargo, que la obra de Eubúlides surtiese aún otro efecto, menos afortunado, sobre la historia de la lógica. Diógenes Laer-

---

9 Ibid. II, 108.
10 Cicerón, *De Divinatione*, II, 11; *Academica*, II, 96.
11 Luciano, *Vitarum Auctio*, 22.
12 Diógenes Laercio, VII, 82; Cicerón, *Academica*, II, 49; Horacio, *Epistulae*, II, 1 (45).
13 Diógenes Laércio, VII, 187.

cio nos informa de que se opuso encarnizadamente a Aristóteles, al que hizo frecuente objeto de sus ataques [14]. No sabemos si éste fue el comienzo de la bien conocida hostilidad entre peripatéticos y megáricos; pero lo cierto es que, heredada de estos últimos por los estoicos, la desavenencia se perpetuó durante siglos y ejerció una desgraciada repercusión sobre el desarrollo de la lógica. Pues, aunque las teorías aristotélicas y estoicas son en rigor complementarias, fueron consideradas largo tiempo como alternativas contrapuestas. Cuando llegó a caerse en la cuenta de la necesidad de fusionarlas, el impulso intelectual del mundo antiguo había ya declinado y no surgiría nadie con la estatura requerida para acometer esa empresa.

Los estoicos fueron los primeros en elaborar con detalle una teoría de la argumentación en la que se tuviera en cuenta la forma condicional y otras formas complejas de las proposiciones. Por razones a las que luego aludiremos, el interés por los enunciados condicionales resultaba algo natural entre los filósofos que practicaban la dialéctica en la tradición de Zenón de Elea, y los estoicos cobrarían dicho interés a través de su conexión con los megáricos.

Zenón de Citio, fundador del estoicismo, muerto el año 264 a. C., estudió con Estilpón [15] y posiblemente también con Diodoro [16], y no sería abusivo rastrear huellas del monismo eleático en la metafísica panteísta, pero no obstante materialista, de la escuela estoica. Diógenes Laercio nos cuenta que Zenón fue condiscípulo de Filón, con quien acostumbraba a enzarzarse en arduas disputas, profesándole un gran respeto comparable al que sentía por Diodoro [17]. Cierto es que este Zenón no se interesó por la dialéctica en la medida en que lo hizo su tocayo el de Elea, pero se dice que la recomendaba por su importancia pedagógica ya que adiestraba a los escolares en la resolución de paradojas [18]. Esto parece confirmar nuestra creencia de que el estudio de las paradojas constituía un asunto serio, más bien que un simple vicio, para sus precursores los megáricos. El influjo de la lógica megárica fue muy notable en Crisipo (280-207), que sucedió a Cleantes, sucesor a su vez de Zenón, a la cabeza de la escuela estoica. Sus voluminosos escritos fijaron las doctrinas de la escuela y se llegó a decir que «si no hubiera existido Crisipo, tampoco habría existido la Stoa» [19]. Sus trabajos sobre la dialéctica fueron muy admirados por los estoicos posteriores, habiendo sido objeto de viva discusión por parte de otros muchos autores de la antigüedad. Diógenes Laercio reseña el dicho de que «si entre los dioses se practicase la dialéctica, ésta no sería otra que la de Crisipo» [20], lo que revela de pasada que su sistema era considerado como distinto del de Aristóteles. Cuando Clemente de Alejandría desea mentar a un príncipe entre los lógicos, tal y como Homero lo fue entre los poetas, es precisamente Crisipo, y no Aristóteles, el mentado. Aristóteles era considerado el príncipe de los científicos y Platón el de los filósofos, pero la palma de los lógicos se reservaba a Crisipo [21]. Cicerón

14 Ibid. II, 109.
15 Ibid. VII, 2.
16 Ibid. VII, 16.
17 Loc. cit.
18 Plutarco, *De Stoic. Repugn.* 8 (1034E).
19 Diógenes Laercio, VII, 183.
20 Ibid. VII, 180.
21 *Stromateis*, VII, 16 (323).

relaciona a Crisipo con Filón y Diodoro a propósito del debate sobre los condicionales:

«¡Qué enconada disputa acerca de una minucia de la doctrina lógica, cual la relativa al modo como hemos de juzgar acerca de la verdad o falsedad de un enunciado complejo del estilo de 'Si es de día, entonces luce el sol'! Diodoro opina una cosa, Filón otra distinta y todavía Crisipo una tercera» [22].

No sabemos con exactitud cuál era el punto de vista defendido por Crisipo en esa controversia, pero parece claro que la teoría de las proposiciones condicionales resultaba central en su lógica, así como que este sistema procedía de la dialéctica de Zenón de Elea siguiendo un cauce por completo independiente de Aristóteles. De dicha independencia es buena prueba el empleo de una terminología de cuño aparte, incluso en relación con aquellos conceptos de los que Aristóteles se ocupara de hecho expresamente.

Por desgracia, todo lo que conocemos de la lógica estoica se halla recogido en fragmentos preservados por autores de otras escuelas, hostiles algunas de ellas; pero en más de un punto esos fragmentos se complementan y confirman unos a otros, de suerte que es posible reconstruir los trazos capitales del sistema aun si hay que recurrir frecuentemente a conjeturas para hacernos idea de la urdimbre de sus diversos elementos. En lo que sigue hablaremos a menudo de los estoicos más bien que de Crisipo, ya que no es fácil distinguir exactamente sus doctrinas de las de sus sucesores. Aunque está claro que el primero sentó las líneas generales por las que habría de discurrir el trabajo de los segundos, no faltan datos que atestigüen una cierta diversidad de pareceres entre éstos últimos sobre cuestiones de detalle. Ello es muy natural por otra parte, ya que la escuela estoica daba aún señales de vitalidad en los tiempos de Marco Aurelio (muerto el año 180 d. C.) y es improbable que hubiera podido mantenerse una férrea coherencia doctrinal a todo lo largo de ese paréntesis histórico.

Las fuentes principales para el estudio de la lógica estoica son, por tanto, ulteriores al momento de su producción. En el siglo II d. C., Apuleyo y Galeno incorporaron materiales estoicos en sus manuales de lógica; y, en el siglo siguiente, Sexto Empírico y Diógenes Laercio contribuyeron a la preservación de algunos interesantes apartados del legado. Sexto, como buen escéptico, nos ofrece una caracterización de la doctrina estoica con el solo propósito de refutarla, pero el compendio que presenta de la misma se halla inteligentemente elaborado, aun si no siempre con entera honestidad. Diógenes, que escribió una serie más o menos chismográfica de vidas de filósofos ilustres, pasa revista a la filosofía de los estoicos —incluida su lógica— en el curso de su biografía de Zenón. Ya que por regla general no es totalmente digno de confianza en cuanto expositor, es una suerte que se inspire muy de cerca, para esta sección, en un epítome de la doctrina estoica preparado por Diógenes de Magnesia, miembro de la escuela del siglo I a. C. Los informes de Sexto Empírico y Diógenes Laercio se confirman con frecuencia mutuamente. Para otros datos acerca de la lógica estoica tendremos que acudir a fuentes dispersas de la antigüedad posterior.

---

22 *Academica Priora*, II, 143.

2. Teorías megárica y estoica de la modalidad.

Aristóteles nos cuenta que los megáricos de su tiempo mantenían que no cabe establecer distinción alguna entre potencialidad y actualidad [23]. Pese a tratarse de una tesis bastante sorprendente, resultaba no obstante natural entre los eleáticos, ya que —como Aristóteles prosigue— equivale de hecho a la negación de cualquier clase de movimiento o cambio. Sin embargo, la corrección de dicha tesis comportaría por igual la superfluidad de los adjetivos modales «posible» y «necesario». Es curioso, por tanto, comprobar cómo los megáricos de la generación siguiente a la de Aristóteles se afanaron en arduas discusiones sobre lógica modal. Es posible, tal vez, que lo que pretendiesen fuera hacer un hueco a las nociones modales al tiempo que rechazaban la teoría aristotélica de la potencialidad. Esta parece ser, al menos, la pretensión de Diodoro Cronos una generación más tarde, pretensión que Aristóteles habría calificado como un intento de negar la distinción entre lo potencial y lo actual. En esta sección vamos a pasar conjuntamente revista a las definiciones de las nociones modales propuestas por Diodoro y Filón, así como a las variantes de las mismas atribuidas a los estoicos. Pues no cabe duda de que el tratamiento de la modalidad por parte de los estoicos es continuación del de los megáricos, y las fuentes antiguas mencionan a unos y otros a la par.

La más original de todas esas teorías es la de Diodoro Cronos. El único autor que nos ofrece una completa exposición de la misma es Boecio, mas lo que éste nos dice concuerda esencialmente con exposiciones parciales más primitivas, en particular la de Cicerón, y podemos considerarla como digna de crédito. He aquí el resumen que Boecio nos ofrece de la posición de Diodoro:

> «Diodoro define lo posible como aquello que o bien es o bien será (*quod aut est aut erit*); lo imposible como aquello que, siendo falso, no será verdadero (*quod cum falsum sit, non erit verum*); lo necesario como aquello que, siendo verdadero, no será falso (*quod cum verum sit, non erit falsum*); y lo no-necesario como aquello que o bien es ya o será falso (*aut jam est aut erit falsum*)» [24].

Ya que las tres últimas definiciones hacen todas ellas referencia a la verdad y la falsedad, es probable que la verdad fuese asimismo mencionada en el texto original de la primera definición; y Cicerón, de hecho, nos dice: «Placet igitur Diodoro id solum fieri posse quod aut verum sit aut verum futurum sit» [25]. La formulación de tales definiciones pone de manifiesto que Diodoro no aplica a *hechos o sucesos* las cualificaciones de posible, imposible, necesario o no-necesario, sino da por sentado que dichos adjetivos modales cualifican a los mismos sujetos que los predicados «verdadero» y «falso». Es difícil, no obstante, caracterizar con exactitud a estos últimos sujetos. No podemos decir a ciencia cierta si lo considerado verdadero o falso, necesario o imposible es una oración enunciativa, una proposición en la acepción moderna del vocablo o una tercera cosa distinta de las dos anteriores. Las lenguas latina y griega, con su libre uso de adjetivos neutros como nombres, contribuyen con eficacia peculiar

---

23 *Metaphysica*, Θ, 3 (1046b29).
24 *Commentarii in Librum Aristotelis* Περὶ Ἑρμηνείας, *Secunda Editio*, ed. Meiser, p. 234.
25 *De Fato*, 17. Cf. Benson Mates, *Stoic Logic*, p. 37.

al mantenimiento de semejante ambigüedad. En nuestra exposición de la teoría de Diodoro nos serviremos del incomprometido término «enunciado» con el fin de dejar la puerta abierta a cualquiera de aquellas interpretaciones.

De la anterior formulación de sus definiciones se sigue asimismo que Diodoro no está tratando de definir la necesidad *simpliciter* sino más bien la necesidad-en-un-instante-dado, y otro tanto sucede con los restantes términos modales. Si los enunciados cambian de valor de verdad, habrán de cambiar asimismo de modalidad de acuerdo con las definiciones de Diodoro. Consideremos, por ejemplo, un enunciado como «Hubo una revolución en Francia». Según Diodoro, se trataría de un enunciado necesario ahora, pero que no era tal con anterioridad a 1789.

No todos los cambios de modalidad resultan, sin embargo, permisibles en el sistema de Diodoro. Un enunciado podría ser posible en un momento dado y necesario con posterioridad, tal y como acabamos de ver; o podría ser primero posible y luego imposible, como por ejemplo «El sistema solar se desintegrará». Asimismo, podría ser hoy no-necesario y convertirse un día en necesario, como por ejemplo «No habrá más hombres»; o podría ser unas veces no-necesario y otras imposible, como por ejemplo «Hasta ahora ha habido exactamente mil millones de hombres». Mas cuando un enunciado sea necesario o imposible, no podrá ya cambiar de nuevo su valor de verdad ni su modalidad; pues, dado que lo necesario en un determinado instante se define como aquello que será verdadero en lo sucesivo, se sigue que será necesario de ahora en adelante. Y algo análogo ocurre en cuanto a lo imposible.

Dos otros extremos relativos a las doctrinas de Diodoro parecen a cubierto de toda posible duda. En primer lugar, su conexión con el famoso «argumento soberano» (κυριεύων λόγος)* y, en segundo, la consideración de que fueron objeto en la antigüedad, según la cual aquellas tesis comportarian consecuencias deterministas o fatalistas [26].

Según Alejandro, Diodoro pergeñó el Argumento Soberano como soporte de su propia definición de posibilidad [27], pero modernos estudios han sugerido que su título alude a la fuerza ineluctable del destino [28]. A Epicteto se debe la única versión completa del mismo con que contamos:

«El Argumento Soberano parece haber sido formulado tomando como punto de partida consideraciones como éstas. Entre las tres proposiciones que siguen: 'Todo lo que es pasado y verdadero es necesario', 'Lo imposible no se sigue de lo posible' y 'Lo que no es ni será es posible' se registra una incompatibilidad. A la vista de dicha incompatibilidad, Diodoro se sirvió de la fuerza de convicción de las dos

---

* La denominación de κυριεύων λόγος asignada al argumento de Diodoro podría aludir por igual a la cogencia —supuestamente irresistible— del mismo (lo que haría de él un argumento "dominador" en el sentido de victorioso o invencible) y a la fuerza —no menos supuestamente irresistible— del destino (que lo convertiría en el elemento "dominante" del mundo de los hechos pasados, presentes o futuros). La traducción inglesa de aquella denominación por *Master-Argument* —de que se sirven los autores— y nuestra propia traducción por "argumento soberano" pretenden reflejar dicha ambigüedad. *(N. del T.)*

26 Cf., por ejemplo, Cicerón, *De Fato*, 17; Boecio, op. cit., p. 235.

27 *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium, C.I.A.G.* II (I), p. 184.

28 P. M. Schuhl, *Le Dominateur et les possibles.*

primeras proposiciones para establecer la tesis de que nada es posible si no es o será verdadero»[29].

Para el lector de hoy, sólo uno de los enunciados envueltos en la precedente argumentación resulta inobjetable. Se trata de la segunda proposición, que constituye una tesis perfectamente reconocida dentro de la lógica modal y con la que Aristóteles, según pudimos ver, se hallaba familiarizado. No se comprende, en cambio, fácilmente por qué el primero de esos enunciados habría de gozar de general aceptación ni por qué éste y el siguiente tendrían que implicar conjuntamente la negación del tercero.

Por lo que se refiere al primer punto, es probable que Diodoro apelara a la obvia trivialidad de que el pasado resulta inalterable. Aristóteles expresó ya esta circunstancia en la *Etica Nicomaquea* [30] con las siguientes palabras: «Nadie delibera acerca del pasado, sino acerca de lo que está aún por venir y es por ello posible, en tanto que el pasado no puede ya dejar de haber acontecido; Agazón tiene, pues, razón cuando afirma: 'Este es el único poder del que hasta Dios se halla desprovisto, a saber, el de lograr que lo ya hecho no haya sucedido'». Parece, pues, plausible conceder que «lo que ha llegado a ser es necesariamente como es, porque no puede ser ahora de otro modo». Como Aristóteles vio en el *De Interpretatione*, se trata aquí de una necesidad relativa, por más que en ocasiones nos sintamos inclinados, cuando no se examina con cuidado la noción de necesidad, a conferir al pasado alguna suerte de necesidad absoluta. Es importante, sin embargo, reparar en que, tal y como ha sido expuesta en el Argumento Soberano, la tesis en cuestión reviste una indudable ambigüedad que hemos tratado de preservar conscientemente, aun a costa de la elegancia de nuestra traducción. La frase que expresaba aquella tesis podría querer decir o bien «Todo enunciado verdadero acerca del pasado es necesario» o bien «Todo enunciado verdadero en tiempo de pasado es necesario». Si la aserción se toma en este segundo sentido, no sería verdadera de acuerdo con la interpretación de «necesario» ofrecida por Diodoro; pues evidentemente hay muchos enunciados en tiempo de pasado que son en un momento dado verdaderos y en un momento ulterior falsos, como ocurriría por ejemplo con el enunciado «Ayer hizo buen tiempo» y en general con todos aquellos enunciados en que la identificación de lo tratado por los mismos se logra por referencia explícita o implícita al instante de proferir la locución.

Por otra parte, sólo es posible argumentar convincentemente en favor de la implicación del tercer enunciado a partir de los dos primeros si interpretamos *πᾶν παρεληλυθὸς ἀληθές* como «Todo enunciado verdadero en tiempo de pasado». Es cierto que, en un primer momento, cabría pasar por alto la distinción entre ambos sentidos de la expresión a que antes aludíamos. Pues de la primera proposición se sigue que toda proposición

---

29 *Dissertationes*, ed. Schenkl, II, 19, 1. El original será como sigue: *Ὁ κυριεύων λόγος ἀπὸ τοιούτων τινῶν ἀφορμῶν ἠρωτῆσθαι φαίνεται· κοινῆς γὰρ οὔσης μάχης τοῖς τρισὶ τούτοις πρὸς ἄλληλα, τῷ πᾶν παρεληλυθὸς ἀληθὲς ἀναγκαῖον εἶναι καὶ τῷ δυνατῷ ἀδύνατον μὴ ἀκολουθεῖν καὶ τῷ δυνατὸν εἶναι ὃ οὔτ' ἔστιν ἀληθὲς οὔτ' ἔσται, συνιδὼν τὴν μάχην ταύτην ὁ Διόδωρος τῇ τῶν πρώτων δυεῖν πιθανότητι συνεχρήσατο πρὸς παράστασιν τοῦ μηδὲν εἶναι δυνατὸν ὃ οὔτ' ἔστιν ἀληθὲς οὔτ' ἔσται.*

30 *Eth. Nic.* VI, 2 (1139b7-11).

falsa en tiempo de pasado (o, bajo la interpretación alternativa, todo enunciado falso acerca del pasado) es imposible, ya que la contradictoria de una proposición necesaria es imposible. Si podemos mostrar, en consecuencia, que todo enunciado falso en tiempo de presente o de futuro (o acerca del presente o del futuro) implica algún enunciado falso en tiempo de pasado (o acerca del pasado), habremos mostrado que, de acuerdo con la segunda proposición del Argumento Soberano, todos los enunciados de esa suerte son también imposibles. Es al llegar aquí, no obstante, donde la ambigüedad cobra importancia. Consideremos, en primer lugar, el enunciado «Tengo una cicatriz en mi mano izquierda» en cuanto proferido por una persona que no tiene ni tendrá nunca cicatrices en su mano izquierda. El enunciado «Tuve una herida en mi mano izquierda» en boca de esa misma persona podría calificarse de imposible de acuerdo con una de las interpretaciones de la primera proposición del Argumento Soberano, ya que constituye un enunciado falso acerca del pasado; y sería razonable conceder que se sigue del enunciado «Tengo una cicatriz en mi mano izquierda», que por lo tanto es también imposible [31]. En este caso particular, el argumento resultaría aceptable, por más que sólo quepa concederle alcance plenamente general sobre la base de presuponer lo que había que demostrar. Pues consideremos un enunciado falso acerca del futuro que se aplique a lo que Aristóteles habría considerado un caso de potencialidad, como por ejemplo la falsa predicción de alguna acción humana voluntaria como «Fulano resistirá la tentación». No habría en rigor otra razón que la adhesión a un dogmático determinismo para justificar nuestra suposición de que un enunciado semejante implica un enunciado falso acerca del pasado, pues no estamos de hecho en situación de rellenar el espacio en blanco de la oración «Para que Fulano resista la tentación tiene que haberse dado el caso de que...». Pero se puede, en cambio, construir un argumento de alcance plenamente general en orden a mostrar que cualquier enunciado falso en tiempo de presente o de futuro implica un enunciado falso en tiempo de pasado. Por ejemplo, del enunciado de que está siendo vista o será vista una concha de mar posada ahora en el fondo del océano se admitiría generalmente que se sigue que el enunciado correspondiente en tiempo de futuro, esto es, el enunciado «La concha será vista», fue verdadero en el pasado. Si el enunciado «La concha será vista» fuese falso, el enunciado en tiempo de pasado que se siga del mismo, a saber, «Era verdad que la concha sería vista», resultaría asimismo falso y por ende, de acuerdo con la primera proposición del Argumento Soberano, imposible [32].

En caso de haberse servido de esta segunda argumentación, Diodoro se habría extralimitado a buen seguro; pues, dada su efectiva generalidad, la argumentación demuestra que todo enunciado falso en tiempo de presente o de futuro es imposible y que todo enunciado verdadero es necesario. Se sigue de ello que lo posible, lo verdadero y lo necesario coinciden entre sí, tal y como lo hacen lo necesario, lo falso y lo imposible. No cabría, por lo tanto, ningún cambio del valor de verdad de un enunciado. Mas las

---

31 En relación con nuestra ilustración, véase Sexto Empírico, *Adv. Math.*, VIII, 254, donde aquélla es utilizada en el curso de una discusión del σημεῖον estoico, cuestión estrechamente conectada con la que nos ocupa.

32 Cf. A. N. Prior, "Diodoran Modalities", *The Philosophical Quarterly*, V (1955), pp. 205-13. La ilustración procede de Filopón, *In Aristotelis An. Pr. Commentaria*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* XIII, p. 169.

definiciones diodóricas de las nociones modales descansan en la presunción de que los valores de verdad son susceptibles de cambiar. La ambigüedad que da lugar a semejante confusión ya ha sido puesta de relieve hace un momento. Sólo si interpretásemos la cláusula πᾶν παρεληλυθὸς ἀληθές en el sentido de «Todo enunciado (esto es, proposición) verdadero(a) acerca del pasado» resultaría plausible la primera proposición del Argumento Soberano. Lo que es verdadero acerca del pasado seguirá siéndolo y no podrá ser alterado. Pero un enunciado relativo al pasado en tal sentido no necesita ser expresado mediante una oración de indicativo en tiempo de pasado. Cabría expresarlo mediante una oración cuyo verbo principal se hallase en tiempo de futuro, como por ejemplo «Será siempre verdad que la reina Ana ha muerto». De modo semejante, un enunciado en tiempo de pasado puede versar acerca del futuro, como por ejemplo «Ha sido siempre verdad que mañana, esto es, el 18 de abril de 1970, estaré en Oxford». Diodoro pretende que los enunciados de este género son necesarios porque desea poder decir que transmiten su necesidad a las proposiciones expresadas por sus cláusulas subordinadas en tiempo de futuro. El Argumento Soberano reposa, así, sobre una ambigüedad. Lo que se dice necesario en la primera proposición no es lo mismo que se considera imposible en la segunda. Todo enunciado verdadero acerca del pasado es necesario en la medida en que lo que se dice en él que ha sucedido ha sucedido de verdad. Pero no es un enunciado acerca del pasado en el sentido de que se siga de un enunciado falso acerca del futuro, sino sencillamente un enunciado en tiempo de pasado. No hay más razón para atribuir carácter de imposible a un enunciado semejante que para atribuirlo al enunciado en tiempo de futuro del cual fue derivado. Así pues, el Argumento Soberano falla en tanto que argumento en pro del determinismo. Tampoco cumple el cometido para el que fue previsto al decir de Alejandro; pues, lejos de hacer plausible la definición de lo posible como «Lo que es o será verdadero», lo que hace es demoler las alternativas que justificarían esta definición.

Las confusiones del Argumento Soberano surgen de una deficiencia que habíamos ya apreciado en Aristóteles, a saber, la indistinción entre una oración enunciativa y la proposición que ésta expresa. Diodoro comenzó probablemente por reparar en la diferencia existente entre oraciones como «Es de día» (ejemplo muy común entre los megáricos), de las que negligentemente se dice que son a veces verdaderas y a veces falsas, y oraciones en tiempo de pasado, como por ejemplo «Platón fundó la Academia», que no cambian su valor de verdad. A continuación, supuso erróneamente que la trivial afirmación de que el pasado es inalterable equivale al enunciado falso de que las oraciones verdaderas en tiempo de pasado no cambian de valor de verdad. Pensaba así haber dado con el modo de refutar la teoría aristotélica de la potencialidad sobre la base de una tesis admitida por el propio Aristóteles. Pues es probable que el Argumento Soberano se dirija contra el capítulo 9 del *De Interpretatione*. Comoquiera que se interprete ese capítulo, Diodoro lo contradice; pero comparte con Aristóteles la errónea presuposición de que tiene sentido hablar de verdad-en-un-instante-dado. Es probable que esa disputa estimulase la distinción de los estoicos entre las oraciones y lo que éstas expresan, moviéndoles a interesarse seriamente por el problema de los cambios del valor de verdad de los enunciados.

En oposición a la doctrina de Diodoro, se dice de Filón que defendió la tesis de que cabría considerar posible un estado de cosas «en virtud de la simple verosimilitud de que acontezca dicho hecho» (κατὰ ψιλὴν τὴν ἐπιτηδειότητα τοῦ ὑποκειμένου) aun cuando su realización se vea externamente constreñida, como lo podría estar el que arda un leño por circunstancias tales como la de hallarse sumergido en el fondo del mar [33]. Boecio expone en los siguientes términos sus cuatro definiciones de las nociones modales:

«Filón afirma que lo posible es aquello que por la intrínseca naturaleza de la aserción admite la verdad (*quod natura propria enuntiationis suscipiat veritatem*), como cuando yo digo por ejemplo que leeré hoy de nuevo las *Bucólicas* de Teócrito. Si ninguna circunstancia externa me lo impide, entonces ese hecho —en sí mismo considerado (*quantum in se est*)— podrá ser afirmado con verdad. De análoga manera, el mismo Filón define lo necesario como aquello que, siendo verdadero, nunca podría —en sí mismo considerado— resultar susceptible de falsedad. Lo no-necesario es caracterizado como aquello que, en sí mismo considerado, podría ser falso, y lo imposible como aquello que, por su intrínseca naturaleza, podría ser verdadero» [34].

Carecemos por desgracia de información más detallada acerca de su teoría de la modalidad, pero lo que parece estar en claro es que la posibilidad es dentro de ella la noción modal básica y que Filón la identifica con la de consistencia interna de una aserción acerca de un estado de cosas.

El punto de vista atribuido a los estoicos es algo más complejo y no hay que descartar la posibilidad de que nos haya sido defectuosamente transmitido. Boecio lo distingue expresamente del de Filón [35], aunque por lo demás sea evidente que tiene algo en común con la doctrina de éste último. Contamos con dos caracterizaciones esencialmente idénticas de la doctrina estoica, por más que ambas procedan de dos fuentes enteramente independientes. Diógenes Laercio resume como sigue las definiciones estoicas:

«Lo posible es aquello que admite ser verdadero (τὸ ἐπιδεκτικὸν τοῦ ἀληθὲς εἶναι), en el supuesto de que circunstancias externas no impidan que lo sea (τῶν ἐκτὸς μὴ ἐναντιουμένων πρὸς τὸ ἀληθὲς εἶναι), como por ejemplo 'Diocles está vivo'. Lo imposible es aquello que no admite ser verdadero, como por ejemplo 'La tierra vuela'. Lo necesario es aquello que es verdadero y no admite ser falso o que, admitiendo ser falso, no lo podría ser por impedirlo circunstancias externas, como por ejemplo 'La virtud es beneficiosa'. Lo no-necesario es aquello que es verdadero pero podría ser falso si circunstancias externas no lo impidiesen, como por ejemplo 'Dión pasea'» [36].

Y Boecio transcribe así las tres primeras definiciones:

«Los estoicos han sostenido que es posible lo que resulta susceptible de ser afirmado con verdad (*quod susceptibile esset verae praedicationis*) cuando las cosas que, aunque externas, acontecen en conjunción con ello no lo impiden (*nihil his prohibentibus quae, cum extra sint, cum ipso tamen fieri contingunt*). Lo imposible es aquello que nunca admite la verdad, ya que otras cosas, aparte de su propia realización, se lo impiden (*aliis extra eventum ipsius prohibentibus*). Lo necesario

33 Alejandro, loc. cit. Cf. asimismo Filopón, loc. cit., y Simplicio, *In Aristotelis Categorias Commentarium*, ed. Kalbfleisch, *C.I.A.G.* VIII, pp. 195-6.
34 Boecio, op. cit., p. 234.
35 Ibid.
36 Diógenes Laercio, VII, 75.

es aquello que, cuando es verdadero, no admite en ningún caso ser objeto de una afirmación falsa (*quod cum verum sit falsam predicationem nulla ratione suscipiat*)» [37].

La discusión de estas tesis por parte de Boecio recuerda un pasaje del *De Fato* de Cicerón, en el que se contrastan las posiciones de Crisipo y de Diodoro [38]. Quizá Boecio se apoye en Cicerón, pero es también posible que ambos se inspiren en algún manual estoico que les sirva conjuntamente de base, pues Cicerón escribe de hecho como si tuviera ese manual delante de sus ojos. En cualquier caso, el punto de vista que Boecio califica de «estoico» podría atribuirse sin reservas a Crisipo, por más que éste no fuera probablemente el único en sostenerlo.

Se apreciará que la definición de «necesario» ofrecida por Diógenes abarca dos alternativas. Lo necesario es aquello que no admite *simpliciter* la falsedad o bien aquello que es verdadero pero podría haber sido falso, sin embargo, si las circunstancias externas no lo hubiesen impedido. El ejemplo propuesto únicamente puede referirse a la primera alternativa, pues sería difícil que un estoico concediese que el enunciado «La virtud es beneficiosa» pueda ser falso en alguna circunstancia. Pero parece, en cambio, estar fuera de duda que la intención del texto es distinguir entre necesidad absoluta y relativa a la manera que nosotros ya conocemos [39]. Y contamos con algún otro testimonio que acredita que Crisipo propuso la citada distinción. Cicerón le atribuye, por ejemplo, la contraposición entre hechos simples y complejos (*simplicia* y *copulata*) [40]. Al parecer, argüía que ciertos hechos simples (por ejemplo, que Sócrates ha de morir tal y tal día) se hallan predeterminados con absoluta independencia de otros hechos, mientras que en cambio hay hechos (por ejemplo, que Edipo ha de nacer de Layo) que únicamente se hallan predeterminados en conexión con ciertos hechos asociados (por ejemplo, el hecho de que Layo copule con su mujer). A tales hechos conectados entre sí, nos dice Cicerón, los llamó Crisipo «codestinados» (*confatalia*). Y es obvio que una proposición acerca del primero de dichos acontecimientos sería necesaria, en relación con otra proposición acerca del segundo, en el último de los sentidos del término «necesario» previstos en la definición estoica. Así, es verdad que Edipo nació, pero habría sido falso si no hubiera circunstancias externas, como las relaciones sexuales entre Layo y Yocasta, que impidan que lo sea.

Si la definición de lo necesario reviste esa complejidad, otro tanto habrá de suceder con la definición de las restantes nociones modales. Tal circunstancia pudo ser pasada por alto en el relato de Diógenes a causa de su extrema concisión, e incluso es posible que los copistas omitiesen aquellas frases consistentes en aparentes redundancias. Si todas las definiciones hubiesen exhibido una complejidad pareja, habrían rezado como sigue:

> Lo posible es aquello que admite la verdad o que, admitiéndola, carece de impedimentos en razón de las circunstancias externas para ser verdadero.

---

37 Boecio, op. cit., pp. 234-5.
38 *De Fato*, 12-20.
39 Véanse más arriba pp. 88-89.
40 *De Fato*, 70.

Lo imposible es aquello que no admite la verdad o que, admitiéndola, tropieza con el impedimento de las circunstancias externas para ser verdadero.

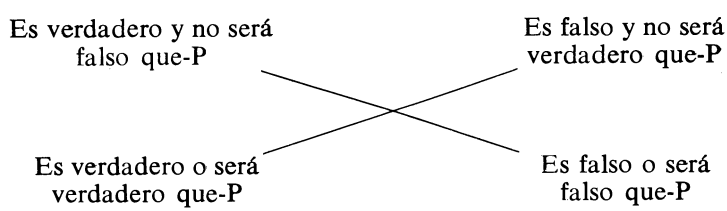
Lo necesario es aquello que es verdadero y no admite la falsedad o que, admitiéndola, tropieza con el impedimento de las circunstancias externas para ser falso.

Lo no-necesario es aquello que admite la falsedad o que, admitiéndola, carece de impedimentos en razón de las circunstancias externas para ser falso.

Obsérvese que, en la versión de Diógenes, la definición de lo no-necesario requiere su verdad. Si ello forma parte de la definición estoica, se trata abiertamente de un error. Lo esencial de una proposición no-necesaria es que *pueda* ser falsa. Tal condición es satisfecha si la proposición es de hecho falsa, mas la demostración de su no-necesidad perdería entonces interés.

Consideradas como *explicaciones* de las nociones modales, las definiciones ofrecidas por Filón y los estoicos serían circulares, pues las palabras clave «admitir» o «mostrarse susceptible de» (ἐπιδεκτικός) e «impedir» o «ser contrario a» (ἐναντιοῦσθαι) envuelven ambas nociones modales, como las nociones de *estar capacitado* o *incapacitado* para recibir esta o la otra cualificación. Tal circularidad resulta obvia en la definición filónica de la imposibilidad, según Boecio la fórmula: «Impossibile vero, quod secundum propriam naturam nunquam possit suscipere veritatem» [41]. La circularidad envuelta en semejantes definiciones no constituye necesariamente un defecto de las mismas. Si las nociones modales son en algún sentido fundamentales, pudiera darse el caso de que no quepa definirlas sin servirnos de un modo u otro de ellas. De las tres colecciones de definiciones mencionadas por Boecio, sólo la de Diodoro elude la circularidad, y —como ya hemos visto— presenta sus propias dificultades.

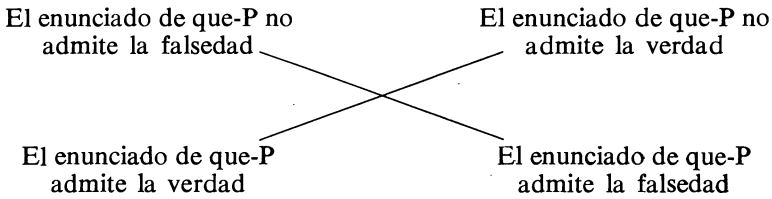
Todas ellas se ajustan, por lo demás, a los requisitos lógicos llamados a preservar las mutuas relaciones entre las diversas nociones modales, esto es, todas ellas posibilitan la construcción del oportuno cuadrado de la oposición modal. En el caso de Diodoro, el cuadrado vendría a quedar trazado como sigue:



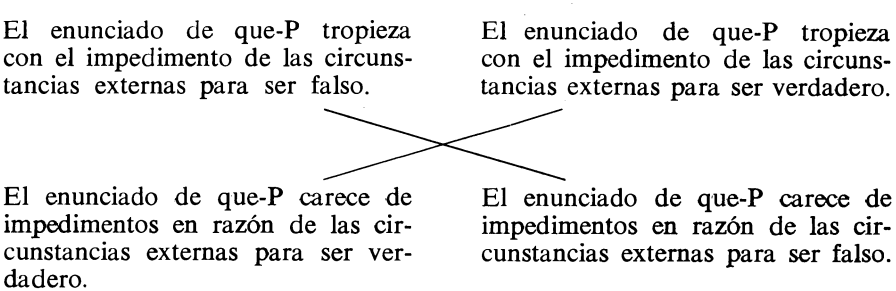
Ya que las aserciones de la posibilidad y la no-necesidad resultan respectivamente contradictorias de las aserciones de la imposibilidad y la necesidad, y estas dos últimas constituyen proposiciones conjuntivas, las primeras son ambas proposiciones disyuntivas. Por otra parte, la con-

41 Boecio, op. cit., p. 234.

tradictoria de una proposición imposible es una proposición necesaria y viceversa. Pues si es falso y no será verdadero que-P, entonces es verdadero y no será falso que-no-P, lo que hace necesario por definición que-no-P. En cuanto a las definiciones de Filón, tendríamos el cuadrado siguiente:



Por lo que se refiere a las definiciones estoicas, si las hemos interpretado correctamente, la cuestión es más complicada. Ya que cada uno de los términos se define por medio de una disyunción, los elementos de una pareja de términos definidores no podrán contradecirse mutuamente. Mas las definiciones dan lugar a dos cuadrados de la oposición independientes entre sí, el uno de ellos —que se identificaría con el cuadrado filónico— referido a los términos modales entendidos en sentido absoluto, y el otro referido a dichos términos entendidos en sentido relativo, tal y como cabría representarlo de la forma:



De acuerdo con uno u otro de los cuadrados estoicos, la contradictoria de una proposición necesaria sería una proposición imposible en el sentido relevante del vocablo. Ello hace todavía más sorprendente la única pieza de información adicional con que contamos acerca de los puntos de vista de Crisipo sobre la posibilidad, a saber, la relativa a su rechazo de la segunda premisa del Argumento Soberano y su afirmación de que lo imposible podría seguirse de lo posible [42]. Tales tesis son aparentemente incompatibles con las definiciones propuestas, de acuerdo con las cuales —como vimos— la contradictoria de una proposición imposible ha de ser necesaria. Pues si la proposición de que-P, que es imposible, se sigue de la proposición de que-Q, que es posible, entonces por la ley de contraposición —bien conocida por los estoicos— la proposición de que-no-Q se seguiría de la proposición de que-no-P. Mas la proposición de que-no-P es necesaria, de suerte que —en virtud de un principio generalmente indiscutido— también tendría que serlo la proposición de que-no-Q, lo que

42 Alejandro, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* (I), p. 177; Epicteto, *Diss.* II, 19, 1.

resulta incompatible con la inicial asignación de posibilidad a la proposición de que-Q.

Crisipo defiende su curiosa tesis por recurso al ejemplo «Si Dión está muerto, este hombre está muerto». Sostiene que, proferida en presencia de Dión, esta oración expresa un condicional correcto (ὑγιὲς συνημμένον)[43], mas cuyo antecedente es posible, ya que Dión es mortal, en tanto el consecuente es imposible, ya que encerraría una contradicción interna cuando Dión estuviera vivo y, en caso de estar muerto, haría que el demostrativo careciese de aplicación, con lo que la proposición (ἀξίωμα) vendría a quedar destruida[44]. La argumentación de Crisipo es tan extraña como la tesis que pretende fundamentar, pero caben al menos dos posibles interpretaciones de la misma que contribuirían a mitigar su extravagancia.

En primer lugar, podría tratarse simplemente de un *argumentum ad hominem* en contra de Diodoro. El propio Crisipo sostuvo casi con absoluta seguridad, como veremos, que las palabras «verdadero», «falso», «necesario», etc., se aplican a proposiciones (λεκτά) y no a simples oraciones. Pero acaso intentase refutar a Diodoro haciendo ver que si éste último se refiere a oraciones, como parece hacerlo en la primera premisa de su Argumento Soberano, entonces su segunda premisa resulta inaceptable, ya que una *oración* a la que sea plausible calificar de imposible podría plausiblemente derivarse de una oración calificada con acierto de posible. Este procedimiento de refutación de una tesis extrayendo de ella consecuencias indeseables es herencia de los megáricos, y podría dar lugar muy fácilmente a equívocos. Pues la conclusión de un *argumentum ad hominem* pudiera erróneamente interpretarse como un punto de vista sostenido por quien lo esgrime con el fin de impugnar a un adversario.

Una segunda y más interesante hipótesis sería la de que Crisipo está tratando de sentar una nueva distinción entre diversos tipos de necesidad o imposibilidad, aparte de la ya antes sugerida entre necesidad o imposibilidad absolutas y relativas. Al decir de Cicerón, Crisipo denegó validez universal a la regla de que lo que se sigue de lo necesario es ello mismo necesario: *Chrysippo non videtur valere in omnibus*[45]. Esta denegación concuerda, como hemos visto, con la tesis de que lo imposible puede seguirse de lo posible, y su formulación sugiere que Crisipo creyó haber encontrado algunos casos especiales de necesidad e imposibilidad que constituyen excepciones a las reglas ordinarias. Ahora bien, los estoicos reservaban la denominación específica de «definidas» (καταγορευτικά) para las aserciones con demostrativos por sujetos[46], y tales aserciones podrían ser necesarias o imposibles de un modo un tanto peculiar. Para citar un ejemplo famoso, «Existo» y «No existo» han sido aserciones respectivamente reputadas de necesaria e imposible en tal sentido. De «Existo» proferida por Descartes se sigue que Descartes existe, mas la aserción «Descartes existe» no es necesaria. De modo semejante, de «Descartes no existe» proferida por Descartes se sigue «No existo», que sería imposible en el sentido precedente, por más que «Descartes no existe» no sea imposible en

43 Sobre el sentido de esta expresión, véase la discusión que sigue en la próxima sección.
44 Alejandro, loc. cit.
45 Cicerón, *De Fato*, 14.
46 Diógenes Laercio, VII, 70.

ningún sentido. Tal vez sea esta distinción la que Crisipo tiene *in mente* cuando afirma que lo imposible podría seguirse de lo posible. De ser así, habría modificado las reglas de Aristóteles hasta hacerles decir:

> Una proposición imposible no se puede seguir de una proposición posible, a menos que el consecuente constituya una proposición definida e imposible en el sentido peculiar de las proposiciones definidas.
>
> La proposición que se sigue de una proposición necesaria es ella misma necesaria, a menos que el antecedente constituya una proposición definida y necesaria en el sentido peculiar de las proposiciones definidas.

Cabría objetar a esto que «la posesión de un demostrativo por sujeto» es una propiedad de las oraciones y no de las proposiciones. Se trata de una observación importante, a la que más adelante tendremos ocasión de prestar atención; mas los estoicos parecen haber pensado que el carácter de «definidas», en el sentido antes explicitado, conviene por igual a las proposiciones que a las oraciones [47].

3. El debate en torno a la naturaleza de los condicionales.

Por lo que sabemos, los primeros lógicos que se ocuparon de la naturaleza de los enunciados condicionales fueron Diodoro Cronos y su discípulo Filón. El tratamiento de la cuestión pudo tener su origen en la vinculación de los megáricos al pensamiento de Zenón de Elea. Si, como ya hemos indicado, Aristóteles se interesó preferentemente por el razonamiento tal y como es usado en el dominio de la geometría, es natural que concentrara su atención en las definiciones y proposiciones generales. Ninguno de sus ejemplos favoritos de demostración le forzaba a considerar el significado de «si..., entonces...». Y ya hemos visto cómo ignoró de hecho la forma condicional del enunciado en su clasificación de las proposiciones, por más que se sirviera de ella para su presentación de los principios de los diversos modos silogísticos en los *Primeros Analíticos*. Los argumentos dialécticos cultivados por Zenón eran, en cambio, de la forma «Si P, entonces Q; y si P, entonces no-Q; por lo tanto, es imposible que P», de suerte que cabría esperar que un lógico que partiese de la consideración de los mismos prestara especial atención a los enunciados condicionales. Sexto Empírico alude en tres ocasiones a una discusión sobre este punto entre Diodoro y su discípulo Filón. Otros lógicos añadieron al debate sus propias sugerencias y la disputa se hizo pronto tan popular en la antigüedad que un epigrama de Calímaco refiere que «hasta los cuervos graznan en los tejados discutiendo la naturaleza de los condicionales» [48].

En el primero de los lugares donde menciona la disputa, Sexto enumera cuatro tesis en litigio a propósito de nuestro problema. Cada una de ellas aparece precedida del correspondiente número de orden en la traducción que sigue:

«[1] Filón afirma que un condicional correcto (ὑγιὲς συνημμένον) es aquel que comienza con una verdad y concluye con una falsedad, como por ejemplo —cuando

47 Ibid. VII, 69.
48 Sexto Empírico, *Adv. Math.* I, 309.

es de día y estoy conversando— el enunciado 'Si es de día, estoy conversando'. [2] Pero Diodoro considera tal únicamente a aquel que no era ni es posible que comience con una verdad y concluya con una falsedad. Así, el enunciado que se acaba de citar sería incorrecto en su opinión, ya que —cuando sea de día y yo permanezca en silencio— comenzaría con una verdad y concluiría con una falsedad. Mas el siguiente enunciado resulta, en cambio, irreprochable: 'Si no existen elementos atómicos de las cosas, entonces existen elementos atómicos de las cosas'. Pues Diodoro mantiene que comenzará siempre con el antecedente (ἡγούμενον) falso 'No existen elementos atómicos de las cosas' y concluirá con el consecuente (λῆγον) verdadero 'Existen elementos atómicos de las cosas'. [3] Y aquellos que introducen la noción de conexión (συνάρτησις) sostienen que un condicional es correcto cuando el contradictorio de su consecuente es incompatible con el antecedente. Según ellos, por tanto, los condicionales arriba mencionados serían ambos incorrectos, mientras sería en cambio correcto el enunciado 'Si es de día, es de día'. [4] Quienes, por último, juzgan por implicación (ἔμφασις) afirman que es correcto el condicional cuyo consecuente se halla potencialmente contenido en el antecedente. De acuerdo, pues, con ellos, el enunciado 'Si es de día, es de día', y de análoga manera todo condicional que sea reiterativo (διφορούμενον) sería incorrecto al parecer, pues resulta imposible que una cosa se halle contenida dentro de ella misma» [49].

Por desgracia, no sabemos una palabra más acerca de los argumentos esgrimidos en pro o en contra de cada una de estas tesis. Y aunque podemos dar por bueno que las objeciones mencionadas por Sexto fueron realmente propuestas en un instante dado, no estamos en situación de asegurar que el orden de aparición de nuestras tesis se corresponda exactamente con el de su lista. Pues bien pudiera suceder que las hubiese ordenado según un criterio de progresiva astringencia en los requisitos exigidos para la corrección de esos condicionales, con la esperanza de hacer más inteligibles las relaciones entre los puntos de vista encontrados. Por lo demás, hasta los nombres de los sustentadores de la tercera y cuarta tesis se han perdido. si bien cabría adivinar sus respectivas identidades. Un pasaje de Cicerón parece sugerir que la tercera corresponde a Crisipo [50]. Pues se arguye en él que, si Crisipo concede la corrección del condicional «Si Fabio nació al despuntar Sirio, entonces Fabio no morirá en el mar», tendrá también que conceder que «Fabio nació al despuntar Sirio» y «Fabio morirá en el mar» son incompatibles (*pugnant*). Dicho punto de vista es asimismo atribuido a los estoicos por Diógenes Laercio [51]. La cuarta tesis, finalmente, es con toda probabilidad peripatética. Así parecen sugerirlo tanto el uso del adverbio «potencialmente» (δυνάμει) cuanto el rechazo de la forma «Si P, entonces P», que los peripatéticos consideraban exponente del estéril verbalismo estoico [52].

Cualesquiera que sean los autores a los que quepa atribuir su paternidad, resulta interesante pasar revista a aquellas tesis en el orden reseñado, conjeturando las razones que pudieron haber motivado sus características más sobresalientes.

Cuando Filón nos dice que un enunciado condicional es correcto si, y sólo si, no comienza con una verdad y concluye con una falsedad, está ofreciéndonos lo que hoy día llamaríamos una definición veritativo-funcional de «si ..., entonces ...», esto es, una definición de acuerdo con la cual

---

49 Sexto, *Pyrrhoneiae Hypotyposes*, II, 110-12.
50 *De Fato*, 12.
51 *Vitae*, VII, 73.
52 Alejandro, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 20.

la verdad o falsedad de un enunciado condicional se halla determinada por la verdad o falsedad de sus antecedente y consecuente. En una segunda alusión a la interpretación filónica del condicional, añade Sexto:

«Así pues, hay según él tres modos como un condicional puede ser verdadero y uno como puede ser falso. Pues un condicional es verdadero cuando comienza con una verdad y concluye con una verdad, como 'Si es de día, es de día'; y asimismo es verdadero cuando comienza con una falsedad y concluye con una falsedad, como 'Si la tierra vuela, la tierra tiene alas'; y, de manera semejante, un condicional que comienza con una falsedad y concluye con una verdad es también verdadero, como 'Si la tierra vuela, la tierra existe'. Un condicional únicamente es falso si comienza con una verdad y concluye con una falsedad, como 'Si es de día, es de noche'» [53].

Sirviéndonos de «P» para indicar el lugar del antecedente y de «Q» para indicar el del consecuente, podemos presentar aquella explicación por medio de la tabla de verdad:

P	Q	Si P, entonces Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El recurso a la tabulación no se introdujo sino recientemente, pero la idea de una dependencia veritativo-funcional era obviamente familiar para Filón. ¿Por qué pensó que «si ..., entonces ...» se podía definir de esta manera? A primera vista, su caracterización del significado de dicha expresión no resulta en sí misma demasiado plausible; pues nosotros no acostumbramos de ordinario a formular condicionales cuya única defensa consista en satisfacer el requisito de que su antecedente sea falso o su consecuente verdadero. El ejemplo que Sexto le atribuye ya es de por sí chocante, puesto que nadie afirma por las buenas «Si es de día, estoy conversando» sobre la simple base de ser de día y hallarse conversando. No parece sino que la deliberada insistencia de Filón en la corrección de este extraño enunciado obedeciese a su intención de traspasar los límites del uso ordinario de la expresión condicional. Pero, ¿por qué motivos?

Si, como suponemos, Filón comenzó por considerar el uso de «si ..., entonces ...» en el curso de una argumentación, es posible que hubiese deseado llamar la atención sobre el hecho del reconocimiento universal de que la conjunción de un enunciado condicional con su antecedente implica siempre el consecuente. Esta es realmente una característica esencial del significado de las cláusulas condicionales. Comoquiera que prefiramos caracterizar su funcionamiento en tal o cual contexto, tendremos invariablemente que acordar la validez del esquema inferencial «Si P, entonces Q; pero P; luego Q». Ahora bien, la interpretación filónica es la más débil de entre las que se ajustan a dicho requisito. Es decir, cualquier otra que resulte plausible sólo podría diferir de ella por imponer algún requisito adicional o por no permitir la verdad del condicional en este o aquel caso en que

53 *Adv. Math.* VIII, 113.

lo haga la interpretación de Filón. Si definimos, entonces, el condicional simplemente como aquel enunciado complejo que contiene dos signos proposicionales y tal que su conjunción con el primero implica el segundo de ellos, estaremos aceptando la tesis de Filón.

Para los filósofos de la escuela megárica, la definición de Filón tenía que resultar más sorprendente aún de lo que pueda serlo para el lector moderno, pues se hallaban acostumbrados a servirse de enunciados condicionales en la formulación de argumentos *ad absurdum*. Cuando un seguidor de Zenón quería refutar el enunciado comúnmente aceptado de que-P, confeccionaba un argumento de la forma «Si P, entonces Q; y si P, entonces no-Q; por lo tanto, es imposible que-P». En un contexto semejante, la aserción de esos condicionales no podría descansar sobre la sola base de que ambos satisfacen el requisito de Filón. El usuario de los mismos puede hallarse ciertamente persuadido de que su común antecedente es falso, lo que sería suficiente para garantizar la verdad de los dos condicionales de acuerdo con el criterio filónico; mas el caso es que los propone como premisas de un argumento destinado a *probar* la falsedad del antecedente, lo que obligaría a esperar que su oponente acepte dichos condicionales por alguna razón independiente de la verdad o falsedad del antecedente o los consecuentes. Parece, pues, que al afirmar «Si P, entonces Q» no está queriendo simplemente decir «No es el caso que-P-y-no-Q», sino más bien «Es imposible que-P-y-no-Q»; que tal vez sea lo que Diodoro pretendía asegurar al propugnar su propia caracterización del significado de «si ..., entonces ...». Mas, como ya sabemos, Diodoro mantenía puntos de vista un tanto peculiares acerca de la modalidad, por lo que hemos de examinar en qué medida puedan afectar éstos a su teoría de los enunciados condicionales.

La objeción que opone al ejemplo de Filón, así como la fórmula «no era ni es posible que comience con una verdad y concluya con una falsedad» de la que se sirve al presentar su tesis, demuestran que Diodoro opera en este punto —al igual que en el Argumento Soberano— con la noción de enunciados, o expresiones verbales, susceptibles de ser verdaderos en un instante dado pero no así en otro. Así, cuando nos dice que no era ni es posible que un condicional correcto comience con una verdad y concluya con una falsedad, pretende evidentemente sugerir que una expresión condicional como «Si es de día, estoy conversando» podría satisfacer el requisito de Filón en este instante y dejar de hacerlo en aquel otro, mientras que en su teoría dicho condicional sería incorrecto si no satisficiese el requisito de Filón en cualquier instante, pasado, presente o futuro. En resumidas cuentas, pues, Diodoro no está definiendo «si ..., entonces ...» por recurso a la noción de necesidad tal y como ordinariamente la entendemos, sino haciendo más bien constar su decisión de no reconocer como correcto a un enunciado condicional más que si éste y el resto de los enunciados originados al proferir la misma expresión verbal en diferentes instantes fuesen correctos en el sentido de la definición filónica. Para el caso de una expresión verbal cuya referencia resultase completamente independiente de la ocasión de proferirla, su criterio coincidiría con el de Filón, ya que las diferentes locuciones proferidas en instantes diferentes no entrañarían una pareja diferencia de enunciados. Pero no hay que pensar que Diodoro fuese consciente de este extremo. Por el contrario, su cons-

trucción del Argumento Soberano deja entender que no tenía una idea muy exacta de lo que se traía entre manos cuando hablaba de expresiones verbales verdaderas en un instante y falsas en otro.

Una de las peculiaridades de la propuesta de su tesis por parte de Diodoro, si es que por lo demás cabe atribuírsela, es la introducción de la cláusula «no es posible» en adición a la de «no era posible». El añadido resulta redundante, pues —de acuerdo con su definición de posibilidad— si no era posible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, entonces no *es* posible que ocurra tal cosa. Si se daba el caso de que «P y no-Q» no había de ser un enunciado verdadero en el futuro, se seguirá ahora dando el caso de que dicho enunciado no ha de ser verdadero en el futuro. Todo habría resultado bastante más inteligible si Diodoro hubiese invertido el orden de los verbos en su formulación, diciendo «no es ni era posible», pues la segunda cláusula complementaría en tal caso la condición impuesta por la primera. Si se hubiese, en cambio, limitado a formular su tesis de la suerte: «No es posible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso», cualesquiera dos enunciados verdaderos en tiempo de pasado formarían —de acuerdo con su concepción de la posibilidad— un condicional correcto, cualquiera que resulte ser el orden en que los mismos aparezcan; pues no es ni será nunca cierto que el uno sea verdadero y el otro falso. Tal paradoja queda evitada gracias a la cláusula adicional «no era posible», ya que por regla general habrá habido un instante en que —de cada par de enunciados verdaderos en tiempo de pasado— uno de ellos fuese verdadero y el otro falso.

La tesis de Diodoro, sin embargo, envuelve todavía las siguientes paradojas:

(*a*) Cualquier par de enunciados verdaderos en tiempo de pasado cuya verdad se haya producido simultáneamente formarán un condicional correcto, cualquiera que sea el orden de los mismos.

(*b*) Con cualquier par de enunciados verdaderos en tiempo de pasado cuya verdad no se haya producido al mismo tiempo podremos construir un condicional correcto tomando como antecedente al que devino verdadero en último lugar y como consecuente al que lo hizo en primer término, ya que no habría podido darse el caso de que aquél sea verdadero y éste falso.

(*c*) Cualquier par de enunciados verdaderos en tiempo de futuro cuya falsedad se produzca simultáneamente formarán un condicional correcto, cualquiera que sea su orden.

(*d*) Con cualquier par de enunciados verdaderos en tiempo de futuro cuya falsedad no se produzca al mismo tiempo podremos construir un condicional correcto tomando como antecedente al que se torne falso en primer lugar y como consecuente al que lo haga en último término.

(*e*) Cualquier condicional con un enunciado general verdadero como consecuente o un enunciado general falso como antecedente será un condicional correcto.

Diodoro podría haber evitado dos de estas paradojas, a saber, la (*b*) y la (*d*), añadiendo la cláusula «era verdadero» a sus anómalas definiciones

de las nociones modales, esto es, definiendo lo necesario como aquello que es y *era* verdadero y no será falso y lo posible como aquello que *era*, es o será verdadero. Tal modificación, no obstante, no habría logrado disipar las otras paradojas, ya que ninguna redefinición de las nociones modales en esos términos hará desvanecerse las paradojas (*a*) y (*c*). Si César dijo *Et tu, Brute* en el momento en que Bruto lo apuñalaba, no hubo ni habrá ningún instante en el que sea verdad que César dijo *Et tu, Brute* pero falso que Bruto lo apuñalara, ni viceversa.

La última de las paradojas implicadas en la posición de Diodoro es de menor cuantía, pero sólo porque es probable que cualquier proposición general cuya verdad nos conste haya de ser necesaria —y cualquier proposición general cuya falsedad nos conste haya de ser imposible— en un sentido más fuerte que el sospechado por Diodoro. Pues cuando se piensa en la necesidad o la imposibilidad en ese sentido fuerte, no parece absurdo afirmar que, si cualquier proposición es verdadera, entonces una proposición necesaria será verdadera; y recíprocamente que, si una proposición imposible fuese verdadera, entonces cualquier proposición sería verdadera.

Una consecuencia final de la tesis diodórica es la de que los condicionales correctos no pueden cambiar de modalidad a la manera como lo hacen los enunciados simples. De acuerdo con la definición de necesidad propugnada por Diodoro, dichos condicionales no sólo serán siempre necesarios, sino tendrían que *haberlo sido* en todo instante. Si no hay un instante en que sea cierta la afirmación de que «P y no-Q» es un enunciado verdadero, será invariablemente cierta la afirmación de que «O bien P y Q, o bien no-P y Q, o bien no-P y no-Q» es siempre verdadero, esto es, la afirmación de que lo enunciado en un condicional correcto es necesario en todo instante.

Los puntos de vista lógicos de Diodoro sobre la modalidad y los condicionales guardan probablemente alguna conexión en su mente con una tesis metafísica afín al eleatismo, a saber, el rechazo de la contingencia real. Este parece ser el objetivo perseguido por el Argumento Soberano, siendo posible que su obra se dirija especialmente contra la tesis defendida por Aristóteles en el capítulo 9 del *De Interpretatione*. Comoquiera que pueda interpretarse dicha tesis, Diodoro se enfrenta a ella. Pues sostiene que todos los enunciados verdaderos acerca del futuro son necesarios e intenta persentar este aserto como una consecuencia a extraer de algo admitido por el propio Aristóteles, como sería la necesidad del pasado. Lo que probablemente pretende probar, en última instancia, es que todos los enunciados verdaderos son necesarios sin excepción, mas tal programa se acabará viendo frustrado por su firme resolución de tomar en serio los tiempos verbales y por su falta de claridad acerca de la auténtica naturaleza de los sujetos a los cuales se aplican los predicados «verdadero» y «necesario».

Bastante más difícil es detectar alguna conexión entre la concepción de la modalidad por parte de Filón y su caracterización de lo que sea un condicional correcto, o entre cualquiera de las dos y una determinada posición metafísica. Pudiera ser que su definición del condicional correcto constituya una *reductio ad absurdum* de los puntos de vista de Diodoro; esto es, su intención podría haberse expresado más o menos en las siguientes

términos: «De acuerdo con tu concepción de la necesidad, se borraría toda distinción entre necesidad y verdad, o entre imposibilidad y falsedad, de modo que —en lugar de decir que un condicional es correcto si no es posible que comience con una verdad y concluya con una falsedad— podría igualmente bien haberse dicho que es correcto si no comienza con una verdad y concluye con una falsedad. Para poder sentar la diferencia que existe entre un condicional correcto y otro incorrecto, necesitas de una efectiva noción de necesidad, que es la que a continuación paso a exponer». Pero tal interpretación, no obstante, no es sino pura y simple conjetura; y, a juzgar por los datos con que contamos, Filón podría haber desarrollado todas y cada una de sus diversas concepciones con absoluta independencia de aquel propósito.

La tercera y la cuarta de las tesis enumeradas por Sexto son evidentemente intentos de presentar a los condicionales como enunciados de una conexión necesaria, por lo que parece probable que hayan sido propuestos por filósofos propicios a equiparar el uso de los enunciados condicionales con el de los enunciados de implicación. Así, cuando Zenón o alguno de sus seguidores formulaban un enunciado encabezándolo por la condición «Si hay movimiento ...», interpretaban el consecuente como algo que se seguía lógicamente del antecedente. Es este un uso muy corriente de la forma condicional. Nosotros ya tuvimos ocasión de comprobarlo al estudiar la formulación aristotélica de los principios del razonamiento silogístico, y volveremos a encontrarnos con él en lo sucesivo. Pero sería un error suponer que la expresión «si ... entonces ...» se usa siempre de este modo, y la tentación de identificar enunciados condicionales y enunciados de implicación ha originado numerosas confusiones en el dominio de la lógica. Si un enunciado implica otro, siempre cabrá confeccionar un condicional verdadero con el primero como antecedente y el segundo como consecuente; mas no se puede en cambio asegurar, ni mucho menos, que el antecedente de un condicional verdadero implique siempre el consecuente. Los filósofos que hablaban de implicación (ἔμφασις) parecen haber sido más proclives a este error que los que preferían hablar de conexión (συνάρτησις); pero la diferencia entre ambos modos de hablar no es demasiado relevante. La objeción esgrimida por los partidarios de la implicación frente a la teoría de la conexión no es, desde luego, decisiva. Si estamos dispuestos a admitir a los condicionales reiterativos como casos límites de una conexión necesaria, igualmente podríamos permitirnos hablar de un enunciado potencialmente contenido en sí mismo. Extensiones de este género en el empleo de nuestro vocabulario con el fin de procurar una mayor simplicidad no son infrecuentes, por ejemplo, en el lenguaje de la matemática.

Suponiendo que ambas concepciones rivales se dejen caracterizar como acabamos de hacerlo, ¿qué habría que decir de la cuestión en debate, esto es, del significado de «si ..., entonces ...»? Recientemente se ha sugerido, como en la antigüedad, que habría que elegir entre la teoría de Filón y la teoría de la conexión necesaria. Pero ninguna de las dos es, en rigor, satisfactoria a título de interpretación general de los enunciados condicionales; pues lo cierto es que cabe distinguir una pluralidad de usos diferentes de semejante recurso lingüístico.

Comencemos por considerar la intervención de «si» en oraciones otras que enunciados. Cuando una persona promete hacer algo si se da una determinada condición, está claro que esa persona no instituye ninguna conexión necesaria mediante dicho acto, e igualmente claro está que su locución no puede ser explicada por medio de ninguna adaptación de la teoría de Filón a tal efecto. Diremos que esa persona cumple su promesa cuando la condición estipulada ha sido satisfecha y se comporta como dijo que lo haría en semejante eventualidad. Mas no diríamos que cumple su promesa si la condición en cuestión dejara de darse. De análoga manera, no acostumbramos a decir que un soldado obedece una orden condicionada de su superior cuando la condición envuelta en dicha orden no ha tenido ocasión de producirse. En todos estos casos diríamos, más bien, que la locución condicional carece de aplicación. Ya que se trata aquí, evidentemente, de usos genuinos del modo de decir condicional, parece correcto concluir que la finalidad primordial de una cláusula encabezada por la conjunción «si» es llamar la atención sobre una posibilidad cuya realización no se halla asegurada para el que habla, de suerte que lo que se afirma en la otra cláusula del condicional se afirma únicamente por respecto a la posibilidad seleccionada.

Tal interpretación tendría asimismo aplicación a algunos enunciados de forma condicional. Supongamos, por ejemplo, que el corresponsal deportivo de un periódico predice que Oxford ganará la próxima regata si el agua está en calma, pero que el día de la prueba se levanta un viento considerable: nadie diría que la predicción del periodista ha sido verificada sobre la simple base de que la condición supuesta haya dejado de cumplirse. Si, en cambio, nos enteramos de que el agua estaba en calma y Oxford ganó la carrera, parecería completamente natural reconocer que el corresponsal acertó en su pronóstico. Por descontado, ya no cabrá servirse ahora de la oración condicional «Oxford ganó si el agua estaba en calma», porque ello entrañaría incertidumbre de nuestra parte acerca del estado del tiempo; pero será apropiado, en cambio, conceder que la predicción del periodista se ha acreditado como verdadera. Para decirlo en dos palabras, Filón habría tenido razón al sostener que la verdad de semejante enunciado condicional quedará establecida al comprobar que antecedente y consecuente son ambos verdaderos, pero habría errado en su intento de establecer la verdad de los enunciados condicionales cuyos antecedentes son falsos. Quizá podríamos describir la situación haciendo ver que un enunciado condicional de este género elemental parece constituir una función defectiva de verdad respecto de su antecedente y su consecuente. Esta interpretación será más fácilmente inteligible si pensamos en una *tabla de* verdad en la que no se asignen valores al condicional en aquellos casos en que el antecedente es falso:

P	Q	Si P, entonces Q
V	V	V
V	F	F
F	V	—
F	F	—

Hay que reconocer, no obstante, que una tal interpretación envolvería un par de consecuencias disonantes con la práctica establecida entre los lógicos. En primer lugar, los enunciados condicionales así interpretados no se hallarían sujetos al principio de bivalencia, insistentemente defendido por los estoicos. No quiere ello decir que nos veamos obligados a admitir un misterioso tercer valor entre la verdad y la falsedad, sino sencillamente que hay casos en que habría que aceptar que el condicional no es verdadero ni falso por carecer de aplicación. Cabría decir lo mismo de otro modo apuntando que, bajo esa interpretación, dicho condicional no podría propiamente ser negado. «Si P, entonces no-Q» es verdadero cuando «Si P, entonces Q» es falso, siendo falso cuando «Si P, entonces Q» es verdadero; mas el primero no es el contradictorio del segundo, ya que pudiera darse el caso de que ninguno de los dos sea verdadero ni ninguno de ellos falso. Y si tratáramos de identificar la negación de «Si P, entonces Q» con el signo proposicional que resulte ser falso cuando «Si P, entonces Q» es verdadero, siendo en otro caso verdadero, no habría entonces modo de distinguir entre «Si P, entonces Q» y la conjunción «P y Q». En segundo lugar, y de acuerdo con la interpretación propuesta, los condicionales tampoco se hallarían sujetos al principio de contraposición, esto es, «Si P, entonces Q» no sería equivalente a «Si no-Q, entonces no-P». Pues los dos enunciados sólo coincidirán en cuanto a su valor de verdad cuando los dos sean falsos; cuando uno cualquiera de ellos sea verdadero, el otro carecerá de aplicación. Así, para seguir con el ejemplo considerado más arriba, difícilmente podríamos acordar que la predicción del corresponsal periodístico resulte verificable en razón de la derrota de Oxford un día de viento, por más que ello bastase para verificar una predicción de la forma «Si Oxford no gana, será en un día en que el agua no esté en calma».

Si hay, pues, enunciados condicionales que no satisfacen el principio de bivalencia ni el de contraposición, ¿a qué se debe que los lógicos hayan pasado por alto este curioso hecho? La respuesta parece ser que incluso los enunciados condicionales del tipo elemental que acaban de considerarse encierran algo más de cuanto aquí llevamos visto en nuestro análisis. Aunque se diga que un enunciado de ese género queda verificado al comprobar que su antecedente y su consecuente son ambos verdaderos, quien lo formula creerá contar invariablemente con alguna razón adicional para hacerlo objeto de aserción, aparte del simple conocimiento de los hechos que bastarían para verificarlo. Pues, una vez que sepamos que antecedente y consecuente son verdaderos ambos, la fórmula condicional ya no resultará apropiada por más tiempo. Si urgiésemos, entonces, a nuestro interlocutor para que explicitase esa razón, podría tal vez decirnos que es imposible que el antecedente sea verdadero en tanto el consecuente es falso. El término «imposible» no precisa entenderse a este respecto como si su sentido equivaliese a «absolutamente imposible», pues la aserción originaria se hallaría justificada si pudiera mostrarse que la conjunción del antecedente con la negación del consecuente es imposible en relación con algún hecho susceptible de ser conocido con anterioridad al descubrimiento de los valores de verdad del antecedente y el consecuente. Mas la conexión expresada de esta guisa podría también ser expresada mediante la propia fórmula condicional con la adición de algún término

modal al consecuente. Así, si el corresponsal de prensa de nuestro ejemplo hubiera sido preguntado por la razón que le llevó a escribir lo que escribió, podría replicarnos enojado: «Oxford no puede dejar de ganar si el agua está en calma». Su respuesta quizás hubiera sido más rica en contenido informativo si en ella se adujesen los indicios de más o menos peso que la abonan, pero tal como está no se reduce a una mera repetición de la aserción originaria. Pues, en efecto, nuestro corresponsal se compromete al formularla con algo más que con una simple función defectiva de verdad del primitivo antecedente y el primitivo consecuente. Lo que nos dice implica su primera aserción, pero no puede a su vez ser verificado por la victoria de Oxford con el agua en calma ni lo declararíamos carente de aplicación por el hecho de que el día de la competición hiciera viento. Pues, de darse esta última circunstancia, el corresponsal seguiría comprometido a sostener la afirmación de que Oxford habría ganado la regata si el agua hubiese estado en calma. Semejante condicional subjuntivo equivale a la repetición del condicional modal con la implícita admisión de que su antecedente es falso.

En ocásiones, la conexión necesaria se expresa por medio de la forma condicional sin necesidad de añadir términos modales. Dicha formulación es particularmente frecuente en enunciados de carácter científico, como por ejemplo «Si toma usted vitamina C en grandes cantidades al comienzo de una afección gripal, evitará el desmadejamiento que a menudo se experimenta tras de la enfermedad». En nuestro caso, las cláusulas que el gramático describiría como prótasis y apódosis no constituyen cada una por su cuenta signos proposicionales completos; pues el pronombre personal «usted» funciona obviamente dentro de este contexto como una variable, de suerte que el enunciado condicional en su conjunto podría ser parafraseado mediante este otro: «Quienquiera que tome vitamina C en grandes cantidades al comienzo de una afección gripal evitará el desmadejamiento que a menudo se experimenta tras de la enfermedad». Se observará asimismo que la necesariedad (*necessitation*) * objeto de aserción en el ejemplo no es de tipo formal como la estudiada por la lógica. Mas el caso es que podemos servirnos de la forma condicional para la aserción de la necesidad lógica, de donde no es extraño que los lógicos —llevados de sus especiales intereses— se hayan pronunciado en ocasiones como si aquélla fuese de hecho la única función de semejantes enunciados.

Cuando usemos la expresión «si ..., entonces ...» con sentido modal, nuestros enunciados condicionales se hallarán sujetos a los principios de bivalencia y contraposición, por lo que no serán motivo de escándalo para la circunspecta consideración de los lógicos. En cambio, ya que no son funciones de verdad de sus antecedentes y consecuentes, no podrán ser verificados a partir del conocimiento de los valores de verdad de aquellos signos proposicionales, ni siquiera en el caso de que sean ambos verdaderos. Pero la posibilidad de semejante verificación es esencial a los enunciados con-

* En nuestra traducción del término *necessitation* —que los autores vuelven a emplear en otros lugares del libro, a propósito de la llamada "necesidad de las leyes naturales" (véase, por ejemplo, pág. 604)— por "necesariedad", seguimos a Víctor Sánchez de Zavala en su versión de *La lógica de la investigación científica* de K. R. Popper, pp. 398 y ss., contexto este último en el que precisamente se discuten algunas de las tesis sustentadas al respecto por el Profesor William Kneale en su obra *Probability and Induction*, Oxford, 1949. *(N. del T.)*

dicionales del tipo más elemental. Es imposible, por lo tanto, subsumir las diversas maneras de emplear la expresión «si ..., entonces ...» bajo una única regla común a todas ellas. No quiere decir esto, sin embargo, que la expresión sea irremediablemente ambigua; pues el contexto indica de ordinario si el enunciado condicional ha de tomarse en cada caso como una función defectiva de verdad o como la aserción de una conexión necesaria. Y el hecho de suponer que quien se sirve de un enunciado del primer género está depositando indefectiblemente su creencia en una proposición del segundo género explica la facilidad con que pasamos de uno a otro de esos dos usos de la expresión. Pues si, en efecto, el agua no estuviera en calma el día de la regata, encontraríamos natural que el periodista de nuestro ejemplo dijese: «Bien, Oxford habría ganado si el agua hubiese estado en calma».

Quien se sienta turbado por la necesidad de admitir enunciados condicionales que no se hallen sujetos a los principios de bivalencia y contraposición, podría experimentar tal vez algún alivio si piensa que esas locuciones difieren en otro importante respecto de los enunciados corrientes. Cuando nosotros admitimos la posibilidad de verificar una observación expresada en forma condicional por medio del descubrimiento de que su antecedente y su consecuente son ambos verdaderos, creemos por lo común que ese condicional nos ha servido para emitir un parecer o una opinión (*advice*) más bien que para suministrar una información, a saber, una opinión relativa a lo que se podría esperar que ocurra en ciertas circunstancias. Y por «verificación» en este contexto se entiende únicamente la justificación de dicha opinión por referencia a dichas circunstancias, esto es, con absoluta independencia de la base —si es que la hay— con que pudiéramos haber contado para emitirla. Algunos lógicos modernos han sostenido que todos los enunciados condicionales sirven de vehículo a opiniones más bien que a informaciones, pero al afirmar tal pasan por alto la distinción sobre la que hemos intentado atraer la atención. Un enunciado condicional que pretenda expresar una conexión necesaria no puede ser verificado en el especial sentido que se acaba de explicar, dado que ni siquiera constituye una función defectiva de verdad. Y si se le introduce en un contexto donde su objeto sea servir de vehículo a opiniones, sería considerado como un intento de expresar el fundamento con que contamos para emitir esas opiniones más bien que como un intento de formular las tales opiniones en sí mismas.

4. La teoría estoica del significado y la verdad.

En su estudio de la lógica, los estoicos prodigaron a ésta una atención más reflexiva que cualesquiera de sus predecesores. Así, se preocuparon de asignar a nuestra ciencia un lugar dentro de su esquema del conocimiento humano, pergeñando para ello una teoría acerca de la naturaleza de la misma. Según Diógenes, Zenón —el fundador de la escuela— fue el primero en dividir el cuadro de las disciplinas filosóficas en tres grandes apartados: física, ética y lógica [54]. Tal división se corresponde literalmente con

[54] Diógenes Laercio, VII, 39.

una clasificación de las proposiciones y los problemas presentada por Aristóteles en sus *Tópicos* [55], pero el explícito reconocimiento de la misma y su utilización doctrinal parecen constituir una aportación de los estoicos. Con posterioridad, se convirtió en un lugar común de la antigüedad la afirmación de que los estoicos consideraban a la lógica como *parte* de la filosofía, en tanto los peripatéticos la consideraban más bien como un *instrumento* (ὄργανον) de esta última [56].

Los estoicos elaboraron su división de la filosofía sirviéndose al efecto de metáforas un tanto pintorescas:

> «Comparan la filosofía con un animal, parangonando la lógica a los huesos y a los nervios, la ética a la carne y la física al alma. O también la comparan con un huevo: la lógica es la parte más externa, más dentro está la ética y la parte central corresponde a la física» [57].

Por lo demás, no estaban totalmente de acuerdo entre sí por lo que se refiere a las subdivisiones de la lógica:

> «Los hay que dicen que el apartado lógico del sistema se divide en dos ciencias, la retórica y la dialéctica, mientras otros añadirían un tercer apartado que se ocupe de las definiciones y un cuarto dedicado a cánones y criterios; otros, en fin, omiten el apartado concerniente a las definiciones» [58].

«Dialéctica» es el término estoico que más estrechamente se corresponde con nuestro vocablo «lógica», por más que dentro de ella se alberguen intereses que hoy clasificaríamos como epistemológicos, por un lado, o como gramaticales y lingüísticos por otro.

De acuerdo con Diógenes, los estoicos subdividieron a su vez la dialéctica en un apartado relativo a las cosas significadas (τὰ σημαινόμενα) y un apartado relativo a los significantes (τὰ σημαίνοντα) o elementos del lenguaje oral [59].

Según parece, dedicaron una atención considerable al último de dichos apartados. Distinguían, por ejemplo, entre la voz (φωνή), que puede ser un simple ruido, el habla (λέξις), que es necesariamente articulada pero pudiera carecer de sentido, y el discurso (λόγος), o locución propiamente significativa [60]. A su vez, distinguían entre tres aplicaciones diferentes de la palabra «letra»: a saber, cuando la aplicamos a un sonido, a su símbolo escrito y a su nombre, como por ejemplo «alpha» [61]. El apartado de la teoría que mayor originalidad reviste es, sin embargo, el relativo a las cosas significadas o expresadas, comúnmente denominadas *lektá* (λεκτά). La doctrina estoica en este punto constituye una importante novedad en la filosofía de la lógica y merece cuidadosa atención. Por desgracia, no contamos con datos suficientes para determinar exactamente cómo llegaron los estoicos a sus puntos de vista a este respecto ni podemos tampoco

---

55 *Tópicos*, I, 14 (105b19).
56 Alejandro, op. cit., p. I; Filopón, *In Aristotelis An. Pr. Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* XIII (II), p. 6.
57 Diógenes Laercio, VII, 40.
58 Ibid. 41.
59 Ibid. 43, 62.
60 La primera de dichas distinciones había sido advertida ya por Aristóteles en su *Historia Animalium*, IV, 9 (536b19), y la segunda aparece en el *Theaetetus*, 163 B, de Platón.
61 Diógenes Laercio, VII, 56-57.

adivinar cómo habrían respondido a algunas cuestiones importantes concernientes a la naturaleza de los *lektá*.

En lo que sigue, vamos primeramente a transcribir los pasajes más relevantes en los que se debate este problema. Para no prejuzgar las soluciones, mantendremos sin traducir aquel vocablo; pero valdría la pena recordar que el verbo griego λέγειν —del que λεκτόν deriva— equivale tanto a «significar» cuanto a «decir», de suerte que «lo significado» constituye probablemente la traducción más literal de *lektón*. A continuación, procederemos a ofrecer una caracterización de la clasificación estoica de los *lektá*, comparándola con su clasificación de los elementos del lenguaje oral. Pasaremos después a considerar el tratamiento estoico de la verdad y la falsedad y, tras de todo esto, estaremos en situación de afrontar una interpretación y evaluación de la teoría.

A Sexto debemos la exposición más completa de la cuestión que nos ocupa:

«Los estoicos afirman que estos tres elementos se dan en conexión: aquello que es significado, aquello que lo significa y el objeto. De los tres elementos, aquello que significa corresponde al habla, como por ejemplo 'Dión'; aquello que es significado es lo que se revela mediante esta palabra y nosotros aprehendemos como subsistente gracias a nuestro pensamiento, pero que los bárbaros no entenderían por más que hubiesen oído pronunciar la palabra; el objeto, por último, es lo que existe físicamente fuera de nosotros, como por ejemplo el propio Dión. Dos de esos elementos son corpóreos, a saber, el habla y el objeto, en tanto uno de ellos es incorpóreo: lo significado —esto es, el *lektón*—, que es verdadero o falso» [62].

El final del pasaje encierra una obvia incorrección, ya que no todos los *lektá* son verdaderos o falsos. Por ejemplo, lo significado por el nombre «Dión» no es una cosa ni otra, como el propio Sexto se cuida de subrayar a continuación. Más adelante nos refiere:

«(Los estoicos) afirman que el *lektón* es lo subsistente conforme a una representación racional, donde por tal hay que entender aquélla que puede ser transmitida en el habla» [63].

Esta definición es confirmada por Diógenes:

«De las representaciones, algunas son racionales y otras irracionales... (Los estoicos) sostienen que el *lektón* es lo subsistente según una representación racional» [64].

Séneca, finalmente, nos ofrece en latín la siguiente caracterización:

«Video Catonem ambulantem. Hoc sensus ostendit, animus credidit. Corpus est quod video, cui et oculos intendi et animum. Dico deinde: 'Cato ambulat'. 'Non corpus', inquit, 'est quod nunc loquor sed enuntiativum quiddam de corpore, quod alii effatum vocant, alii enuntiatum, alii dictum.'» [65]

En nuestro párrafo, *effatum*, *enunciatum* y *dictum* constituyen otros tantos intentos de traducción latina de λεκτόν.

---

62 Sexto, *Adv. Math.* VIII, 11, 12.
63 Ibid. 70.
64 Diógenes Laercio, VII, 51 y 63.
65 *Epistulae*, 117, 13.

Tres importantes rasgos emergen de los pasajes transcritos: que los *lektá* son objeto de significación en el discurso significativo, que son incorpóreos y que una importante subclase de los mismos es susceptible de verdad y falsedad. En su condición de incorpóreos, los *lektá* constituyen un caso excepcional en la metafísica estoica, puesto que los estoicos eran materialistas que consideraban corpórea al alma misma [66].

Tras de explicar el uso estoico del vocablo *lektón*, Sexto intenta demostrar que la teoría encierra dos graves contradicciones. El pasaje en que lo hace merece ser considerado con algún detalle, no sólo por la información suplementaria que nos proporciona, sino asimismo por constituir una buena muestra del trato dispensado por Sexto a sus oponentes [67]. Sexto comienza ofreciéndonos una caracterización de los signos naturales (*σημεῖα*) que parece extraída de un capítulo de la epistemología estoica. Los estoicos afirman que un signo de este género es una proposición (*ἀξίωμα*, un tipo de *lektón*), algo por tanto de carácter inteligible más bien que sensible: de acuerdo con su definición, se trata del antecedente verdadero de un condicional correcto, que tiene por misión hacer al consecuente manifiesto. A continuación, procede a examinar qué sea un condicional correcto, atribuyendo a los estoicos la doctrina que asociábamos antes a Filón. Sexto recalca, sin embargo, que el antecedente sólo podría considerarse como un signo en caso de ser verdadero, debiendo en dicho caso satisfacer un nuevo requisito, cual es el de servir para hacer manifiesto al consecuente [68]. Así, el antecedente del condicional «Si es de día, hay claridad» no sería propiamente un signo, ya que el consecuente «Hay claridad» es algo manifiesto de por sí. Un ejemplo de antecedente que sea un signo sería «Si ella tiene leche en sus pechos, ella ha concebido». Los estoicos afirman, además, que tanto el signo como lo significado han de darse «presentes». Pudiera, desde luego, parecer que no siempre es eso lo que ocurre. Cuando consideramos, por ejemplo, «Si él tiene una cicatriz, tuvo una herida» y «Si él tiene una herida en el corazón, morirá», nos inclinamos a conceder que las cosas significadas —a saber, la herida y la muerte— corresponden respectivamente al pasado y al futuro. Ahora bien, los estoicos advertirían que —aunque la herida pertenezca al pasado— el haberla sufrido (*τὸ δὲ ἕλκος ἐσχηκέναι τοῦτον*), que constituye una proposición, es algo presente (*ἀξίωμα καθεστηκός, ἐνέστηκεν*), por más que aluda a algo pasado. De la misma manera, la muerte pertenece al futuro, mas la proposición de que él ha de morir es también algo presente (*τὸ δὲ ἀποθανεῖσθαι τοῦτον ἀξίωμα ἐνέστηκεν*), por más que aluda a algo futuro, y es verdadero ahora (*νῦν ἐστιν ἀληθές*) [69].

Hasta aquí, la reproducción de los puntos de vista estoicos por parte de Sexto es probablemente fidedigna. También se halla en lo cierto, a no dudarlo, cuando nos advierte de que no todo el mundo accedería de buen grado a admitir la existencia de cosas tales como *lektá* y que incluso algunos estoicos —como Basílides, por ejemplo— la rechazaron abiertamente. Mas a continuación procede a elaborar una argumentación típicamente escéptica, tendente a persuadirnos de que dicha existencia no puede ser probada

66 Diógenes Laercio, VII, 56-57.
67 *Adv. Math.* VIII, 243-65.
68 *ἀξίωμα ἐν ὑγιεῖ συνημμένῳ καθηγούμενον, ἐκκαλυπτικὸν τοῦ λήγοντος*, *Adv. Math.* VIII, 245.
69 Ibid. VIII, 255-6.

más que dando por sentado lo que pretendía demostrarse. Las pruebas o demostraciones —nos advierte— se componen de *lektá*, cuya existencia es justamente lo que se halla en cuestión. Más aún, se supone —arguye— que los *lektá* son incorpóreos, lo que de acuerdo con los estoicos entraña que no sean capaces de acción ni de pasión. Pero hacer a otra cosa manifiesta, que es la función de un signo, constituye una forma de acción. He aquí la primera contradicción. La segunda se sigue de inmediato de lo que acaba de decirse. Las cosas que significan se supone que sean sonidos en tanto los significados serían *lektá*, entre los que se incluyen las proposiciones. Mas si es así, y ya que todas las proposiciones son cosas significadas en cuanto distintas de los significantes, resulta imposible —apunta Sexto— que un signo natural (σημεῖον) sea una proposición [70].

Estas dos últimas observaciones revelan el escaso rigor de Sexto en la formulación de sus críticas. En primer lugar, los estoicos —aunque parece cierto que admitieron que todo lo que es capaz de actividad es un cuerpo [71]— podrían muy fácilmente responder a la primera objeción haciendo ver que manifestar algo no es una actividad en el sentido propio del término. En segundo lugar, cuando Sexto presume detectar una contradicción entre la epistemología y la teoría semántica de los estoicos, ignora palmariamente el hecho de que en una y otra se utilizan terminologías diferentes por más que similares. La relación entre σημαίνον y σημαινόμενον es la que existe entre el lenguaje y lo que éste último expresa, en tanto que la relación entre σημεῖον y σημειωτόν es la existente entre lo conocido en primer lugar y lo conocido a través suyo [72]. No hay ninguna contradicción en suponer que una proposición pueda ser significada mediante una oración enunciativa y que, ello no obstante, actúe para quien cobra conocimiento de la misma como un signo de otra nueva proposición. Si pensamos ahora que Sexto es nuestra primera autoridad en materia de lógica estoica, no nos extrañará que ésta haya sido con frecuencia malinterpretada y presente aún zonas oscuras. La teoría de los *lektá*, especialmente, parece haber originado bastante confusión desde los primeros momentos. Por ejemplo, comentaristas aristotélicos tardíos —como Simplicio o Filopón— interpretarían de manera diferente los *lektá* estoicos, afirmando el primero que se trata de pensamientos [73] y sosteniendo el segundo que son meros sonidos [74].

Aunque los *lektá* hayan de ser distinguidos de sonidos, palabras u oraciones habladas, está claro que su identificación sólo es posible por recurso a una palabra o una oración que los exprese, por lo que no es sorprendente que los diversos tipos de *lektá* y los elementos del lenguaje oral se correspondan con notable aproximación. Diógenes nos ofrece el siguiente cuadro de las divisiones del λόγος, o lenguaje articulado e inteligible. Según nos informa, un cierto Diógenes de Babilonia, así como Crisipo, distinguían cinco partes del discurso, a saber, el nombre (ὄνομα), el nombre común o apelativo (προσηγορία), el verbo (ῥῆμα), la conectiva o conjunción (σύνδεσμος) y el artículo (ἄρθρον). Antípatro añadió a éstas una sexta llamada el intermedio (μεσότης) [75]. El nombre común (προσηγορία) se define como aquella parte del

70 Ibid. 262-4.
71 Diógenes Laercio, VII, 56.
72 Para la teoría de los signos, cf. Sexto, *Adv. Math.* VIII, 143.
73 Simplicio, *In Aristotelis Categorias Commentarium*, ed. Kalbfleisch, *C.I.A.G.* VIII, p. 10.
74 Filopón, *In Aristotelis An. Pr. Commentaria*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* XIII (II), p. 243.
75 Diógenes Laercio, VII, 57-58.

discurso que significa una cualidad común, por ejemplo «hombre» o «caballo». El nombre es aquella parte del discurso que significa una cualidad individual (ἰδία ποιότης), por ejemplo «Diógenes» o «Sócrates». El verbo es aquella parte del discurso que significa un predicado carente de composición (ἀσύνθετον κατηγόρημα) o, según otros, aquel elemento indeclinado del discurso que significa algo susceptible de ser engarzado (συντακτόν) con una o más cosas, por ejemplo «Escribo» o «Hablo». La conjunción es aquella parte indeclinada del discurso que tiene por misión la conexión entre diversas otras partes de este último. El ἄρθρον es simplemente el artículo. Diógenes no es más explícito acerca del μεσότης, pero se trata probablemente de lo que Dionisio de Tracia (*c.* 100 a. C.) llama en su libro de gramática el μετοχή, esto es, el participio, así llamado por participar (μετέχει) a la vez de la condición del nombre y la del verbo [76].

Es interesante reparar en que los estoicos parecen haber sido los primeros en acometer un estudio sistemático de lo que hoy llamamos la gramática. La terminología de Dionisio de Tracia revela obviamente su procedencia estoica. Dionisio define el λόγος como «una combinación de elementos del habla en prosa o verso que revela un pensamiento completo», distinguiendo ocho partes del mismo: nombre, verbo, participio, artículo, pronombre (ἀντωνυμία), preposición (πρόθεσις), adverbio (ἐπίρρημα) y conjunción. Que la fuente estoica está siendo modificada en esta clasificación parece demostrarlo el hecho de que el autor defienda en ella la exclusión de la προσηγορία, alegando que se trata de una especie de ὄνομα. El adjetivo «completo» (αὐτοτελής) que aparece en la definición constituye asimismo una pieza terminológica típicamente estoica.

La lista de las partes del discurso ofrecida por Diógenes Laercio sorprende por sus llamativas omisiones. En la misma no parece haber lugar para la preposición, el pronombre o el adverbio. Mas los estoicos no las pasaron, sin embargo, por alto, como lo demuestra un pasaje de Prisciano, el gramático latino que escribió en Constantinopla en el siglo VI d. C.:

«Secundum Stoicos vero quinque sunt eius partes: nomen, appellatio, verbum, pronomen sive articulus, coniunctio. Nam participium connumerantes verbis participiale verbum vocabant vel casuale; nec non etiam adverbia nominibus vel verbis connumerabant et quasi adiectiva verborum ea nominabant; articulis autem pronomina connumerantes finitos ea articulos appellabant; ipsos autem articulos, quibus nos caremus, infinitos articulos dicebant vel, ut alii dicunt, articulos connumerabant pronominibus et articularia eos prenomina vocabant; ...praepositionem quoque Stoici coniunctioni copulantes praepositivam conjunctionem vocabant.» [77]

Prisciano fue autoridad muy influyente en la Edad Media, y el vocablo *appellatio* —su traducción de προσηγορία— reaparece en la terminología lógica medieval.

Volvamos ahora a la clasificación de los *lektá* por parte de Diógenes. Tal clasificación se halla más o menos sistemáticamente articulada en un largo pasaje [78] y también Sexto la reproduce casi punto por punto [79]. La división capital de los *lektá* agrupa a éstos en completos (αὐτοτελῆ) y

76 *Anecdota Graeca*, ed. Bekker, II, p. 634.
77 *Grammatici Latini*, ed. Keil, II, p. 54.
78 Diógenes Laercio, VII, 63-83.
79 *Adv. Math.* VIII, 70 y ss., 93 y ss.

defectivos (ἐλλιπῆ): «Son defectivos aquellos cuya expresión resulta inacabada (τὰ ἀναπάρτιστον ἔχοντα τὴν ἐκφοράν), como por ejemplo 'Escribe'; pues cabría preguntar: '¿Quién?'». Completos son aquellos cuya expresión no deja cabos sueltos, como por ejemplo «Sócrates escribe» [80]. Los *lektá* incompletos o inacabados parecen subdividirse en predicados (κατηγορήματα) y sujetos (πτώσεις, «casos»). Diógenes nos ofrece dos definiciones de κατηγόρημα. De acuerdo con la primera, el predicado es algo que se dice de algo, o una cosa susceptible de combinación con otra u otras (πρᾶγμα συντακτὸν περί τινος ἢ τινῶν); de acuerdo con la segunda, se trata de un *lektón* defectivo combinable con un caso nominativo en orden a formar una proposición [81]. Las subdivisiones de los κατηγορήματα resultan un tanto oscuras. Las distinciones establecidas por Diógenes parecen corresponder a las que se dan entre verbos transitivos, pasivos, intransitivos y reflexivos, hallándose expresadas por entero en términos gramaticales. Así, se dice que un predicado directo es aquel que, combinado con un caso oblicuo, arroja un predicado completo, por ejemplo, «teme», «ve», «conversa», añadiendo Diógenes que los casos oblicuos son el genitivo, el dativo y el acusativo [82].

Los *lektá* completos se subdividen, según Diógenes, en *axiōmata* (ἀξιώματα), preguntas (ἐρωτήματα), inquisiciones (πύσματα), órdenes (προστακτικά), promesas (ὁρκικά), ruegos (ἀρατικά), suposiciones (ὑποθετικά), proclamas (προσαγορευτικά) y casos similares a los *axiōmata* (πράγματα ὅμοια τοῖς ἀξιώμασιν) [83]. Sexto presenta una lista parecida, con la excepción de introducir la expresión εὐκτικά en lugar de ἀρατικά y denominar a las cosas semejantes a *axiōmata* «más que *axiōmata*» [84]. Estos últimos revisten especial interés. Sexto nos ofrece la mejor explicación con que contamos de ellos. En su opinión, son más que *axiōmata* y no estrictamente *axiōmata*. Si, por ejemplo, decimos «El boyero se parece a los hijos de Príamo», el *lektón* es un *axiōma* y será verdadero o falso. Mas la adición de una palabra a esa oración, como cuando decimos «¡Cómo se parece el boyero a los hijos de Príamo!», hace que aquélla exprese algo que ya no es un *axiōma* y no será, por tanto, verdadero ni falso, puesto que tales propiedades incumben exclusivamente a los *axiōmata*.

Los *axiōmata* revisten, evidentemente, la mayor importancia lógica. El vocablo ἀξίωμα se halla emparentado con el verbo ἀξιοῦν, que significa hacer valer o reivindicar algo. Así pues, no le corresponde —como en Aristóteles [85]— el moderno sentido fuerte de la palabra «axioma». «Aserción» sería quizá su traducción más literal. También ha sido traducido por «juicio» y por «proposición». Por el momento, nos limitaremos —como antes hicimos con *lektón*— a transcribirlo, con el fin de evitar asociaciones equívocas. Diógenes nos ofrece la siguiente definición: «Un *axiōma* es aquello que es verdadero o falso, esto es, algo completo de carácter enunciativo (πρᾶγμα αὐτοτελὲς ἀποφαντὸν ὅσον ἐφ' ἑαυτῷ)» [86]. Casi con idénticas palabras repiten Sexto [87] y Aulo Gelio, citando éste un manual estoico [88], dicha de-

80 Diógenes Laercio, VII, 63.
81 Ibid. 64.
82 Ibid. 65.
83 Ibid. 66.
84 *Adv. Math.* VIII, 73.
85 *An. Post.* I, 2 (72a17).
86 Diógenes Laercio, VII, 65.
87 *Pyrrh. Hyp.* II, 104.
88 *Noctes Atticae*, XVI, 8.

finición. Parece, pues, fuera de duda que para los estoicos todo *axiōma* es o bien verdadero o bien falso, y Cicerón advierte que Crisipo puso gran énfasis en este punto [89].

Los *axiōmata* se clasifican en simples y no-simples. Los simples constan de un único *axiōma* y los no-simples de diversas *axiōmata* o de un *axiōma* reduplicativo. Un ejemplo del primer género sería «Si es de día, hay claridad»; y del segundo, «Si es de día, es de día» [90]. El *axiōma* reduplicativo recibe la denominación técnica de διφορούμενον [91]. El hecho de que se diga que los *axiōmata* complejos se componen de *axiōmata* simples parece sugerir que los estoicos no distinguen entre una aserción o un enunciado y la proposición o el contenido proposicional expresado al efectuar la aserción. Tanto la denominación cuanto la definición de *axiōma* parecen indicar que se trata de una aserción, pero no es en cambio cierto que —al servirnos de una oración condicional— estemos haciendo más de una aserción. La aserción no recae en dicho caso sobre lo expresado por la prótasis o la apódosis aisladamente consideradas.

La división de los *axiōmata* simples por parte de Diógenes se inspira en dos principios diferentes, si bien él no lo reconoce expresamente. El primero de ellos nos conduce a una triple clasificación del *axiōma* en categórico (κατηγορικόν), definido (καταγορευτικόν) e indefinido (ἀόριστον), en tanto que el segundo facilita la distinción entre *axiōmata* afirmativos y negativos, con diversas subespecies en este última caso [92]. Sobre la base del primer principio, también Sexto nos presenta una triple clasificación, aunque emplea la terminología «definido», «indefinido» e «intermedio» (ὡρισμένα, ἀόριστα, μέσα) [93]. El *axiōma* definido parece corresponder aquí al καταγορευτικόν de Diógenes: los ejemplos de Sexto son «Este hombre pasea» y «Este hombre está sentado». De modo análogo, los *axiōmata* indefinidos son los mismos para ambos autores. Los ejemplos de *axiōmata* intermedios que Sexto nos ofrece son «El hombre está sentado» o «Un hombre está sentado» y «Sócrates pasea». Explica que el *axiōma* indefinido se dice verdadero cuando se sabe que lo es el definido correspondiente, arguyendo que —a menos que este último sea verdadero— no lo podría ser ninguna proposición [94], de donde se desprende que los estoicos consideraban al *axiōma* definido como básico.

La precedente clasificación registra dos peculiaridades. En primer lugar, no se hace en ella distinción alguna entre *axiōmata* expresados por oraciones en que intervienen nombres propios y *axiōmata* expresados por oraciones en que intervienen nombres comunes a título de sujetos. Tal omisión obedece a la doctrina estoica de que ambos tipos de vocablos —nombres propios y comunes— significan cualidades, por lo que no diferirían esencialmente los unos de los otros. En segundo lugar, en ella no hay lugar

89 *De Fato*, 38.
90 Diógenes Laercio, VII, 68-69.
91 Se trata de un vocablo infrecuente en otros contextos, lo que propiciaría su corrupción en διαφορούμενον a manos de los copistas, originando así una considerable confusión en los textos y traducciones. Cf. a este respecto las precisiones textuales de Prantl, *Geschichte der Logik*, I, p. 445 y s., n. 122.
92 Diógenes Laercio, VII, 69.
93 *Adv. Math.* VIII, 96.
94 Ibid. 98.

—dentro de los *lektá* simples— para la proposición universal aristotélica. No aparece, en efecto, un solo ejemplo que contenga las partículas πᾶς o πάντες. En un pasaje, sin embargo, Sexto atribuye a los estoicos la tesis de que una definición sólo difiere en su expresión de un *axiōma* universal (καθολικόν), explicando tal circunstancia mediante la afirmación de que pensaban que «El hombre es un animal mortal y racional» equivale a «Si algo es un hombre, es un animal mortal y racional» (εἴ τί ἐστιν ἄνθρωπος ἐκεῖνο ζῷόν ἐστι λογικὸν θνητόν)[95]. Se menciona asimismo a Crisipo endosándole un análisis similar de «Las cosas son buenas, malas o indiferentes». Y todo ello da pie para pensar que nos hallamos ante el tratamiento estoico de las proposiciones universales. Este pasaje también arroja alguna luz sobre un detalle curioso en la exposición de Diógenes, a saber, su presentación de «El está en movimiento» (ἐκεῖνος κινεῖται) como un ejemplo de *axiōma* indefinido más bien que definido, tal y como cabría haber esperado. Si los estoicos acostumbraban a servirse de ἐκεῖνος en oraciones tales como «Si alguien es un hombre, entonces *él* es mortal», es muy posible que antepusiesen dicho uso del vocablo a su uso demostrativo.

Sobre la base del segundo principio de clasificación, Diógenes distingue tres clases de *axiōmata* aparte del afirmativo: a saber, el negativo, la denegación y el privativo.

Como ejemplo de *axiōma* negativo (ἀποφατικόν), propone «No es de día» (οὐχὶ ἡμέρα ἔστιν), escribiendo como si todos los *axiōmata* de este género fuesen simples. La discusión de los enunciados contradictorios (ἀντικείμενα) por parte de Sexto revela, sin embargo, que los estoicos concebían la posibilidad de que la negación recayese sobre cualquier *axiōma*, aun si complejo. Insistieron, así, en que el contradictorio de un *axiōma* se construye prefijando la partícula negativa οὐχί al conjunto de este último:

> «(Los estoicos) sostienen que los contradictorios son tales que uno de ellos excede al otro en la negación (ἀποφάσει), como por ejemplo 'No es de día' (οὐχ ἡμέρα ἔστιν) respecto de 'Es de día'. Pues el primero de estos *axiōmata* añade al segundo la negación, esto es, la partícula 'no' (οὐχί), razón ésta por la que se convierte en su contradicción. Mas si es en esto en lo que la contradictoriedad consiste, *axiomata* tales como los siguientes serán también contradictorios: 'Es de día y hay claridad' y 'Es de día y no hay claridad'. De acuerdo con los estoicos, sin embargo, no se trata de *axiōmata* contradictorios, de donde se desprende que lo que los convierte en tales no es el hecho de que uno de ellos exceda al otro en la negación. Los estoicos insisten, no obstante, en que es esta condición la que determina la contradictoriedad, si bien la negación de que ellos hablan es la antepuesta a uno de los *axiōmata* considerado como un todo. Pues, en tal caso, la negación gobierna (κυριεύει) al ***axiōma* en su conjunto, mientras que en 'Es de día y no hay claridad'** sólo lo hace con una parte de este último y no alcanza a convertir en negativa la totalidad. Es menester, pues, completar la noción de contradictoriedad añadiendo que dos *axiōmata* son contradictorios no simplemente cuando uno de ellos excede al otro en la negación, sino **cuando la negación antecede al *axiōma* negado** en su conjunto»[96].

El fragmento precedente es digno de atención por manejarse en él la idea de una partícula destinada a gobernar toda una proposición o sólo parte de

[95] Ibid. XI, 8.
[96] Sexto, *Adv. Math.* VIII, 89-90.

esta última. Nos encontramos aquí con la primera aparición de la noción de alcance de un operador. Los estoicos también se hallaban familiarizados con la posibilidad de un *axiōma* doblemente negativo (*ὑπεραποφατικόν*) reconociendo su equivalencia con el correspondiente afirmativo originario [97].

La denegación (*ἀρνητικόν*) difiere del *axiōma* negativo en que no contiene uno afirmativo negado. Se compone de una partícula denegante y un predicado, como sucede por ejemplo en «Nadie pasea». De su definición parece desprenderse que las denegaciones han de tener como sujeto las expresiones «nadie» o «nada». Ignoramos cómo habrían clasificado los estoicos las proposiciones expresadas por medio de oraciones que contengan las palabras «nunca» o «en ninguna parte». El *axiōma* privativo (*στερητικόν*) contiene lo que cabría llamar un predicado privativo, como en el caso por ejemplo de «El es descortés» [98].

Entre los *axiōmata* no-simples distingue Diógenes las especies siguientes:

(1) El condicional (*συνημμένον*) formado por medio de la conectiva «si» (*εἰ*);
(2) el inferencial o condicional modificado (*παρασυνημμένον*) formado por medio de la conectiva «puesto que» (*ἐπεί*);
(3) el conjuntivo (*συμπεπλεγμένον*) formado por medio de la conectiva «y» (*καί*);
(4) el disyuntivo (*διεζευγμένον*) formado por medio de la conectiva «o» (*ἤ, ἤτοι*);
(5) el causal (*αἰτιῶδες*) formado por medio de la conectiva «porque» (*διότι*);
(6) el *axiōma* formado por medio de la conectiva «más bien que» (*μᾶλλον . . . ἤ*);
(7) el *axiōma* formado por medio de la conectiva «menos que» (*ἧττον . . . ἤ*)[99].

El exacto sentido de algunas de estas formas compuestas será objeto de discusión más adelante. Mas por lo pronto cabría formular las siguientes observaciones.

A juzgar por la lista precedente, los estoicos no parecen haber tenido conciencia de la nítida e importante distinción existente entre enunciados compuestos de carácter veritativo-funcional y enunciados compuestos que no revisten tal carácter. Un enunciado compuesto del primer tipo es, como ya hemos visto, aquel cuya verdad o falsedad se determina exclusivamente en razón de la verdad o falsedad de las proposiciones que lo integran; para Filón, pongamos por caso, el condicional sería un enunciado compuesto de esa índole. Diógenes parece ofrecernos una definición veritativo-funcional de otra de las formas de aquella lista —a saber, la disyuntiva— cuando escribe:

«Dicha conectiva ('o bien') muestra que uno de los *axiōmata* es falso» [100].

---

97 Diógenes Laercio, VII, 69.
98 Ibid. 70.
99 Ibid. VII, 71-74.
100 Ibid. 72.

Mas tal constatación difícilmente podría interpretarse como una definición, ya que la función más importante de la mencionada conectiva es indicar que una de las proposiciones disyuntivas es verdadera. La observación de Diógenes no tiene probablemente otro objetivo que aclarar que se trata de la disyunción fuerte o exclusiva. Asimismo encontramos en Diógenes una caracterización parcialmente veritativo-funcional de la forma inferencial cuando advierte:

«Esta conectiva ('puesto que') establece que el segundo miembro se sigue del primero y que el primero es verdadero» [101].

Sexto, por su parte, nos ofrece una definición veritativo-funcional de la conjunción [102], ulteriormente elaborada por Aulo Gelio, que cita un manual estoico:

«In omni autem coniunctione si unum est mendacium, etiamsi cetera vera sunt, totum esse mendacium dicitur» [103].

Tal interpretación se hallaba en apariencia necesitada de defensa, pues quien dejase de entender que un enunciado conjuntivo ha de considerarse como *un* enunciado de una pieza podría objetar muy fácilmente que cabría describirlo como «no más verdadero que falso» si algunos de sus elementos constitutivos fuesen verdaderos y otros falsos o aun conceder quizás que lo mejor sería llamarlo verdadero «si la mayor parte de sus componentes fuesen verdaderos» [104]. Del condicional hallamos en Diógenes una definición que concuerda con la tercera de las tesis enumeradas por Sexto en su versión de la controversia sobre las proposiciones condicionales:

«Un condicional es verdadero si el enunciado contradictorio de su consecuente es incompatible con su antecedente» [105].

De acuerdo con la doctrina general de los estoicos acerca de las relaciones entre *lektá* y lenguaje, podría haberse esperado que las divisiones del lenguaje oral y las de los *lektá* se correspondiesen entre sí más estrechamente de lo que en realidad lo hacen. Del verbo se dice que significa un predicado (*κατηγόρημα*), que es un tipo de *lektón;* pero los nombres tanto comunes cuanto propios se dice que significan propiedades (*ποιότητες*), que para nada intervienen en la lista de los *lektá*. Su lugar, si lo hay en esa lista, se hallaría ocupado por los «casos». La conjunción o conectiva (*σύνδεσμος*) es mencionada indistintamente como elemento del habla y como parte esencial del correspondiente *lektón* compuesto. Malgastaríamos nuestro tiempo conjeturando sin más pruebas cómo habrían despachado los estoicos tales interpretaciones alternativas o discrepantes de los ingredientes de su teoría. Una posible explicación consistiría en hacer ver que, en la teoría de los *lektá*, su atención se concentraba primordialmente sobre los *lektá* completos —*axiōmata*, preguntas, etc.—, mientras que sus teorías gramaticales les llevaban a interesarse preferentemente por las unidades básicas de significación, esto es, las palabras. Cuando consideraban a éstas en conexión con su teoría de los *lektá*, tendían a pensar en las funciones desempeñadas por las mismas en el seno de una ora-

101 Ibid. 71.
102 *Adv. Math.* VIII, 125-7.
103 *Noctes Atticae*, XVI, 8.
104 Sexto, loc. cit.
105 Diógenes Laercio, VII, 73.

ción, pasando a describirlas como si significasen sujetos, predicados y demás. Desde el punto de vista gramatical, en cambio, atendían a la significación de una palabra independientemente de su relación con las significaciones de otras palabras. El nombre común, por ejemplo, podría oficiar gramaticalmente ya sea como sujeto, ya sea como predicado, significando por igual en uno y otro caso una cualidad; mas el *lektón* incompleto por él significado no sería el mismo en cada caso, ya que le correspondería desempeñar un cometido diferente en el interior de un *lektón* completo.

Vayamos ahora con la teoría estoica de la verdad. Los estoicos distinguían la verdad (ἡ ἀλήθεια) de lo verdadero o lo que es verdadero. Sexto explica la distinción en un par de pasajes, el más breve de los cuales reza como sigue:

> «Lo verdadero se dice que difiere de la verdad en tres respectos. a saber, por su esencia (οὐσίᾳ), por su constitución (συστάσει) y por su sentido (δυνάμει): por su esencia, ya que lo verdadero es incorpóreo (pues se trata de un *axioma* y, por ende, de un *lektón*) mientras que la verdad es un cuerpo (pues se trata del conocimiento expresivo de todos los *axiōmata* verdaderos y el conocimiento no es sino un cierto estado de la parte dominante del alma, tal y como el puño no es sino un cierto estado de la mano; pero la parte dominante del alma es un cuerpo, ya que —según los estoicos— radica en el aliento); por su constitución, ya que lo verdadero es algo simple,como por ejemplo 'Yo converso', mientras que la verdad consiste en una serie de actos de conocimiento (γνώσεων) verdaderos; por su sentido, ya que la verdad se halla en conexión con el conocimiento, mientras que ése no es siempre el caso de lo verdadero, razón por la que los estoicos afirman que la verdad reside únicamente en el hombre justo, en tanto que lo verdadero puede asimismo residir en el injusto, en la medida en que es capaz de decir algo verdadero» [106].

Por la «parte dominante» del alma entienden los estoicos el intelecto, que —en cuanto parte del alma— será para ellos material. Sostienen, así pues, que la «verdad» alude a todo un sistema de conocimientos tal y como éste puede ser poseído por una o varias personas, en tanto que «verdadero» es un adjetivo que se aplica a un *axiōma*. Semejante distinción lingüística pudiera parecernos un tanto excéntrica, pero resulta en cualquier caso perfectamente inteligible. En lo que sigue no nos ocuparemos para nada de la verdad en la acepción estoica del término.

Los estoicos aplican los predicados «verdadero» y «falso» a tres tipos distintos de sujetos, a saber, *axiōmata* (ἀξιώματα), representaciones (φαντασίαι) y argumentos (λόγοι). Pero el uso de «verdadero» y «falso» por referencia a los *axiōmata* era con toda probabilidad considerado como básico. Dos razones abonan esta suposición. La primera es que Sexto nos transmite como característicamente estoica la doctrina de que verdad y falsedad versan acerca de lo significado (περὶ τῷ σημαινομένῳ): «Las opiniones diferían asimismo en el sentido de que algunos juzgaban que la verdad y la falsedad se refieren a lo significado, otros juzgaban que al lenguaje y todavía unos terceros que al curso del pensamiento. Los estoicos defendían el primero de estos puntos de vista» [107]. En segundo lugar, la verdad de los argumentos se definía en términos de la verdad de las proposiciones, y es muy probable que otro tanto ocurriera con la verdad de las representaciones. Un argumento

---

106 *Pyrrh. Hyp.* II, 81 y ss. Cf. *Adv. Math.* VII, 38 y ss.
107 Ibid. VIII. 11.

se dice verdadero cuando es válido y posee premisas verdaderas [108]. Por lo que hace a las representaciones verdaderas, la cosa ya no está tan clara. Sexto escribe: «Las representaciones verdaderas son aquellas de las que cabe hacer una predicación (κατηγορία) verdadera, como por ejemplo 'Es de día' o 'Hay claridad' en este instante» [109]. Si interpretamos aquí κατηγορία como equivalente a ἀξίωμα, Sexto estaría definiendo la verdad de las representaciones en términos de la verdad de los *axiōmata*. Una tal identificación resulta plausible, pero el término κατηγορία sólo aparece otra vez más en los escritos de Sexto y en ninguno de ambos pasajes aclara éste su auténtico sentido.

La teoría de las representaciones corresponde a la epistemología de los estoicos más bien que a su lógica. En líneas generales, los estoicos parecen haber entendido por representación una impresión sensorial o una imagen mental. Pero el caso es que se ocuparon con insistencia del criterio de verdad de las representaciones, y eso parece sembrar alguna duda acerca de su determinación de considerar como básico el uso del término «verdadero» en su aplicación a los *axiōmata*. Podrían haber sostenido con perfecta coherencia que —a los efectos de ofrecer una definición— resulta básica la proposición verdadera, en tanto que lo básico desde un punto de vista epistemológico sería la representación verdadera. Esto es, podrían haber argüido que el significado de «verdadero» sólo cabe explicarlo por medio de una explicación de la verdad de los *axiōmata*, pero que el reconocimiento de que un *axiōma* dado es verdadero no es posible más que sobre la base de una representación verdadera. No hay, sin embargo, pruebas concluyentes de que haya sido ésa su opinión. Hay aún otro pasaje interesante en el que Sexto pudiera estar acaso haciéndose eco de una argumentación de cuño estoico en contra de la tesis de que las representaciones sean las verdaderas en el sentido básico del término. Dicho pasaje precede inmediatamente a aquél en que se distinguían tres diferentes concepciones respecto de lo que cupiese calificar de «verdadero» y «falso», y reza como sigue:

> «Los estoicos afirman que algunas cosas sensibles y algunas cosas inteligibles son verdaderas, pero que las sensibles no lo son de modo directo (ἐξ εὐθείας) sino por referencia a las correspondientes inteligibles (κατ' ἀναφορὰν τὴν ὡς ἐπὶ τὰ παρακείμενα τούτοις νοητά). Pues, según ellos, lo verdadero es lo que es real (τὸ ὑπάρχον) y es lo contradictorio de algo, mientras lo falso es lo que no es real y es lo contradictorio de algo. Y se trata de un *axiōma* incorpóreo y es inteligible» [110].

El verbo ὑπάρχειν, que aquí traducimos por «ser real», es sumamente difícil de verter a causa de su ambigua oscilación entre el «existir» de los objetos y el «ser verdaderas» de las proposiciones. No hay que pensar, empero, que la argumentación estoica encerrada en ese pasaje constituya un intento de definir la verdad de los *axiōmata* por medio de tal noción. Esta es usada simplemente con el fin de hacer resaltar de manera adecuada la diferencia existente entre verdad y falsedad. Lo que el pasaje viene a decirnos, en esencia, es que cualquier cosa que sea lo que llamemos verdadero o falso ha de admitir la posibilidad de su contradicción. Respecto de todo aquello que digamos verdadero será posible indicar que sea falso. Esa es la función

108 Sexto, *Pyrrh. Hyp.* II, 138; Diógenes Laercio, VII, 79.
109 *Adv. Math.* VII, 244.
110 Ibid. VIII, 10.

de la partícula «no» en el lenguaje. Pero las cosas sensibles carecen en cuanto tales de contradicción, y entre ellas se incluyen por lo pronto las representaciones, así como lo que Sexto describía antes —en su discusión de las tres precitadas concepciones— como «el curso del pensamiento», puesto que el pensamiento es para los estoicos una actividad física y por lo tanto algo perceptible.

Tenemos, pues, razones para pensar que los estoicos concebían la verdad de las representaciones como un tipo derivado de verdad y que asimismo rechazaban la tercera de las concepciones mencionadas por Sexto en relación con el auténtico sujeto de los predicados «verdadero» y «falso». Pero debemos ahora preguntarnos a qué se debe la exclusión por su parte de la segunda de esas concepciones. ¿Por qué no han de ubicarse en el lenguaje la verdad y la falsedad? Sexto se hace cuestión de esta pregunta, presentando al respecto dos argumentaciones de origen verosímilmente estoico. Dicho origen lo acreditan los ejemplos aducidos y, en especial, la expresión *βλίτυρι* propuesta habitualmente como ejemplo de sonido articulado pero ininteligible, pues ese mismo ejemplo aparece en el extracto de la lógica estoica elaborado por Diógenes[111]. Sexto arguye, en primer lugar, que si la verdad reside en el lenguaje oral (*φωνή*), se tratará o bien de lenguaje significativo o bien de lenguaje no-significativo. La segunda de estas alternativas es obviamente imposible; pero también lo es la primera, pues ningún tipo de lenguaje oral es significativo en cuanto tal (*οὐδεμία γὰρ φωνὴ ὡς φωνὴ σημαντική ἐστιν*). Si lo fuera, quienquiera —tanto griego como bárbaro— que captase las expresiones del lenguaje en cuestión captaría asimismo lo que éstas significan. Este breve argumento apunta al corazón de nuestro problema, mas va seguido de otro que resulta harto menos satisfactorio. De entre los posibles fragmentos del lenguaje oral (*τῶν φωνῶν*) los hay que son simples, como por ejemplo «Dión», y los hay que son complejos, como por ejemplo «Dión pasea». La verdad no puede residir en lo simple, puesto que sólo los *axiōmata* son verdaderos y éstos son complejos. Pero tampoco puede residir en lo complejo, ya que ningún fragmento complejo del lenguaje oral o habla (*λέξις*), como por ejemplo «Dión pasea», podría existir en cuanto tal, pues al decir «Dión» no digo «pasea» ni viceversa[112]. El argumento que constituye el segundo cuerno del dilema resulta fútil y trivial para nosotros, y en realidad lo es en la medida en la que implica la imposibilidad de efectuar predicación ninguna acerca de algo cuya existencia tenga una duración finita. Idéntico argumento haría imposible decir nada sobre el propio Dión, ya que tampoco éste podría existir en un período indivisible de tiempo. Sin embargo, tal vez haya un detalle en este punto que merezca nuestra atención. Como pudimos ver por un pasaje antes citado, los estoicos deseaban recalcar que todo *axiōma* que aspire a ser descrito como verdadero o falso debe hallarse presente de algún modo al ser objeto de semejante descripción[113]. Y nuestro uso común de las palabras presta por cierto algún apoyo a esa exigencia. En ocasiones, por lo menos, tratamos de expresar cosas tales como «Lo que él decía *es* verdad», expresión ésta que resultaría un tanto extraña si nuestra afirmación versara acerca de una determinada locución que hubiese tenido lugar en un instante dado. Pues si en tales contextos

111 Diogenes Laercio, VII, 59.
112 *Adv. Math.* VIII, 133 y ss.
113 Ibid. 254-6.

únicamente deseásemos referirnos a locuciones de aquel género u oraciones-casos, tendríamos siempre que expresarnos de la suerte «Lo que él decía *era* verdad», tal y como acostumbramos a decir «La primera guerra mundial *fue* un gran desastre» y no «*es* un gran desastre».

El primer argumento, en cualquier caso, hay que tomarlo muy en serio, pues se dirige expresamente contra la tesis de que las expresiones del lenguaje oral puedan ser verdaderas o falsas por derecho propio, ya sea que aquel lenguaje se interprete como integrado por oraciones-casos o por oraciones-tipos. Si los bárbaros son incapaces de comprender una oración-caso griega, lo serán asimismo de comprender una oración-tipo en el mismo idioma, pues las oraciones-casos sólo son significativas en cuanto ejemplifican oraciones-tipos en determinadas circunstancias.

Para los estoicos, pues, es el *axiōma* lo que es verdadero o falso en un sentido básico, y de un *axiōma* definido simple se dice que es verdadero «cuando el predicado pertenece a la cosa que cae bajo el demostrativo» (*ὅταν τῷ ὑπὸ τὴν δεῖξιν πίπτοντι συμβεβήκῃ τὸ κατηγόρημα*). [114] Diógenes nos ofrece una explicación más sencilla por medio de un ejemplo. El *axiōma* significado por «Es de día» es verdadero si es de día; si no es de día, el *axiōma* es falso [115]. Esta caracterización de la verdad resulta estrechamente afín a la aristotélica [116], con la única salvedad de proceder por vía de ejemplo. Mas la definición propuesta por Sexto es más compleja, pareciendo dar idea de que el *axiōma* verdadero posee una estructura que se corresponde con la estructura similar del objeto descrito. A diferencia de la definición aristotélica, sólo tiene por otra parte aplicación inmediata al caso de los *axiōmata* simples. La verdad de los restantes *axiōmata* tendría que definirse en términos de la de aquéllos.

Estamos ahora en situación de ensayar una interpretación de la teoría estoica de los *lektá* y, en especial, de los *axiōmata*. En su momento establecimos la necesidad de distinguir la proposición, que es verdadera o falsa en un sentido primario, de la oración en la que aquélla es expresada [117]. Parece probable que los estoicos se hallasen convencidos, de análoga manera, de la necesidad de distinguir entre los *lektá* y las oraciones que les sirven de expresión. No cabe, sin embargo, identificar sin más a la proposición con cualquier tipo de *lektón*. Es el *axiōma* el que resulta primariamente verdadero o falso para los estoicos, pero el *axiōma* —como nosotros ya sabemos— es la proposición en cuanto objeto de aserción más bien que la proposición en sí misma considerada. La cosa puede verse con mayor claridad si reparamos en el modo como se ocupa Sexto de los *lektá* que son «más que *axiōmata*». Sexto no parece detectar elemento alguno compartido en común por estos últimos y los *axiōmata* que resulte susceptible de verdad y falsedad. Por otra parte, las preguntas, órdenes, etc., son para los estoicos especies de *lektá* coordinados con los *axiōmata*, más bien que superpuestos a los mismos. Así pues, a la hora de construir su concepto de *lektón* los estoicos no hacían en realidad abstracción de la actitud del que habla o el que escribe, sino tan sólo de la expresión lingüística empleada en cada caso. De ahí que los *lektá* admitan modos semejantes a los verbales.

---

114 Ibid. 100.
115 Diógenes Laercio, VII, 65.
116 *Metaphysica, I,* 7 (1011b26-27).
117 **Véanse más arriba, pp. 51 y ss.**

Más aún, los *axiōmata* difieren de las proposiciones en que también admiten tiempos. Es una pena que no haya sobrevivido ningún trabajo estoico sobre este problema de los tiempos. La cuestión, desde luego, mereció su atención, pues Crisipo escribió según Diógenes un tratado «Sobre las expresiones temporales», así como otro «Sobre los *axiōmata* en tiempo de perfecto» [118]; y Prisciano atribuye a los estoicos el reconocimiento de un uso del tiempo de presente en que se expresaría lo que en inglés, pongamos por caso, se expresa por medio de la forma continua del presente [119]. El pasaje de Sexto en que éste nos informa, según vimos, de que los estoicos consideraban a los *axiōmata* acerca del pasado y el futuro como presentes ellos mismos implica claramente que los *axiōmata* poseen tiempos. «El ha sido herido» y «El morirá» se considerará que expresan diferentes *axiōmata* de los que en cualquier caso pudieran expresar «El está siendo herido» o «El está muriéndose» [120]. Puesto que los *axiōmata* admiten tiempos, cabría esperar que sus valores de verdad resulten susceptibles de cambiar, y así parece que lo aceptaban los estoicos a propósito de ciertos *axiōmata* que llamaron μεταπίπτοντα (cambiantes). Estos últimos son mencionados por Sexto, quien muestra cómo los estoicos se sirvieron de ellos para resolver una aparente paradoja [121]; y Dionisio de Halicarnaso nos relata que Crisipo se ocupó de los mismos en un tratado «Sobre la combinación de las partes del discurso» (περὶ τῆς συντάξεως τῶν τοῦ λόγου μερῶν), que versaba «acerca de la combinación de los *axiōmata* verdaderos y falsos, posibles e imposibles, contingentes y cambiantes» [122]. Se desprende de esta enumeración que la capacidad de cambio era considerada como una propiedad de los *axiōmata* del mismo rango que la verdad, la falsedad, la posibilidad y la imposibilidad. Alejandro nos presenta como ejemplo de *axiōma* cambiante el condicional «Si Dión está vivo, Dión estará vivo» [123]. Los estoicos —nos dice— advierten que habrá un instante en que este condicional sea falso, a saber, cuando su antecedente siga siendo verdadero mientras que el consecuente haya dejado de serlo.

La última, y acaso la más sorprendente, de las características que diferencian a los *axiōmata* estoicos de las proposiciones es la capacidad de los primeros para cesar de existir, así como presumiblemente (aunque ello no esté expresamente declarado) para comenzar a existir, en un instante dado. Alejandro nos cuenta que Crisipo admitía que a los *axiōmata* les alcanza la posibilidad de ser destruidos (φθείρεσθαι). La tesis de Crisipo emerge de su argumento antidiodoreico tendente a demostrar que lo imposible puede seguirse de lo posible [124]. Crisipo mantenía que «Este hombre está muerto» es imposible, en tanto que «Dión está muerto» es posible, pese a lo cual el primer enunciado se seguiría del segundo en aquel caso en que «este» se refiera a Dión. El argumento es complicado y difícil de seguir, pero Alejandro insiste varias veces en que el *axiōma* «Este hombre está muerto» quedaría destruido (φθείρεται) tras de la muerte de Dión [125], situación ésta

118 VII, 190.
119 *Grammatici Latini*, ed. Keil, II, p. 415.
120 *Adv. Math.* VIII, 255.
121 *Pyrrh. Hyp.* II, 234.
122 *De Compositione Verborum*, ed. Reiske, 31-32.
123 Apud Simplicio, *In Aristotelis Physic. Libros Quattuor Post. Commentarium*, ed. Diels, *C.I.A.G.* X, p. 1299.
124 Alejandro, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), pp. 177 y ss.
125 Ibid. pp. 178, 179, 181.

distinta, al parecer, de cuando dicho *axiōma* es falso o imposible. Crisipo argüía por lo visto que, mientras Dión estuviese vivo, el *axiōma* «Este hombre está muerto» sería imposible por ser contradictorio; y que, tras de su muerte, el *axiōma* no existiría, por lo que la cuestión de su verdad o falsedad no tendría ya lugar de plantearse. Se seguiría de aquí que «Dión está muerto» nunca podría ser verdadero en tanto que «Este hombre está muerto» fuese falso, de suerte que el condicional que posea al primero como antecedente y al segundo como consecuente será un condicional correcto de acuerdo con la definición de Diodoro y asimismo de acuerdo con la propia definición de Crisipo. Cabría sin duda preguntarnos cómo podría ser destruido el *axiōma* «Dión está muerto», que no es algo a primera vista destructible. La palabra «Dión» significa una cualidad individual, que es siempre algo expresable, mientras que lo expresado por la palabra «este» en una ocasión dada no se podría expresar si las circunstancias del caso experimentasen alteración. La destrucción de un *axiōma* consistiría, así, en cesar de ser expresable. Dejando a un lado el pintoresco modo de presentarla, la tesis de Crisipo no debiera causar asombro, pues todos nosotros estamos familiarizados con el hecho de formas verbales que pueden ser usadas para expresar una proposición en ciertas ocasiones pero no así en otras. Por ejemplo, las palabras «Me duele el colmillo izquierdo» proferidas por una persona dada en un instante dado expresarán una proposición verdadera o falsa, lo que pudiera no ocurrir cuando dicha persona se sirva de ellas con posterioridad. Desde el punto de vista estoico, según el cual los medios con que contamos para referirnos a la cuestión se incluyen en el *lektón*, ello querría decir que el *axiōma* originariamente expresado por aquellas palabras no sería ya expresable por más tiempo, esto es, habría quedado destruido, en tanto que la mayor parte de los filósofos posteriores sostendrían más bien que una proposición es expresable siempre de algún modo, si bien en determinados instantes podría no serlo de determinados modos, como por ejemplo por medio de un demostrativo.

Por todos estos rasgos difieren, pues, los *lektá* completos de los estoicos de las proposiciones tal y como hoy las concebimos. Los dos últimos rasgos, a saber, la posibilidad de cambiar de valor de verdad y lo que se podría llamar la «mortalidad» de los *lektá*, obedecen al hecho de que las palabras-casos de carácter reflexivo son asignadas a los propios *lektá* no menos que a sus medios de expresión. En líneas generales, cabría decir que al distinguir entre las oraciones y lo que éstas expresan se pueden adoptar dos posiciones extremas. Así, podemos sostener que diferentes oraciones expresan la misma proposición cuando son verificadas o falsadas por la misma situación o estado de cosas. Esta formulación —hay que reconocerlo— resulta un tanto oscura, puesto que habríamos de puntualizar lo que entendemos por la misma situación o el mismo estado de cosas, pero es evidente que, desde semejante supuesto, nada hay que se oponga a conceder que oraciones con diferentes connotaciones temporales expresan la misma proposición. Característico de este punto de vista sería la asignación de las palabras-casos de carácter reflexivo a los medios de expresión, excluyéndoselas así de la proposición por ellos expresada. Dicha asignación reviste un cierto carácter paradójico, pues resulta chocante conceder que «Habrá una batalla naval» y «Hubo una batalla naval» *signifiquen* lo mismo en algún caso. Por lo común, todos nos inclinamos a pensar que la relación temporal entre la

batalla y la locución en que nos referimos a ella forma parte de lo significado o expresado, lejos de reducirse simplemente a una concomitancia de los medios de expresión. Como reacción frente a esta paradoja, podemos adoptar la otra posición extrema y permitir que proliferen los significados oracionales (*sentence-meanings*), que cabría llamar proposiciones por razones de conveniencia, hasta llegar por último a la conclusión de que no hay modo de expresar por dos veces una y la misma proposición. Todo uso serio de los tiempos comporta por lo menos la tácita actuación de un adverbio temporal, como «ahora» por ejemplo, con lo que «Me duele ahora el colmillo izquierdo» no expresaría —proferida dos veces— idéntica proposición. Las proposiciones mismas resultarían entonces tan fugaces como las propias oraciones-casos. No cambiarían exactamente de valor de verdad, pero su vida sería extremadamente efímera. Los estoicos parecen haber optado por una solución intermedia entre esas dos posiciones maximalistas. Por una parte, introducían las palabras-casos de carácter reflexivo en el seno de los *lektá;* pero, por otra, tendían a admitir que las repeticiones de una forma verbal determinada, durante un cierto lapso de tiempo por los menos, expresan el mismo *lektón,* pues el *axiōma* expresado por «Si es de día, es de día» no se diría que consta de dos *axiōmata* distintos, sino del mismo *axiōma* repetido [126].

Aunque, por las razones que hemos visto, no quepa identificar sin más *axiōmata* y proposiciones, unos y otras se asemejan en diversos aspectos importantes. Ambos se expresan mediante oraciones enunciativas completas; son verdaderos o falsos en el sentido básico del término; son igualmente abstractos o, como los estoicos dirían con una jerga no demasiado afortunada, incorpóreos; y existen, por último, independientemente de que pensemos o no en ellos. Esta última coincidencia requiere acaso alguna justificación. La definición de *lektón* como «aquello que existe de acuerdo con (conforme a, según) una representación racional» parece sugerir que no habría un *lektón* sin su correspondiente representación o, con otras palabras, que los *lektá* no son sino objetos de pensamiento. Sexto da expresamente por sentado, en un pasaje, que los *lektá* existen sólo cuando son expresados o significados [127]. Pero es posible, sin embargo, que se trate tan sólo de un *argumentum ad homines.* Pues hay una doctrina capital de los estoicos que ciertamente entraña la existencia de los *lektá* aun cuando no los pensemos. De acuerdo con la teoría de los signos naturales antes considerados [128], un *axiōma* que sea un signo servirá para hacer manifiesto un otro *axiōma* que constituye su significado. Pero, para poder ser hecho manifiesto, este último tendrá evidentemente que existir. Asimismo, la observación de Sexto en el sentido de que, mientras la verdad se halla necesariamente conectada con el conocimiento, no ocurre en cambio así con lo verdadero [129], implica que un *axiōma* verdadero podría existir aunque no sea conocido. La afirmación de que los *lektá* pueden existir independientemente de su ser expresados o pensados engrana, pues, perfectamente con el grueso de la teoría de los estoicos.

126 Diógenes Laercio, VII, 68.
127 *Pyrrh. Hyp.* II, 109.
128 Pág. 134.
129 *Pyrrh. Hyp.* II, 82.

En conclusión, hay mucho de común entre lo que los estoicos entendían por ἀξίωμα y lo que nosotros entendemos por «proposición», dándose incluso un caso —a saber, el de las oraciones generales— en que ambas nociones coinciden sin reservas. Por oración «general» entendemos aquí una oración que expresa universalidad sin restricciones o bien una oración existencial cuyo verbo en tiempo de presente se interpreta en sentido intemporal. En la medida en que el significado de las palabras que las integran permanece invariable, tales oraciones no pueden cambiar de valor de verdad ni dejar de tener uno, como tampoco cambiarán dicho significado ni dicho valor de verdad con las personas que las usen o con las circunstancias de su uso.

Pero cuando las oraciones contienen palabras-casos de carácter reflexivo, los *axiōmata* estoicos difieren desde luego de las proposiciones. La razón de esas diferencias estriba en que los estoicos llegaron a su teoría partiendo de un examen de la noción de significado, en tanto que nosotros acostumbramos a abordar la noción de proposición preguntándonos qué es aquello a lo que pueden aplicarse los calificativos de verdadero y falso. Ahora bien, el verbo «significar» o querer decir (inglés, *to mean*) admite en nuestro idioma dos usos diferentes que es importante distinguir a este respecto. En efecto, podemos preguntar qué es lo que significa o «quiere decir» una persona y qué es lo que significa o «quiere decir» una oración. Los estoicos contaban a tal efecto con dos vocablos diferentes donde nosotros tenemos uno solo, pues en el primer caso se emplea en griego el verbo λέγειν y en el segundo el verbo σημαίνειν. Pero es el caso que los estoicos identificaron deliberadamente *semainómena* con *lektá*. Así, Sexto escribe en el pasaje en que más detalladamente sometió los *lektá* a discusión: «Pero uno de dichos elementos es incorpóreo, a saber, la cosa significada (τὸ σημαινόμενον) y expresada (λεκτόν), que es verdadera o falsa» [130]. Lo que una oración quiere decir o significar es, por lo tanto, lo que una persona quiere decir o significar cuando la usa. Y lo que una persona quiere decir en esos casos incluye, por lo pronto, indicación del modo y tiempo verbales. Nadie sostendría que esa persona ha querido decir lo mismo al enunciar algo que al formular la orden correspondiente a ese enunciado; por ejemplo, al decir «La puerta está cerrada» y «Cierre Vd. la puerta». Ni tampoco que ha querido decir lo mismo al proferir oraciones tales como «Estaré en Londres mañana» y «Estuve ayer en Londres» guardando el debido intervalo temporal entre una y otra locución.

Al preservar esta común noción de «significado» en el sentido de lo que una persona quiere decir, los estoicos se vieron, pues, forzados a conceder que los *lektá* poseen modo y tiempo. Ello no obstante, se alejaron de la práctica ordinaria al denegar que una persona pudiera querer decir o significar lo mismo mediante las expresiones «Dión está muerto» y «El está muerto» cuando «él» se refiere a Dión. Al introducir en este punto una distinción de *lektá*, los estoicos se hallaban presumiblemente influidos por el hecho de que nadie diría que las dos oraciones, tomadas fuera de contexto, posean el mismo significado. «Significar lo mismo», como se acaba de indicar, admite un uso diferente según que lo apliquemos a personas u oraciones. Una o más personas pueden servirse de oraciones diferentes para significar la misma cosa o de la misma oración para significar cosas diferentes; mas

130 *Adv. Math.* VIII, 12.

una oración dada posee siempre idéntico significado y, cuando se dice que dos oraciones significan lo mismo, ello no implica que dos personas puedan utilizarlas para significar lo mismo. Las oraciones «Tengo frío» y *J'ai froid* significan lo mismo, por ejemplo, pero dos personas no podrían nunca usarlas para significar lo mismo. A la inversa, las oraciones «Tengo frío» y «Tienes frío» podrían usarse de esa suerte, pero en ningún caso se diría que posean el mismo significado. Los estoicos parecen haber dejado actuar a ambas nociones de significado como principios de diferenciación entre *lektá*. Esto es, sostenían que —cuandoquiera que se pueda afirmar que una persona o personas quieren decir o significar cosas diferentes— habría que distinguir correlativamente entre por lo menos dos *lektá*, ocurriendo otro tanto cuandoquiera que se pueda afirmar que dos oraciones significan o quieren decir cosas diferentes. De este modo acabaron por abrir las puertas de su teoría a una extrema multiplicidad de *lektá*. Para ellos, en efecto, una simple diferencia en las formas verbales dentro de una misma lengua constituiría invariablemente un buen indicio de una análoga diferencia de significado; y fue probablemente este hecho el que condujo a los peripatéticos a reprocharles haber prestado demasiada atención a las formas verbales, otorgando distintas denominaciones a argumentos que resultaban idénticos desde el punto de vista de estos últimos. Este reproche puede leerse en dos pasajes de Alejandro. En el primero de ellos nos informa de que, si bien los estoicos concedían que las dos formas «Algún P no es G» y «No todo P es G» eran equivalentes (*ἰσοδυναμοῦντα*), distinguían no obstante entre los argumentos:

(1) Todo G es M	(2) Todo G es M
Algún P no es M	No todo P es M
Luego algún P no es G	Luego no todo P es G,

llamándole al primero silogismo y al segundo hiposilogismo [131]. Más adelante añade:

> «Los autores modernos que se ocupan de las expresiones (*ταῖς λέξεσιν*) y no de lo que éstas significan (*τοῖς σημαινομένοις*) afirman que no se obtiene el mismo resultado cuando se substituyen unos por otros términos cuyas expresiones son equivalentes (*τὰς ἰσοδυναμούσας λέξεις*). Pues aunque 'Si A, entonces B' significa lo mismo que 'B se sigue de A', ellos sostienen sin embargo que si acudimos a la expresión 'Si A, entonces B; pero A; luego B' tendremos un argumento silogístico, mientras que el argumento expresado por 'B se sigue de A; pero A; luego B' no es silogístico sino concluyente (*περαντικόν*)» [132].

Se infiere de estos pasajes que los estoicos establecían una distinción entre identidad de significado y equivalencia que los peripatéticos consideraban irrelevante. Desconocemos, por desgracia, de qué criterio de equivalencia se servían.

Cuandoquiera que los estoicos afirmasen, por tanto, que dos oraciones-casos o dos oraciones-tipos expresan el mismo *lektón* completo, nosotros estaríamos autorizados a decir que expresan la misma proposición. Mas la conversa no se sigue. El *lektón* es el resultado de hacer abstracción de las formas particulares de expresión lingüística. Se trata de aquello que permanece constante en el curso de una traducción de un lenguaje a otro. Mas la

---

131 Alejandro, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 84.
132 Ibid. 373.

proposición es el resultado de una ulterior abstracción de los factores temporales y de las circunstancias en las que nuestras locuciones se producen. Se trata, a saber, de aquello que permanece constante a través de las transformaciones de los medios de expresión —esto es, las palabras-casos de carácter reflexivo— dentro de un mismo lenguaje.

5. El sistema estoico de los esquemas de inferencia.

En su teoría del razonamiento, Crisipo y los estoicos concentraron generalmente su atención en los esquemas válidos de inferencia (συνακτικὰ σχήματα). Mientras que Aristóteles se había servido de la forma condicional del enunciado en su presentación de los principios de los diversos modos silogísticos, los estoicos acostumbraban a hacer uso de esqueletos argumentales del tipo de «Si lo primero, entonces lo segundo; pero lo primero; luego lo segundo». Este modo de proceder había ya sido puesto en práctica por Teofrasto en su caracterización de los silogismos totalmente hipotéticos, y cabe suponer que los estoicos lo adoptaron —generalizando el procedimiento— en su deseo de evitar las complicadas formulaciones a que daría lugar el intento de expresar proposiciones condicionales que a su vez envolviesen otras proposiciones condicionales. No ignoraban en modo alguno la posibilidad de presentar el principio correspondiente a un esquema inferencial válido bajo la forma de un enunciado condicional tal como «Si si-lo-primero-entonces-lo-segundo y lo primero, entonces lo segundo». De hecho, llegaron a reconocer en ocasiones que la validez de un esquema inferencial depende de la verdad del enunciado condicional correspondiente. Sexto Empírico se refiere a ello en un cierto número de pasajes, aunque —como era de esperar— aquéllos en que aparecen condiciones que a su vez envuelven condiciones han sido objeto de frecuentes deformaciones a cargo de los copistas de turno [133]. La circunstancia de que los estoicos no tuvieran empacho en hablar de la *necesidad lógica* de la proposición condicional correspondiente a un patrón válido de inferencia hace pensar que interpretaban los enunciados condicionales como si se tratara de aserciones de una conexión necesaria. En efecto, quienquiera que hubiese adoptado la definición filónica de «si..., entonces...» difícilmente habría dejado de apreciar que una fórmula como la citada más arriba constituye un caso muy especial dentro de los condicionales.

Es interesante reparar en que los estoicos no siguieron a Aristóteles en su empleo de letras como variables al hablar de formas proposicionales, sirviéndose en su lugar de números ordinales. En el párrafo precedente ofrecíamos un ejemplo de esta práctica. Tropezamos con la misma en todos los fragmentos estoicos en que hace al caso y, recíprocamente, su presencia en un texto de autor o escuela inidentificados podría ser tomada como indicio de un origen estoico. Ya en la antigüedad se la consideró, en efecto, como una peculiaridad característicamente estoica; y, así, Apuleyo escribe: *Stoici porro pro literis numeros usurpant* [134]. Pero es importante no olvidar que el numeral que oficia de variable en un texto estoico indica el hueco

133 *Pyrrh. Hyp.* II, 113, 137, 139; *Adv. Math.* VIII, 416, 421. Benson Mates ha contribuido a enmendar el texto en su trabajo "Stoic Logic and the text of Sextus Empiricus", *American Journal of Philosophy*, LXX (1949), pp. 290-8.

134 *De Philosophia Rationali*, 279.

a rellenar por un *signo proposicional*, no por un término. El no haberlo sabido ver así, dejando de captar en consecuencia la importante diferencia existente entre los sistemas de lógica estoico y aristotélico, dio lugar hasta muy recientemente a buen número de malinterpretaciones de la historia de la lógica.

Antes de ocuparnos con detalle de los esquemas estoicos de inferencia, repasaremos nuevamente los diversos géneros de proposiciones complejas esencialmente envueltas en los mismos.

Los estoicos formularon su definición de las proposiciones complejas de forma tal que las proposiciones negativas quedaban excluidas de la misma, pero parece ser que repararon en el hecho de que una proposición negativa no puede ser adecuadamente tratada considerándola como correspondiente a un mismo plano que la proposición por ella negada. De acuerdo con Apuleyo, *solum abdicativum vocant cui negativa particula praeponitur* [135]. Es decir, sostenían que, para obtener la forma negativa de un enunciado dado, deberíamos encabezarlo mediante una partícula negativa que operase sobre el enunciado tomado en su conjunto. Y Apuleyo prosigue informándonos de que argüían que *Voluptas non est bonum* constituiría un enunciado afirmativo por resultar equivalente a *Evenit cuidam voluptati bonum non esse*. No es fácil colegir adónde quiere irse a parar con este aserto, mas su sentido podría ser la convicción de que «Algún placer no es bueno» no debiera conceptuarse como un enunciado negativo. Si esta interpretación está en lo cierto, cabría ver en dicha actitud una reacción contra la clasificación aristotélica de las proposiciones generales y ello por las razones explicadas en el último capítulo. Tal interpretación se halla avalada por un pasaje de Boecio en que éste afirma que los estoicos pretendían anteponer signos de negación a algunos nombres [136], pues éste podría ser un buen modo de describir el análisis que resuelve «Algún hombre no es blanco» en «Algún hombre es no-blanco».

De la conjunción no tenían los estoicos mucho que decir. Definían la proposición conjuntiva (συμπεπλεγμένον) como aquella que sería verdadera si ambas proposiciones conjuntas lo fuesen, siendo en caso contrario falsa. Y admitían la posibilidad de que las proposiciones conjuntas sean, a su vez, complejas [137].

Una proposición disyuntiva (διεζευγμένον), esto es, una proposición como las que expresamos mediante el uso de la partícula «o», se decía que envuelve una completa oposición (τέλεια μάχη) de sus disyuntas [138]. Mas los estoicos reconocieron también ulteriormente la posibilidad de una «cuasi-disyunción» (παραδιεζευγμένον) que sería verdadera si una u otra de sus disyuntas fuera verdadera y falsa sólo si ambas fueran falsas [139]. Es interesante constatar aquí el comienzo de una infructuosa disputa que luego ha distraído la atención de muchos lógicos. En el lenguaje ordinario nos servimos a veces de la partícula «o» o palabras similares en un sentido no adversativo, como cuando decimos, por ejemplo, que el pedrisco o los aguaceros han arruinado las

135 Ibid. 266.
136 *Commentarii in Lib. Arist. Περὶ Ἑρμηνείας, Sec. Ed.*, ed. Meiser, pp. 261-62.
137 Sexto Empírico, *Adv. Math.* VIII, 124.
138 Ibid. 162.
139 Galeno, *Institutio Logica*, ed. Kalbfleisch, p. 12.

cosechas sin excluir la posibilidad de que haya granizado y llovido por igual y ambas cosas hayan causado daño. Pero otras veces, en cambio, tratamos de expresar que sólo una de ambas alternativas es verdadera, como cuando decimos por ejemplo —recalcando el «o bien»— que una antigua muralla fue construida o bien por los cartagineses o bien por los romanos. Y hay muchas ocasiones en las que desearíamos dejar incluso bien sentado que ambas alternativas contrapuestas no podrían ser a un tiempo verdaderas, como cuando decimos que un determinado medicamento o mata o cura. Una vez que hayamos distinguido entre estos diferentes usos de la partícula «o», estará claro que no cabe hablar de un significado unívoco de esa palabra, por más que en ocasiones, y para ciertos propósitos, resulte conveniente concentrar nuestra atención en el primero de tales usos o significados en tanto que se trata del más simple y se halla presupuesto por los otros dos restantes. Mas Crisipo y sus seguidores parecen haber dado por supuesto que el tercero y más fuerte de aquellos sentidos era el único apropiado. La expresión que hemos traducido por «oposición completa» tendría seguramente que entenderse como sinónima de incompatibilidad, esto es, como algo más que la simple exclusión *de facto*. A la vista de esta interpretación, así como de su interés metafísico por el determinismo, no es sorprendente que los estoicos se nos muestren celosos defensores del principio de tercio excluso e igualmente del de bivalencia. Según Boecio, criticaron a Aristóteles por haber denegado la vigencia de este último [140].

Es, no obstante, chocante que Crisipo reconociese la forma «no a la vez... y...» como una forma independiente de proposición compleja. El griego, como el castellano, carece de una partícula específica para la noción de exclusión, lo que nos lleva a presumir que Crisipo admitía dicha forma por creerla necesaria para el razonamiento. Más abajo tendremos ocasión de aludir a una consideración que pudo haberle conducido a semejante conclusión. Al parecer, juzgaba que aquella forma expresa una exclusión u oposición sólo *de facto* más bien que una absoluta incompatibilidad, siendo probable que la usara para suplir por medio de un rodeo la falta de un «o» débil o no-adversativo en su sistema. Pues «Las cosechas han sido arruinadas por el pedrisco o los aguaceros» equivale en definitiva a «No es a la vez el caso de que las cosechas no hayan sido arruinadas por el pedrisco y de que las cosechas no hayan sido arruinadas por los aguaceros». Es posible asimismo que se sirviera de ella con el propósito de definir los condicionales filónicos [141].

En un pasaje de Cicerón citado más arriba se menciona a Crisipo, junto con Diodoro y Filón, como uno de los protagonistas de la famosa controversia acerca de los condicionales, desprendiéndose del contexto que tenía su propio punto de vista a este respecto, distinto de una u otra de las tesis megáricas. Sabemos asimismo por Diógenes Laercio que escribió contra Filón a propósito de los significados y los modos de argumentación [142]. Resulta tentador, por consiguiente, suponer que la suya era la tercera de las doctrinas mencionadas por Sexto, a saber, la doctrina de que la negación del consecuente es incompatible con el antecedente en un condicional correcto.

---

140 *Commentarii in Lib. Arist.* Περὶ Ἑρμηνείας, *Sec. Ed.*, ed. Meiser, p. 208.
141 Cicerón, *De Fato*, 15.
142 *Vitae*, VII, 191, 194.

En efecto, difícilmente habría podido sostener la cuarta de esas posiciones, al menos con el corolario extraído por Sexto de la misma, puesto que se supone que hizo uso de condicionales redundantes en algunos de sus argumentos. En apoyo de semejante conjetura podemos esgrimir ciertos pasajes de Sexto [143] y de Diógenes [144] que parecen implicar que los estoicos exigían la incompatibilidad entre el antecedente y la negación del consecuente de un condicional [145]. Por otra parte, en cambio, tropezamos con la afirmación de Sexto según la cual habían adoptado la definición de Filón. Quizás debamos, pues, extraer la conclusión de que los estoicos favorecieron unas veces la definición filónica mientras otras se decidieron por una definición más estricta que hiciera referencia a la incompatibilidad.

En un inventario de las variedades de proposiciones, Galeno afirma que el enunciado disyuntivo «O es de día o es de noche» equivale a «Si no es de día, es de noche» [146]. Este ejemplo y el contexto parecen sugerir la procedencia estoica de dicha equivalencia, pero —así formulada— no haría posible la completa oposición de las proposiciones disyuntas que sabemos mantenían usualmente los estoicos. Posiblemente se trata de una formulación no demasiado rigurosa, y lo que se quiere dar a entender mediante ella es que el enunciado disyuntivo resulta equivalente al bicondicional «No es de día si, y sólo si, es de noche». Pues la aserción de una tal equivalencia se ajustaría a la interpretación estoica de la disyunción, en el supuesto siempre de admitirse que el condicional comporta una conexión necesaria. Veremos, sin embargo, que hay razones para pensar que los estoicos no se interesaron gran cosa por una posible reducción del número de las constantes lógicas reconocidas.

Contamos, en cambio, con datos suficientes para concluir que Crisipo y sus discípulos estaban interesados en calcular el número de las diferentes proposiciones complejas que pudieran construirse a partir de un número dado de proposiciones simples. Según declaración de Plutarco, Crisipo cifró en más de un millón las conjunciones (συμπλοκαί) que podían ser formadas a partir de diez proposiciones simples, pero los matemáticos todos rechazaban esa cifra y uno de ellos —Hiparco— sostenía que, mientras la afirmación arrojaba 103.049 proposiciones conjuntivas (συμπεπλεγμένα), la negación arrojaba unas 310.952 [147]. Es difícil hallar algún sentido preciso a este pasaje, pero al menos revela el interés de la época por la *ars combinatoria*.

Entre los diferentes esquemas válidos de inferencia reconocidos por Crisipo, cinco de ellos eran considerados como básicos. La lista de los mismos nos ha sido transmitida por diversos autores de la antigüedad [148] bajo el rótulo de modos indemostrables (ἀναπόδεικτοι τρόποι) y se trata de los siguientes:

1. *Si lo primero, entonces lo segundo; pero lo primero; luego lo segundo.*
2. *Si lo primero, entonces lo segundo; pero no lo segundo; luego no lo primero.*

---

143 *Pyrrh. Hyp.* II, 190.
144 *Vitae*, VII, 73.
145 *Pyrrh. Hyp.* II, 104. Se ha dicho que Cicerón atribuye la definición al propio Crisipo, pero el pasaje en cuestión, *De Fato*, 15, más bien parece sugerir lo contrario.
146 *Institutio Logica*, ed. Kalbfleisch, p. 9.
147 Plutarco, *De Stoic. Repugn.* 1047 C.
148 Entre ellas, por ejemplo, Sexto, *Pyrrh. Hyp.* II, 157 y ss., y *Adv. Math.* VIII, 224 y ss.

3. *No a la vez lo primero y lo segundo; pero lo primero; luego no lo segundo.*
4. *O lo primero o lo segundo; pero lo primero; luego no lo segundo.*
5. *O lo primero o lo segundo; pero no lo segundo; luego lo primero.*

Obsérvese que todos los argumentos correspondientes a esos modos han de constar de dos premisas. A juicio de Crisipo y sus continuadores inmediatos es ésta una característica esencial de los tipos más elementales de razonamiento. Cuando Antípatro, que capitaneó la escuela hacia los años 159-130 d. C., dio cabida a las inferencias con una sola premisa (*μονολήμματος ἐπιφορά*), su introducción vino a considerarse como una innovación [149]. Por otra parte, una de las premisas requeridas para constituir un argumento en cualquiera de los modos indemostrables de Crisipo tenía que ser compleja. Dicha premisa acostumbraba a figurar en primer lugar dentro de la exposición formal del argumento y recibía el nombre de premisa rectora(*ἡγεμονικὸν λῆμμα*).Es de presumir que ese lugar de honor le correspondiese por determinar el carácter distintivo del argumento en su conjunto. En contraste con ella, la segunda premisa recibía la denominación de suposición adicional (*πρόσληψις*)[150]. En un caso concreto de aplicación de un modo indemostrable, la segunda premisa podía sin duda revestir alguna complejidad interna; pero dicha complejidad, a menos de tratarse de la presencia de un signo de negación, no afectaría en absoluto a la naturaleza del argumento.

Al distinguir unos de otros los diversos argumentos por las formas de sus premisas rectoras, era natural que los estoicos tratasen de pergeñar una lista con aquellos argumentos que envolviesen los diferentes tipos de proposiciones complejas por ellos reconocidas. Pero no se comprende fácilmente por qué razones supusieron que su lista de los cinco modos indemostrables tenía que ser a un tiempo exhaustiva e irreductible. En primer lugar, esa lista no contiene ningún modo que corresponda a un argumento con una premisa rectora de carácter conjuntivo. Probablemente la omisión fuera debida a que, de darse un modo semejante, dicho modo no necesitaría de una segunda premisa. En términos estoicos, su forma hubiera sido «A la vez lo primero y lo segundo; luego lo primero»; y, como ya hemos visto, Crisipo no creía que pudiera decirse que un tal modo de hablar exprese una inferencia. En cambio, la lista incluye un modo específico para los argumentos con premisas rectoras de la forma «No a la vez lo primero y lo segundo», por más que a primera vista no parezca existir más que una distinción puramente verbal entre este modo y el modo disyuntivo que le sigue en la enumeración. Como se ha sugerido en un párrafo anterior, la razón de que Crisipo considerase «No a la vez lo primero y lo segundo» como una forma específica de proposición compleja pudiera haber sido su negativa admitir una interpretación veritativo-funcional de «O lo primero o lo segundo». En cuyo caso, habría necesitado ciertamente de un modo destinado a aquellos argumentos cuya demostración no satisficiese los requisitos de la disyunción, tal y como entendía él dicha forma. Mas la necesidad no es tan obvia que haya sido reconocida por todos los cultivadores de la lógica que rechazan la interpretación veritativo-funcional

149 Ibid. VIII, 443.
150 Diógenes Laercio, VII, 76.

de la disyunción, lo que nos autoriza a preguntarnos qué es lo que le impulsó a centrar en ella su atención. La respuesta, si la hay, tendríamos que buscarla en los propósitos que Crisipo pueda haber abrigado a la hora de confeccionar su lista. Otro detalle curioso de esta última es la comprobación de que Crisipo consideró necesario ocuparse por separado de los argumentos condicionales y disyuntivos. Pues difícilmente podría habérsele pasado por alto la posibilidad de definir «o» en términos de «si» y «no» o «si» en términos de «o» y «no», a menos —claro está— que pensase que sólo una de dichas conectivas había de ser entendida con carácter veritativo-funcional, pero no así la otra, lo que por lo demás es muy improbable. También aquí parece que una adecuada justificación de la lista de los modos indemostrables de Crisipo nos impone una consideración más detallada de los usos a que éste los destinara.

Sin duda pretendía, en primer lugar, ofrecer una lista de los modos requeridos para el razonamiento ordinario en los dominios de la historia y de la ciencia, esto es, para el razonamiento a partir de premisas de primer orden que no sean por su parte verdades de la lógica. Pero, al calificar a sus cinco modos de indemostrables, parece haber tenido *in mente* otro proyecto, a saber, el de construir un sistema deductivo dentro del cual cupiese derivar una gran cantidad de modos demostrables a partir de unos pocos esquemas primitivos. A juzgar por los informes de autores antiguos como Cicerón [151], así como por los títulos de las obras que Diógenes Laercio [152] le atribuye, Crisipo elaboró un copioso número de teoremas o modos derivados partiendo de sus cinco indemostrables. En ocasiones, estos modos derivados recibieron en la antigüedad la denominación un tanto confundente de indemostrables no-simples, pero Sexto Empírico deja entender que el vocablo ἀναπόδεικτος tenía en la propia obra de Crisipo la significación de «evidente de suyo» [153]. Al parecer, Crisipo llevó a cabo su programa en un estilo rigurosamente formal, deteniéndose incluso en la demostración de teoremas que todo el mundo habría dado por sentados. Cuando Prantl, el historiador decimonónico de la lógica, habló del *blödsinniger Formalismus* de los estoicos, se limitaba a hacerse eco de las antiguas críticas de los seguidores de Aristóteles. Alejandro, por ejemplo, se quejó en diversos lugares de que los estoicos se perdían en minucias acerca de la forma y extremaban su rigor en el análisis de los argumentos más allá de lo exigido por los afanes ordinarios de la vida [154]. Y Galeno les reprochó prestar más atención a las expresiones (λέξεις) que a las cosas [155]. A los lógicos modernos, que han aprendido de la matemática a valorar la importancia de la forma y el rigor, todas estas críticas podrán hoy parecerles poco más que buenas palabras; mas desgraciadamente ejercieron una influencia tan dañina en los siglos postreros de la antigüedad, en que la teología y la retórica eran bastante más estimadas que la matemática, que las obras de Crisipo se han perdido en su totalidad. Del considerable repertorio de teoremas demostrados por Crisipo sólo han podido rastrearse hasta el momento seis de ellos en las obras de otros autores antiguos: cuatro en los escritos

151 *Topica*, 57.
152 *Vitae*, VIII, 194-6.
153 *Adv. Math.* VIII, 223, 228-9. El vocablo es vertido como *indemonstrabilis* en el Latín de Apuleyo, *De Philosophia Rationali*, 277.
154 Alejandro, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 284.
155 *Institutio Logica*, ed. Kalbfleisch, p. 11.

de Sexto Empírico, uno en el *Comentario a los Primeros Analíticos* de Alejandro y otro en el tratado *Contra Celso* de Orígenes. De esos seis, dos —procedentes ambos de los escritos de Sexto— se acompañan de demostraciones detalladas, siendo otros dos tan simples que no hay dificultad en pergeñar las correspondientes demostraciones por analogía con los conocidos; pero los dos restantes, que son con mucho los más interesantes, no pueden demostrarse por los procedimientos de que tenemos ilustración, constituyendo un problema fascinante la dilucidación de las piezas que hayamos de añadir al método demostrativo de Crisipo llegado hasta nosotros en orden a completarlo.

Aparte de los hechos ya mencionados en este capítulo, los únicos datos relevantes con que podamos contar para nuestro cometido han de buscarse en algunas antiguas referencias a los *thémata* (θέματα) usados por los estoicos en su análisis de ciertos argumentos complicados. Si la reconstrucción que proponemos es satisfactoria, no solamente habría de permitirnos suministrar la prueba de los teoremas antes mencionados sino asimismo rellenar las lagunas de nuestra actual recopilación de aquellos *thémata* hasta convertirla en un cuadro coherente con el resto de las informaciones disponibles, de suerte que detalles que de otro modo parecerían arbitrarios se tornen finalmente inteligibles. Para mayor comodidad a la hora de referirnos a los teoremas, todos ellos serán reproducidos en la fraseología usual de los estoicos y enumerados a continuación de los indemostrables para indicar que poseen una generalidad análoga a la de estos últimos, si bien aquéllos de los que no haya rastro en una fuente antigua se distinguirán de los restantes por medio de un asterisco.

Parece natural a estos efectos dar comienzo por la consideración de los teoremas conservados en Sexto Empírico con sus correspondientes demostraciones.

6. *Si lo primero, entonces si lo primero entonces lo segundo; pero lo primero; luego lo segundo* [156].

Aquí las dos premisas arrojan «Si lo primero, entonces lo segundo» de acuerdo con el indemostrable 1. De donde, junto con la segunda premisa, obtendríamos «Lo segundo» sobre la base, nuevamente, del indemostrable 1.

7. *Si lo primero y lo segundo, entonces lo tercero; pero no lo tercero; por otra parte, lo primero; luego no lo segundo* [157].

En este caso, las dos primeras premisas arrojan «No a la vez lo primero y lo segundo» de acuerdo con el indemostrable 2. De donde, en conexión con la tercera premisa, obtendríamos «No lo segundo» por recurso al indemostrable 3.

Como vemos, cada uno de estos teoremas se demuestra en dos pasos. En el primero, ambos pasos son del mismo género; en el segundo, de género diferente. Mas, como Sexto apunta, las dos demostraciones ejemplifican un principio tradicional en el análisis de los argumentos, a saber:

156 *Adv. Math.* VIII, 230-3.
157 Ibid. VIII, 234-6.

Cuandoquiera que contemos con premisas que impliquen una determinada conclusión, contaremos asimismo potencialmente con la conclusión envuelta en ellas, aun si ésta no se halla formalmente explicitada.

Con otras palabras, lo implicado por las premisas de un argumento, o por una selección de esas premisas, puede a su vez servir como premisa para ulteriores argumentaciones. Hasta aquí todo está claro. Pero hay un curioso detalle en el desarrollo de estas demostraciones que parece haber escapado a los historiadores de la lógica, antiguos y modernos.

Cuando acometemos la empresa de derivar un modo de argumentación a partir de otros, nos proponemos en efecto demostrar que ciertos enunciados generales de segundo orden relativos a implicaciones se siguen de enunciados más simples del mismo orden. Pues decir que un modo es válido es lo mismo que decir que cualquier conjunto de proposiciones que exhiban una determinada forma implican una proposición en posesión de una cierta otra forma relacionada de algún modo con la primera. Ahora bien, nosotros podríamos, si así lo deseáramos, derivar enunciados de implicación a partir de otros enunciados de implicación de una manera más directa que evitase esos rodeos, sobre la base de principios como el de la transitividad de la implicación. Crisipo, sin embargo, sigue a tales efectos una vía diferente. A saber, intenta derivar modos complicados a partir de otros más sencillos por medio de argumentos incrustados en estos últimos, para lo cual se sirve de expresiones tales como «Si lo primero y lo segundo, entonces lo segundo» como si se tratase de premisas, aunque estrictamente hablando dichas expresiones están lejos de ser enunciados y constituyen sólo esquemas enunciativos. Cuando formule, entonces, el argumento «Si lo primero y lo segundo, entonces lo tercero; pero no lo tercero; luego no a la vez lo primero y lo segundo», estará pergeñando en realidad una especie de deducción ficticia con premisas ficticias. No queremos decir con ello que su método sea inválido. Por el contrario, se trata de un procedimiento perfectamente correcto que cualquier profesor de lógica ha utilizado alguna vez. Pero sólo da resultado en la medida en que nos pone en situación de poder afirmar que un auténtico conjunto de premisas de una determinada forma *implicaría* una conclusión de una cierta otra forma. Como el uso de ejemplos en la lógica, se trata de una técnica que ayuda a hacer más intuitivas nuestras consideraciones acerca de la implicación. Probablemente Crisipo lo erigió en su método característico por hallarse interesado en las aplicaciones prácticas de la lógica y pensar que la derivación de un modo complicado venía a ser lo mismo que persuadir a alguien a aceptar una conclusión establecida en dicho modo por medio de premisas verdaderas.

Será ahora fácil dar con las demostraciones correspondientes a los otros dos teoremas atribuidos a Crisipo.

8. *Si lo primero, entonces lo primero; pero lo primero; luego lo primero* [158].

La conclusión se sigue aquí directamente de las premisas de acuerdo con el indemostrable 1. Como Alejandro hizo ver, el teorema constituye una trivialidad, pero tendremos ocasión más adelante de comprobar cómo Crisipo pudo tener buenas razonas para incluirlo en su voluminosa obra lógica.

---

158 Alejandro, op. cit., p. 20.

9. *O lo primero o lo segundo o lo tercero; pero no lo primero; y no lo segundo; luego lo tercero* [159].

Al parecer, cabe considerar aquí la expresión «Lo segundo o lo tercero» como si se tratase de un paréntesis en el interior de la premisa disyuntiva; pues la conclusión podría obtenerse, partiendo de esa interpretación, mediante dos aplicaciones sucesivas del indemostrable 5. Si la interpretación es correcta, la disyunción podría extenderse cuanto lo deseásemos, ya que siempre cabría probar la conclusión reiterando cuantas veces resulte necesario la aplicación del mismo indemostrable. Del propio Crisipo se cuenta que ilustró su argumento a partir de una disyunción con tres miembros citando el caso de un perro que, al llegar a una triple encrucijada y tras haber olfateado en vano dos de los caminos, se encaminó por el tercero —sin necesidad ya de servirse de su olfato— en la seguridad de que la caza tenía que rondar por allí.

Mediante la aplicación de los procedimientos reseñados hasta aquí sería posible demostrar un número crecido de otros teoremas, incluidos algunos de considerable complejidad, pero no aquéllos que mayor interés merecen de entre los pocos conservados de la obra de Crisipo, a saber, «Si lo primero, entonces lo segundo; y si lo primero, entonces no lo segundo; luego no lo primero» y «Si lo primero, entonces lo primero; si no lo primero, entonces lo primero; pero o lo primero o no lo primero; luego lo primero». Pues, así formulados, no hay oportunidad de demostrarlos exclusivamente a base de aplicaciones sucesivas de los indemostrables enunciados. Si deseáramos entonces reproducir la empresa acometida por Crisipo, tendríamos que ver de suplementar nuestro escaso repertorio de patrones originarios de inferencia a partir de los recursos que sabemos estaban a su disposición. Y ya que no hay razón para pensar que los estoicos precedentes se sirvieran de otros esquemas inferenciales básicos que los cinco indemostrables, lo natural parece preguntarnos si hay verdades lógicamente necesarias de las que Crisipo pudiera haber echado mano a título de premisas suplementarias. Pues, en efecto, cabría recurrir a truísmos (*truisms*) * lógicos de esta suerte con el fin de mitigar la escasez de patrones inferenciales de partida; y, si Crisipo se hubiera servido de ellos a tal efecto, estaría justificado que omitiese mencionarlos entre las premisas de un modo derivado demostrado con su ayuda, pues cuando algo constituye una verdad palmaria de la lógica no hay por qué dispensarle el mismo trato que a un supuesto específico del que quepa pensar que fuese falso.

A este respecto, merece la pena recordar que a los estoicos se les atribuye la afirmación de que la introducción de premisas superfluas en una argumentación es de por sí un indicio de razonamiento defectuoso. Pero parece ser que el alcance de aquella afirmación se limitaba a casos como el de la premisa «Es de día y Dión pasea» cuando hubiese bastado la premisa «Es de día» [160]. Y los propios estoicos fueron acusados con posterioridad de

---

159 Sexto, *Pyrrh. Hyp.* I, 69.

* El término *truism* es repetidamente empleado por los autores a lo largo del libro con el sentido técnico de "verdad (lógica) palmaria", lo que convierte cuando menos en chocante su traducción castiza por "perogrullada". Dado que el vocablo "tautología", por otra parte, reviste connotaciones históricas que desaconsejan su introducción en este punto, resultando enfadoso finalmente tener que recurrir a cada caso a prolijas perífrasis, hemos optado por valernos del anglicismo "truismo", cuyo uso goza ya —para bien o para mal— de relativa difusión en nuestro idioma. *(N. del T.)*

160 Ibid. II, 147; *Adv. Math.* VIII, 431, 439.

introducir innecesarias prolijidades al servirse como premisa del enunciado condicional «Si es de día, entonces hay claridad», en lugar de pasar directamente del antecedente al consecuente mediante el argumento «Es de día, luego hay claridad» [161]. Tenemos que admitir, por consiguiente, que carecemos de suficiente información acerca del empleo de truísmos o verdades lógicas palmarias como premisas por parte de los estoicos; pero sabemos, sin embargo, que concedieron gran importancia al principio de tercio excluso en su formulación «O lo primero o no lo primero», del que es fácil imaginar cómo podrían haberse servido en la demostración de dos importantes teoremas.

*10. *O lo primero o no lo primero; pero lo primero; luego no lo primero.*

La conclusión se sigue aquí directamente de las premisas por el indemostrable 4.

*11. *O lo primero o no lo primero; pero no no lo primero; luego lo primero.*

La conclusión se sigue nuevamente de las premisas por el indemostrable 5.

Conjuntamente tomados, estos dos teoremas nos permiten establecer la equivalencia de cualquier proposición con la negación de su negación, bajo la única condición de que aceptemos el truísmo «O lo primero o no lo primero». Se ha de notar, empero, que el teorema 10 depende del uso de «o» en sentido excluyente. Precisamente porque los primeros estoicos insistieron en semejante interpretación de la disyunción, el principio «O lo primero o no lo primero» podía jugar para ellos el papel que los lógicos asignan comúnmente al principio de no-contradicción. Y con ello tendríamos, finalmente, una razón para que Crisipo desease incluir en su lista a los indemostrables 4 y 5 no menos que a 1 y 2. Si los hubiera omitido, no habría tenido modo de derivar las dos reglas relativas a la doble negación por ninguno de los procedimientos que le eran familiares. Por descontado, siempre podría haberlos añadido como esquemas de inferencia independientes; pero ello habría ido en contra de la doctrina de que todo esquema inferencial simple ha de envolver dos premisas, doctrina que Crisipo hacía suya. Comoquiera que sea, hay un pasaje de Diógenes Laercio que no permite dudar de que los estoicos se interesaron por la proposición doblemente negativa o supernegativa (*ὑπεραποφατικόν*), como ellos las llamaban, y formularon al efecto las reglas apropiadas [162].

¿Hay algunas otras verdades lógicamente necesarias de las que Crisipo pueda haberse servido a título de premisas suplementarias? Galeno [163] y Alejandro [164] nos informan de que los estoicos utilizaban cuatro *thémata* (*θέματα*) en su análisis de los argumentos complejos. Sólo el primero y el tercero de esos *thémata* han llegado hasta nosotros, pero a partir de ellos es posible conjeturar el apartado teórico al que corresponden. El primero es el principio que Aristóteles asume en su reducción directa de los silogismos:

> *Si dos proposiciones implican una tercera, entonces una cualquiera de ellas —junto con la negación de la tercera— implica la restante* [165].

---

161 Ibid. II, 159 y ss.; *Adv. Math.* VIII, 440 y ss.
162 Diógenes Laercio, VII, 69.
163 *De Hipp. et Plat. Plac.* II, 3 (92).
164 *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 284.
165 Apuleyo, *De Philosophia Rationali*, 278.

Y el tercero es el principio:

> *Cuando dos proposiciones implican una tercera y una de ellas puede a su vez ser obtenida a partir de otras premisas, entonces la segunda de las proposiciones originarias —junto con las nuevas premisas— implica la conclusión originaria* [166].

Al parecer, el segundo y cuarto *thémata* se asemejan al tercero, pues Alejandro nos dice que los estoicos, con su característica pasión por los detalles inútiles, elaboraron estos tres principios a partir de un único principio de composición transmitido por la escuela peripapatética. Es posible, por otra parte, que el principio mencionado por Sexto Empírico en su caracterización del teorema 6 sea el segundo *théma*. En cualquier caso, resulta claro que los *thémata*, a diferencia del principio de tercio excluso, no eran concebidos como premisas suplementarias que hubiesen de injertarse en argumentos correspondientes a uno cualquiera de los modos indemostrables, sino más bien como reglas de segundo orden llamadas a gobernar los procedimientos seguidos por Crisipo en su derivación de modos complicados. En el latín de Apuleyo, *θέμα* aparece traducido por *constitutio vel expositum*, lo que suena a expresión de la administración imperial romana, siendo quizás la de «principio rector» su más aproximado equivalente en castellano.

¿Mas en qué sentido podría decirse que el primer *théma* exprese un principio rector del procedimiento seguido por Crisipo? Este último tenía, por lo visto, que contar con un método que le permitiera pasar de un modo que responda al diseño general «Lo primero; y lo segundo; luego lo tercero» a un modo que responda a este otro diseño general: «Lo primero; pero no lo tercero; luego no lo segundo». Y, por fortuna, el teorema 7 — conservado por Sexto Empírico junto con su demostración— nos revela cómo se puede hacer tal cosa. De acuerdo con el mismo, siempre podremos argumentar de esta guisa: «Si lo primero y lo segundo, entonces lo tercero; pero no lo tercero; por otra parte, lo primero; luego no lo segundo». Supongamos ahora que, en un concreto caso de aplicación de dicho modo, la premisa condicional haya sido obtenida recurriendo a la expresión del principio de un modo válido mediante un enunciado condicional: evidentemente, cabría omitir tal circunstancia sin que ello afectase para nada a la validez del nuevo argumento. Pues el principio válido en cuestión constituiría una verdad lógicamente necesaria y no un supuesto del que quepa pensar que fuese falso. Pero tal simplificación arroja un modo que se relaciona con la fuente de la premisa condicional de la manera descrita por el primer *théma*. Parece muy probable, por lo tanto, que Crisipo se haya servido en tales contextos de premisas suplementarias derivadas de modos ya aceptados en virtud del principio de condicionalización [167].

Si de hecho procedió así al construir sus demostraciones sobre la base del primer *théma*, no hay razón alguna para no haber seguido un proceder

---

166 Alejandro, op. cit., p. 278. Cf. Simplicio, *In Arist. de Caelo Commentaria*, ed Heiberg, *C.I.A.G.* VII, p. 236.

167 Este peldaño, fundamental para nuestra reconstrucción, fue sugerido por Benson Mates en su tesis doctoral de 1948 *The Logic of the Old Stoa*, desarrollando con posterioridad tal sugerencia en su *Stoic Logic* (University of California Publications in Philosophy, vol. 26). La idea de que el principio de condicionalización constituya el cuarto *thĕma* fue tomada en consideración por O. Becker en *Zwei Untersuchungen zur antiken Logik (Klassisch Philologische Studien*, Heft. 17), p. 43, si bien no llegaría a hacerla suya.

parejo cuandoquiera que resultase conveniente a los efectos de demostrar modos complicados por medio de argumentos pergeñados dentro de los modos indemostrables, residiendo tal vez aquí el meollo del cuarto *théma*. No cabe la menor duda de que los estoicos se hallaban familiarizados con el principio de condicionalización, y su utilizacón a la manera descrita explicaría el especial interés acreditado por proposiciones complejas de la forma «No a la vez lo primero y lo segundo». Pues el enunciado condicional correspondiente a un modo con dos premisas presenta una conjunción en el antecedente y, al ser introducido como premisa rectora de un argumento montado sobre la base del indemostrable 2, la conclusión de dicho paso comporta inevitablemente la negación de una conjunción. Para servirnos de aquel último como premisa rectora de un nuevo argumento, es esencial incluir un modo como 3 entre los indemostrables.

Consideremos ahora algunos teoremas que por lo menos nos permitan hacernos una idea de las posibilidades del método de Crisipo. Puesto que las demostraciones resultarán más complicadas que las consideradas hasta aquí, será conveniente proceder a la indicación de sus pasos mediante abreviaturas. En lo que sigue, nos serviremos —tal y como Crisipo pudiera haberlo hecho— de las letras griegas α y β en lugar de los numerales «Lo primero» y «Lo segundo» respectivamente. Las anotaciones que figuran a los extremos de cada línea expresarán la articulación del argumento, de suerte que «(*a*) (*b*), 1» signifique que la fórmula precedente ha sido obtenida a partir de (*a*) y (*b*) por medio del modo 1 y «1, cond.» signifique que la fórmula precedente constituye la condicionalización del modo 1. En gracia a la brevedad, asumiremos que basta la referencia a los teoremas 10 y 11 para justificar la introducción y eliminación de dobles negaciones; mas si se teme que Crisipo hubiera desaprobado este recurso sobre la base de su semejanza con las inferencias a partir de una sola premisa, las demostraciones de los teoremas 14 y 15 que siguen a continuación podrían ser reforzadas acudiendo al principio de tercio excluso en la formulación pertinente.

*12. *Si lo primero, entonces no lo segundo; pero lo primero; luego no si lo primero, entonces lo segundo.*

(*a*) Si α, entonces no β.	Premisa
(*b*) α.	Premisa
(*c*) No β.	(*a*) (*b*), 1
(*d*) Si (si α, entonces β) y α, entonces β.	1, cond.
(*e*) No ((si α, entonces β) y α).	(*d*) (*c*), 2
(*f*) No (si α, entonces β).	(*e*) (*b*), 3

*13. *Si no lo primero, entonces lo segundo: pero no lo segundo; luego no si lo primero, entonces lo segundo.*

(*a*) Si no α, entonces β.	Premisa
(*b*) No β.	Premisa
(*c*) No no α.	(*a*) (*b*), 2
(*d*) Si (si α, entonces β) y no β, entonces no α.	2, cond.
(*e*) No ((si α, entonces β) y no β).	(*d*)(*c*), 2
(*f*) No (si α, entonces β).	(*e*) (*b*), 3

14. *Si lo primero, entonces lo segundo; si lo primero, entonces no lo segundo; luego no lo primero.*

(*a*) Si α, entonces β.	Premisa
(*b*) Si α, entonces no β.	Premisa
(*c*) Si (si α, entonces no β) y α, entonces no (si α, entonces β).	12, cond.
(*d*) No no (si α, entonces β).	(*a*) ,10
(*e*) No ((si α, entonces no β) y α).	(*c*) (*d*), 2
(*f*) No α.	(*e*) (*b*), 3

*15. *Si lo primero, entonces lo segundo; si no lo primero, entonces lo segundo; luego lo segundo.*

(*a*) Si α, entonces β.	Premisa
(*b*) Si no α, entonces β.	Premisa
(*c*) Si (si no α, entonces β) y no β, entonces no (si α, entonces β).	13, cond.
(*d*) No no (si α, entonces β).	(*a*), 10
(*e*) No ((si no α, entonces β) y no β).	(*c*) (*d*), 2
(*f*) No no β.	(*e*) (*b*), 3
(*g*) β.	(*f*),11.

No se sabe de ninguna referencia de autores antiguos a los teoremas 12 y 13, pero el teorema 14 que acabamos de demostrar por medio de una condicionalización del teorema 12 es uno de los dos teoremas estoicos para los que antes no se podía encontrar demostración. Su supervivencia reviste especial interés para nosotros por tratarse del modelo de la *reductio ad absurdum* empleada por los eléatas y sus sucesores los megáricos. Al parecer, los estoicos lo tuvieron en gran estima, puesto que es mencionado varias veces en las fuentes antiguas bajo la específica denominación de «teorema con dos premisas complejas» (*τὸ διὰ δύο τροπικῶν θεώρημα*)[168]. Es razonable suponer que los estoicos contaban asimismo con el teorema 15, ya que es posible demostrarlo en una serie análoga de pasos; mas no figura como regla derivada en ninguna de las fuentes de la lógica estoica conocidas, siendo poco probable su notoriedad, ya que en tal caso no habría resultado apropiada para el teorema 14 la específica denominación de «teorema con dos premisas complejas»[169].

Sustituyendo «lo segundo» por «lo primero» en los teoremas 14 y 15, podrían ser obtenidos los dos nuevos teoremas:

*16. *Si lo primero, entonces lo primero; si lo primero, entonces no lo primero; luego no lo primero.*

17. *Si lo primero, entonces lo primero; si no lo primero, entonces lo primero; luego lo primero.*

---

168 Orígenes, *Contra Celsum*, VII, 15, y Sexto Empírico, *Pyrrh. Hyp.* II, 3.

169 La regla que hemos bautizado como teorema 15 aparece en el escolio "Sobre Todas las Formas del Silogismo", impreso en los *Commentaria in Aristotelem Graeca*, IV (VI), p. XI, 11, 13-26, mas se la trata allí como una regla básica de inferencia y no es expresamente atribuida a los estoicos, por más que sea objeto de estudio en compañía de los cinco indemostrables de Crisipo.

Pero parece haber indicios de que Crisipo obtenía esos teoremas por medio de un rodeo, esto es, sin servirse de ningún lema en el que interviniese «lo segundo». Pues si, en efecto, hubiese adoptado este último recurso en su demostración del teorema 16, habría tenido antes que demostrar algún modo preliminar— como el teorema 12, esto es, «Si lo primero, entonces no lo primero; pero lo primero; luego no si lo primero, entonces lo primero»—, para lo que a su vez habría necesitado condicionalizar el teorema 8 ridiculizado por los peripatéticos como una trivialidad.

Tal vez resulte curioso reparar en que el teorema 17 ha sido conservado por Sexto en una versión que incluye el principio «O lo primero o no lo primero» [170]. Pues si nuestra reconstrucción de la lógica estoica es la correcta, el principio no sería otra cosa que una premisa suplementaria susceptible de omisión sin pérdida de rigor. De lo que Sexto afirma en su primera mención de ese teorema parece desprenderse, sin embargo, que algunos estoicos innominados justificaron tal principio por recurso a un argumento que equivale de hecho a la admisión de nuestro teorema 16; y es fácil caer en la cuenta de que quienes deseen razonar de aquella suerte sin retrotraerse a los cinco indemostrables de Crisipo podrían encontrar muy natural la introducción de la premisa disyuntiva. Así, cuando Aristóteles se sirve en el *Protréptico* del patrón argumentativo del teorema 17, sienta expresamente la disyunción «O debemos filosofar o no debemos hacerlo». Todo ello no obstante, la segunda mención de Sexto a nuestro teorema deja entender que en realidad no faltaban tampoco estoicos a quienes inquietara la aparente redundancia de su formulación. Y tenían razón para inquietarse, pues un atento examen del singular teorema acabaría mostrando que *no requiere de premisas ordinarias*. Si omitimos «O lo primero o no lo primero», igualmente podríamos omitir «Si lo primero, entonces lo primero», con lo que nos quedaría «Si no lo primero, entonces lo primero» como única premisa. Así formulada, ésta no es ciertamente un truísmo, lo que hace de ella una pieza imprescindible para el argumento en una medida en que las otras dos premisas no lo son. Pero en rigor se trata de un esquema proposicional y no de una proposición de pleno derecho, echándose de ver bien fácilmente que la aserción de una auténtica proposición de aquella forma sólo estaría autorizada interpretándola como la condicionalización de una inferencia (*entailment*) *. El teorema, por tanto, equivaldría a la afirmación de que cualquier proposición implicada por su propia negación es verdadera. Considerado como un modo de argumentación, constituiría un recurso para el establecimiento de conclusiones necesariamente verdaderas, esto es, de proposiciones que se siguen de premisas cualesquiera.

A los estoicos, de cualquier modo, el teorema 17 parece haberles interesado como un medio de refutar a los escépticos. Unas generaciones antes, Platón se había servido de una versión del teorema 16 para la refutación del relativismo, al hacer decir a Sócrates que la teoría de la verdad propuesta por Protágoras habría de ser falsa por entrañar su propia contradicción [171], De un modo muy similar, los estoicos argüían contra el escepticismo de su tiempo aduciendo que el intento de demostrar la imposibilidad de demos-

170 *Adv. Math.* VIII, 281-4 y 292-6.
* Cf. la nota al pie de la pág. 3 *(T.)*
171 *Theaetetus*, 171 A.

tración probaba que esta última es posible [172]. Razonamientos estrechamente paralelos se pueden encontrar en diversas obras de San Agustín [173] y, aunque estamos lejos de contar con testimonios concluyentes al respecto, parece muy probable que el descubrimiento del teorema 17 ejerciese alguna influencia sobre Agustín y —a través suyo— sobre el mismo Descartes. Pero es interesante reseñar que todos estos adversarios del escepticismo exageraron la cogencia de su argumentación al sostener que la proposición por que se interesaban se sigue de su contradictoria, cuando lo cierto es sólo que aquélla se acredita como verdadera *al intentar hacer valer su contradictoria*. No faltan, sin embargo, ejemplos de argumentación que se ajustan exactamente al esquema estoico. En la antigüedad, ese patrón argumentativo fue utilizado por los matemáticos Euclides [174] y Teodosio [175], cobrando nueva vida en el Renacimiento bajo la denominación de *consequentia mirabilis*. Hemos de ver más adelante, en un otro capítulo, cómo sirvió de inspiración para un notable impulso al desarrollo de la matemática.

De diversos pasajes de autores antiguos se desprende que los estoicos creían que su lista de cinco indemostrables era completa en el sentido de contener cuanto se necesita para poder razonar. Se dice, por ejemplo, en un lugar que, de acuerdo con Crisipo, todo argumento puede construirse a partir de ellos [176] y, en otro, que todo argumento puede ser validado por referencias a ellos [177]. Es evidente que una cierta aspiración de completud * no era ajena a los propósitos de la escuela estoica, pero no hay que pensar que ningún miembro de la misma intentase siquiera una precisa definición de la completud ni se parase a considerar bajo qué condiciones cabría asignar tal propiedad a un sistema de reglas de deducción como las suyas. Se podría probar que el sistema estoico, tal y como nosotros lo hemos presentado (esto es, incluyendo el principio de análisis mencionado por Sexto como segundo *théma* y el principio de condicionalización como cuarto *théma*) es completo en un sentido estricto y moderno del vocablo respecto de la conjunción y la negación [178]. Pero en orden a obtener tal resultado sería preciso dar entrada por la puerta falsa a argumentos con una única premisa, expresamente excluidos —como vimos— por Crisipo; y, en cualquier caso, semejante resultado no sería demasiado relevante dado que, según hemos sostenido, los estoicos no interpretaron los enunciados condicionales y disyuntivos como definibles en términos de conjunciones y negaciones.

Sea o no correcta en su detalle nuestra reconstrucción, lo que sí está claro es que los estoicos contaban con un cuerpo de doctrina lógica altamente desarrollado. Y asimismo está claro que algunos aristotélicos, como Alejandro, consideraron las teorías lógicas de los estoicos como hostiles a las de

---

172 Sexto, *Pyrrh. Hyp.* II, 186, y *Adv. Math.* VIII, 281, 466.
173 Por ejemplo, en *De Civitate Dei*, XI, 26.
174 *Elementa*, IX, 12.
175 *Spherica*, I, 12.
176 Diógenes Laercio, VII, 79.
177 Sexto, *Pyrrh. Hyp.* II, 156-7, 166-7, 194.
* Nuestra traducción de *completeness* por "completud" —no se confunda dicho término, sustantivación de "completo", con "completabilidad", sustantivación de "completable" ("incompletud" e "incompletabilidad" aluden, por ejemplo, a diferentes propiedades formales; cf. sobre este punto el último capítulo del libro, especialmente § 3)— sigue la práctica de Manuel Sacristán en su *Introducción a la lógica y al análisis formal*, Barcelona, 1964, donde se considera preferible esa versión a otras alternativas, como "completitud", acaso más extrañas al idioma aun si por lo demás de uso ampliamente extendido. *(N. del T.)*
178 O. Becker, op. cit., p. 46.

su maestro. Mas la razón determinante de semejante consideración no pudo ser que los estoicos negasen validez a la silogística aristotélica, pues nada hay en su doctrina positiva que conduzca a rechazar un solo modo de Aristóteles ni tenemos tampoco indicio alguno de que fuera ésa la intención de los estoicos. Los testimonios de Galeno [179] y Alejandro [180] sugerirían más bien que los estoicos irritaron a los peripatéticos al reclamar la prioridad lógica de su propia dialéctica, poniendo de relieve que Aristóteles se sirvió inconscientemente de los principios de esta última en apartados tales de su silogística como la teoría de la reducción. ¿Cuál es, en realidad, la relación existente entre ambos sistemas?

En un párrafo anterior llamamos la atención sobre el hecho de que las variables de la lógica estoica representan espacios a rellenar por medio de signos proposicionales. Esta es la clave para la comprensión de la obra lógica de los estoicos. Mientras que Aristóteles concentró su atención sobre aquellas inferencias que envuelven relaciones entre términos generales, los estoicos se ocuparon de aquellas otras que dependen exclusivamente de las nociones expresadas por las conectivas en el seno de enunciados complejos. Como Lukasiewicz puso por vez primera de manifiesto [181], tendríamos en ello los orígenes de lo que hoy día llamamos el cálculo proposicional, a saber, el apartado más fundamental de la lógica sin el que no cabría proceder a la elaboración sistemática del cálculo de las funciones proposicionales o los términos generales. El reconocimiento de este hecho ha conducido recientemente a diversos intentos, más bien inoportunos, de formular los teoremas estoicos mediante el simbolismo de la lógica actual. Esos intentos van descaminados por dos razones principales: la primera, porque sugieren impropiamente que los estoicos aceptaron una interpretación veritativo-funcional de todas las conectivas proposicionales; la segunda, porque oscurecen las peculiares características del tipo de razonamiento mediante el que Crisipo derivaba modos complejos de argumentación a partir de sus indemostrables. Mas la intención es buena y, desde luego, es justo honrar a los estoicos por su importante contribución al desvelamiento de la estructura de la lógica.

La lógica de las proposiciones que ellos investigaron es más fundamental que la lógica de los términos generales estudiada por Aristóteles, no en el sentido de que la primera incluya a la segunda, sino en el sentido de que esta última presupone a aquélla. Su especial importancia ha sido resaltada alguna vez mediante el rótulo de «teoría de la deducción» [182]. Pero resulta más satisfactorio describirla como «lógica primaria», por figurar a la cabeza de cualquier presentación sistemática del cuerpo de la lógica. Si se adopta esta práctica, cabría entonces reservar el rótulo de «lógica general» para aquel apartado de la lógica en que no solamente nos ocupamos de las nociones de negación, conjunción, disyunción, etc., sino también de las nociones de generalidad expresadas por «todo» y por «algún». La lógica general, así definida, incluiría a la lógica primaria, o no-general, y no podría ser objeto de desarrollo sin contar con ella, en tanto que la lógica primaria

---

179 *Institutio Logica*, ed. Kalbfleisch, p. 17.
180 Alejandro, *In Aristotelis Topicorum Libros Octo Commentaria*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (II), p. 218.
181 En "Zur Geschichte der Aussagenlogik", *Erkenntnis*, V (1935), pp. 111-31.
182 A. N. Whitehead y B. Russell, *Principia Mathematica*, I, p. 90.

podría ser presentada como una teoría independiente. Dentro de un esquema semejante, la silogística aristotélica vendría a constituir un fragmento de la lógica general en el que los teoremas de la lógica primaria se dan por aceptados sin necesidad de explícita formulación, mientras que la dialéctica de Crisipo constituiría una primera versión de la lógica primaria.

IV. LA LOGICA ROMANA Y MEDIEVAL

1. De Cicerón a Boecio.

Durante algunos siglos tras de la sistematización de la lógica estoica por parte de Crisipo registramos una confrontación de los méritos respectivos de su sistema y el aristotélico, seguida de una gradual fusión —quizás sería mejor hablar de confusión— entre ambos, que acabaría alcanzando su culminación a fines de la antigüedad clásica con la obra de Boecio. Cuando se reemprendió el cultivo de la lógica tras el eclipse producido en las Edades Oscuras, la reputación de Boecio no era menor que la de Aristóteles y sus escritos gozaban de una difusión superior a los de este último. Una parte, por tanto, de la contribución estoica habría quedado incorporada a lo que conocemos hoy por lógica tradicional, si bien perdería peso ulteriormente con el renacimiento del interés por Aristóteles, que hubo de conducir en ocasiones a una suerte de purismo aristotélico. En la presente sección intentaremos bosquejar la transmisión del legado lógico desde la antigüedad griega al medievo, dando nombres y fechas allí donde éstas puedan ser de utilidad. Mas ni siquiera vamos a pretender estudiar con detalle las figuras famosas de este largo período, ya que nuestro propósito se reduce a ofrecer a grandes rasgos una visión en perspectiva del proceso.

A lo largo de los dos últimos siglos a. de C. y la primera centuria de nuestra Era, las escuelas filosóficas proliferaban en Atenas y coexistían codo con codo, compitiendo en el reclutamiento de discípulos con doctrinas que seguían más o menos de cerca las de sus fundadores; pero la estoica y la epicúrea eran las más influyentes de entre ellas. La Academia de Platón se había convertido a la sazón en el baluarte del escepticismo, con Carnéades como su representante más destacado, y la influencia de Aristóteles no era en sí misma muy considerable. Si juzgamos por los escritos de Cicerón, los estoicos dominaban la escena del momento. Sin duda no se dejaron de hacer progresos en la escuela con posterioridad a la época de Crisipo, mas no nos es posible distinguirlos con nitidez de la obra de este último, ya que la tradición antigua presenta amplias lagunas al respecto. Autores posteriores como Galeno, Alejandro y Boecio se refieren constantemente a los estoicos o «los modernos» (*οἱ νεώτεροι*) sin tomarse la molestia de identificar a las individualidades.

Cicerón no aportó ninguna contribución original al desarrollo de la lógica, mas sus escritos preservaron retazos de información relativa a las enseñanzas estoicas, prestando en esto —como en otros dominios de la filosofía— un útil servicio al proponer equivalentes latinos para los vocablos técnicos del griego. *Propositio*, por ejemplo, fue un término introducido por él, mas no con el mismo sentido exactamente que andando el tiempo adquiriría en latín. En su terminología designaba la premisa rectora de un argumento (*τὸ ἡγεμονικὸν λῆμμα*), en cuanto diferente de *assumptio*, que designaría la premisa adicional (*ἡ πρόσληψις*)[1]. Este específico sentido reapa-

[1] *De Inventione*, I, 57 y ss.

rece más tarde en los escritos lógicos atribuidos a Apuleyo y Marciano Capella, pero ya antes de dar fin el siglo I d. de C. fue usada por Quintiliano el retórico con el sentido más general de «enunciado» u «oración enunciativa» que retendría a todo lo largo de la Edad Media.

El término que Cicerón emplea, en el pasaje que acabamos de citar, para aludir a una conclusión es el de *complexio*, que literalmente significa «trabazón» o «conexión», pero es interesante reparar en que la misma palabra aparece en otros lugares del libro con el sentido de «dilema»: «Complexio est in qua, utrum concesseris, reprehenditur ad hunc modum: *Si improbus est, cur uteris? Si probus, cur accusas?*» [2]. Sin duda este tipo de razonamiento gozaba de popularidad entre los retóricos helenísticos de los que Cicerón extrajo su material, siendo posible que fueran ellos sus cultivadores más bien que los lógicos estoicos que primero estudiaron los argumentos disyuntivos y condicionales. El «teorema con dos premisas complejas» que reseñábamos en nuestro examen del sistema de Crisipo constituye, por supuesto, un caso especial del género de argumento que los lógicos posteriores llamarían dilema constructivo simple (esto es, al uso estoico: «Si lo primero, entonces lo tercero; si lo segundo, entonces lo tercero; pero o lo primero o lo segundo; luego, en cualquier caso, lo tercero») y la paradoja del cocodrilo y el niño, que Luciano atribuye a Crisipo [3], envuelve un argumento de la misma especie. No cabe duda, pues, de que los estoicos se hallaban familiarizados con este producto de su lógica. Pero por otra parte, y de acuerdo con el propio Crisipo, todos los argumentos correctos eran διλήμματα en el sentido originario de «argumentos con dos premisas»; y no hay en cambio testimonio alguno de la utilización del vocablo διλήμματον en el moderno sentido de «dilema» hasta el siglo II d. de C., en que lo encontramos —en la obra del retórico Hermógenes— en un contexto semejante al de la *complexio* ciceroniana, a saber, referido a dos interrogantes igualmente difíciles de responder [4].

Entre las obras filosóficas de Cicerón se encuentra un breve tratado, denominado *Topica*, que ejerció una considerable influencia en la enseñanza de la lógica por la alta estima en la que fue tenido en la antigüedad posterior, en que la lógica era asociada a la retórica a la manera que el propio Cicerón había juzgado apropiada. El libro se presenta como una adaptación de los *Tópicos* de Aristóteles para uso de un amigo llamado Trebacio, pero revela escasas huellas de una directa procedencia aristotélica. Se halla concebido como un manual para el adiestramiento del orador romano, abundando por tanto las ilustraciones extraídas de la jurisprudencia del momento. Probablemente el plan del mismo, tal como está desarrollado, deriva de algún manual helenístico, pues los tópicos discutidos en él son mencionados en idéntico orden por el *De Oratore* [5], como si se tratase, pues, de auténticos lugares comunes de la época. Algunos de esos tópicos, se nos dice, se hallan intrínsecamente relacionados con el asunto sometido a debate (*in eo ipso de quo agitur haerent*), como sucede por ejemplo con los concernientes a la definición, el género, la especie (o, en la terminología de Cicerón, la *forma generis*), en tanto que otros revisten un carácter extrínseco (*assumuntur extrinsecus*), como el que por ejemplo envuelve apelación a la

2 Ibid. 45.
3 *Vitarum Auctio*, 22.
4 Hermógenes, *De Inventione*, IV, 6.
5 *De Oratore*, II, 162-73.

autoridad. Con algunos retoques, esta sencilla clasificación fue mantenida hasta tanto perduró el interés por el estudio de los tópicos.

Casi al comienzo de sus *Topica*, Cicerón hace notar que los tratados estoicos de dialéctica concentran su atención sobre cuestiones relativas a la validez del razonamiento, desdeñando en cambio la invención de argumentos, que es el problema comúnmente tratado bajo el rótulo de «tópicos». Y más adelante añade que las reglas de inferencia ofrecidas por los dialécticos no resultan necesarias para el tipo de instrucción que a él le interesa proporcionar. Pero enumera, sin embargo, algunas de estas reglas, reputadas suficientes para la derivación de innumerables otras, constituyendo este pasaje el apartado más interesante de todo el libro [6].

Tras haberse ocupado de los cinco indemostrables en la ordenación usual, aunque sin mencionar a Crisipo, Cicerón prosigue «Deinde addunt coniunctionum negantiam sic: *Non et hoc et illud; hoc autem; non igitur illud.* Hic modus est sextus. Septimus autem: *Non et hoc et illud; non autem hoc; illud igitur*». El presunto sexto indemostrable no es, como puede verse, más que una reformulación del tercero, mientras que el séptimo es claramente inválido en la presente formulación. Cabría aquí suponer que Cicerón anda sin más extraviado, ya que el tema no era ciertamente su fuerte y los ejemplos con que ilustra el tercer indemostrable sugieren de hecho que no llegó a entenderlo demasiado bien; mas la fraseología del texto revela abiertamente que está siguiendo un manual en el que se decía que la dialéctica descansa en siete reglas básicas de inferencia, y contamos con otros testimonios que acreditan la extensión de esta doctrina con posterioridad a Cicerón. En efecto, Marciano Capella [7], que escribió a comienzos del siglo v d. de C. y se servía de los numerales estoicos *primum* y *secundum* (de los que no hay rastro en el pasaje de la obra de Cicerón), así como el autor del escolio «Sobre todas las formas del silogismo» [8], escrito probablemente en el siglo vi d. de C., aducen ambos siete clases de silogismos hipotéticos. Y lo que todavía es más, los dos presentan una lista que coincide con la de Cicerón en cuanto a la primera, segunda, cuarta, quinta y sexta reglas, describiendo cada uno de ellos la séptima regla de manera reveladoramente defectuosa. La formulación de esta última por Marciano Capella incurre en la misma falacia que la de Cicerón, mientras que la caracterización del escoliasta concluye abruptamente sin llegar a presentar un esquema completo de inferencia; pero ambos dicen lo bastante acerca de ella como para que de su comentario se desprenda que la séptima regla se asemeja a la quinta. En el texto del escolio se la denomina παραδιεζευγμένος, o cuasi-disyuntiva. Por otra parte, tanto Marciano Capella como el escoliasta nos ofrecen una versión de la tercera regla un tanto diferente de su propia regla sexta, versión que asimismo difiere, por lo tanto, de la tercera regla ciceroniana. En la presentación latina de Marciano Capella, la tercera regla reza como sigue: «Non et primum et non secundum; primum autem; igitur et secundum». Pero en la presentación del escoliasta griego la regla recibe, con la misma numeración, la denominación de παρασυνημμένος, o cuasi-condicional, resultando ser el dilema constructivo sim-

6 *Topica*, 54-57.
7 *De Nuptiis Philologiae et Mercurii*, IV, 414-21.
8 Ammonio, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* IV (VI), Praefatio, p. xi.

ple que demostrábamos como teorema en nuestro intento de reconstruir un fragmento del sistema de Crisipo.

Estos hechos sugieren que, ya antes de la época de Cicerón, algún filósofo, probablemente un miembro de la escuela estoica, había pergeñado una lista de siete reglas básicas del silogismo hipotético (otras que las del silogismo totalmente hipotético cultivado por Teofrasto), lista que contendría los cinco indemostrables de Crisipo en los lugares primero, segundo, cuarto, quinto y sexto, pero emplazando en tercero y séptimo lugar dos nuevas reglas lo suficientemente semejantes a la tercera de Crisipo —que ahora figuraría como sexta— como para poder ser confundidas con esta última y, no obstante, lo suficientemente diferentes de la misma como para merecer ser mencionadas por separado. Más aún, estamos autorizados a suponer que las tres primeras reglas eran todas en un amplio sentido reglas de la inferencia condicional, en tanto que las cuatro últimas lo eran —también en un amplio sentido— de la inferencia disyuntiva. Pues nuestras tres autoridades a la vez hacen afirmaciones que sugieren una división bipartita de este género. Quizás el cuadro originario de las citadas siete reglas presentaría el siguiente aspecto:

(1) *Si lo primero, entonces lo segundo; pero lo primero; luego lo segundo.*
(2) *Si lo primero, entonces lo segundo; pero no lo segundo; luego no lo primero.*
(3) *No a la vez lo primero y no lo segundo; pero lo primero; luego lo segundo.*
(4) *O lo primero o lo segundo; pero lo primero; luego no lo segundo.*
(5) *O lo primero o lo segundo; pero no lo primero; luego lo segundo.*
(6) *No a la vez lo primero y lo segundo; pero lo primero; luego no lo segundo.*
(7) *No a la vez no lo primero y no lo segundo; pero no lo primero; luego lo segundo.*

En nuestro cuadro, (3) se halla directamente extraída de Marciano Capella, mientras (7) difiere en efecto de su texto (y, por ende, del de Cicerón) sólo por la inserción de dos partículas negativas que podrían haber sido fácilmente omitidas por el copista. De los manuscritos se desprende asimismo que algún copista tuvo ya dificultades a costa del emplazamiento de las partículas negativas en la regla (2), por más que en este caso las explicaciones de Marciano Capella resultaran lo suficientemente esclarecedoras como para no dejar lugar a dudas acerca de su correcta interpretación.

Si nuestra conjetura es acertada, el lógico que originariamente elaboró el precedente cuadro de las siete reglas tenía sin duda la intención de mostrar por medio de las reglas (3), (6) y (7) lo que podía obtenerse conjugando las dos nociones de conjunción y negación. Hemos apuntado razones para creer que Crisipo interpretó las versiones griegas de «si» y «o» en un sentido fuerte que no cabría analizar sino por recurso a expresiones modales como «necesario» e «imposible», pudiendo haber sido éste uno de los motivos por los que juzgó apropiado tomar también en consideración premisas de la forma «No a la vez lo primero y lo segundo». Una vez que

se hubo reparado en la distinción entre conectivas fuertes (o modales) y débiles (o no-modales), resultaba natural preguntarse asimismo qué cabría hacer, si podía hacerse algo, con las conectivas débiles, y ésta parece haber sido la idea que preside la elaboración de nuestro cuadro. Pues, en efecto, la premisa rectora de la regla (3) es un condicional débil como el discutido por Filón de Megara, en tanto la premisa rectora de (7) es la correspondiente disyunción débil, esto es, aquélla que es verdadera con sólo que lo sea una de sus disyuntas. En su caracterización de las siete reglas, Cicerón parece haberse dejado extraviar por una reminiscencia del sistema de Crisipo, pero el extravío del escoliasta en este punto respecto del sistema relativamente simple transmitido por Marciano Capella no cabe atribuirlo a inadvertencia. Hemos de suponer, por consiguiente, que, en un momento dado, la regla propuesta por el escoliasta bajo la denominación de παρασυνημμένος llegó a considerarse seriamente como una regla básica en vez de la tercera antes transcrita, por más que aquella denominación parezca convenir más a esta última. Si Crisipo organizó su sistema tal y como se sugería en el capítulo precedente, no había en rigor necesidad de semejantes reglas suplementarias, puesto que todo él podía ser derivado de sus indemostrables. Pero hemos de conceder, en cualquier caso, la posibilidad de algún intento de perfeccionar su obra.

Del siglo II d. de C. conservamos un pequeño manual que se ocupa en latín conjuntamente de las lógicas aristotélica y estoica, destacando las peculiaridades de una y otra. Se trata del *De Philosophia Rationali sive Peri Hermeneias* atribuido a Apuleyo, que floreció bajo el imperio de los Antoninos, hacia el año 140 de nuestra Era. Se desconoce el verdadero origen de esta obra, que difícilmente podría pertenecer al *De Dogmate Platonis*, de la que constituye la tercera parte en nuestros manuscritos de Apuleyo. No hay razón, sin embargo, para dudar de que provenga del siglo II d. de C., constituyendo una valiosa fuente de información acerca de la lógica estoica.

Un autor bastante mejor conocido de la misma época es el médico Galeno, que vivió aproximadamente entre los años 129 y 199. De acuerdo con su propio catálogo de sus obras, escribió mucho sobre lógica bajo una inspiración aristotélica. Pero, aparte de un pequeño tratado dedicado a las falacias, la única obra lógica suya que ha sobrevivido es una *Introducción a la Dialéctica* (Εἰσαγωγὴ διαλεκτική) *no* mencionada en su catálogo. Fue publicada en 1844, pocos años después de descubierta en un monasterio del Monte Athos, y Prantl creía que no era de Galeno, aunque dicha opinión no goza hoy de aceptación. Comoquiera que sea, la obra reviste gran interés para la historia de la lógica, ya que vemos en ella entremezclarse las dos corrientes clásicas.

Galeno se sirve de la terminología técnica de ambas escuelas, glosándola unas veces y otras no. Así, caracteriza a los modos aristotélicos de la primera figura como indemostrables [9]; y, al comentar ambos vocabularios, da a entender que no importa gran cosa a cuál de ellos recurramos. Acerca de la cuestión de una presunta prioridad natural del silogismo categórico o hipotético, hace notar que Boeto —la undécima cabeza de la escuela peripatética tras de Aristóteles— reconoció la prioridad del hipotético, pero no cree que la disputa sea importante toda vez que debemos

[9] *Institutio Logica*, ed. Kalbfleisch, p. 19.

estudiar por igual uno y otro tipo de silogismos. Su opinión parece ser que cada lógica tiene su propio campo de aplicación. Los silogismos categóricos, en especial los de la primera figura, son requeridos para supervisar el razonamiento de los geómetras, como por ejemplo los cálculos de Eratóstenes acerca del tamaño de la tierra [10], en tanto que los silogismos hipotéticos se necesitan para examinar cuestiones tales como «¿Existe el Destino?», «¿Hay Dioses?», «¿Existe una Providencia?» [11]. La distinción es interesante porque sugiere que todavía en esta época la lógica aristotélica se asociaba a la demostración geométrica, mientras la estoica era asociada al uso de la dialéctica en la resolución de controversias metafísicas.

Los que siguen son otros tantos puntos de interés de este pequeño manual.

En primer lugar, hallamos firmemente establecido el empleo del adjetivo «hipotético» como un término genérico aplicable a los enunciados complejos, ya sean condicionales, disyuntivos o conjuntivos. Galeno parte de suponer que los enunciados disyuntivos debieran, hablando con propiedad, envolver la completa oposición de los miembros disyuntos, pero añade que a veces tropezamos con enunciados de forma disyuntiva en los que no se da aquella oposición, por lo que reciben la denominación de cuasi-disyuntivos (παραδιεζευγμένα) [12]. Asimismo sugiere que un enunciado disyuntivo resulta equivalente a un condicional con antecedente negativo (esto es, que «P o Q» equivaldría a «Si no-P, entonces Q») [13]. En rigor, esta equivalencia reza sólo para el caso de que la disyunción se interprete en un sentido no excluyente. Interpretada en un sentido excluyente, equivaldría a la conjunción de dos condicionales (a saber, «Si no-P, entonces Q» y «Si P, entonces no-Q»).

En segundo lugar, y después de haber expuesto las figuras aristotélicas del silogismo mostrando cómo las argumentaciones en la segunda y la tercera pueden ser reducidas a las de la primera, Galeno prosigue haciendo ver que no hay ni podría haber otras figuras, tal y como él lo habría ya puesto de relieve en sus *Observaciones acerca de la demostración* (actualmente perdidas) [14]. Ello es interesante por acreditar la falsedad de la tradición que atribuye a Galeno la doctrina de una cuarta figura. Pero resulta intrigante averiguar cuándo se introdujo por vez primera esa doctrina y a quién se debe. El estudioso renacentista Zabarella, al comienzo de su obra *De Quarta Syllogismorum Figura,* hace notar que fue atribuida a Galeno por el filósofo árabe Averroes en su comentario a los *Primeros Analíticos I, 8* de Aristóteles, suponiendo que Averroes la encontraría en alguna obra de Galeno perdida en el transcurso de los siglos [15]. Sabemos hoy que la suposición de Zabarella era errónea y, por el modo como Galeno proclama haber probado la imposibilidad de que haya más de tres figuras, estaríamos en situación de concluir que la cuestión había sido cuando menos suscitada por alguien antes que él. Pero es curioso no hallar rastro de nadie que defienda la doctrina de las cuatro figuras hasta fines de la Edad Media.

---

10 Ibid. p. 26.
11 Ibid. p. 32.
12 Ibid. p. 12.
13 Ibid. p. 9.
14 Ibid. p. 26.
15 Averroes retorna a la cuestión en su comentario a los *An. Pr.* I, 23, mencionando de nuevo a Galeno, pero sin añadir ningún detalle más.

Por otra parte, contamos con algunos indicios que nos permiten explicarnos cómo pudo asignársele a Galeno el mérito, o el demérito, de la introducción de una cuarta figura. En los primeros párrafos del escolio «Sobre todas las formas del silogismo», al que nos hemos referido más arriba, leemos lo que sigue:

«Hay tres géneros de silogismo: el categórico, el hipotético y aquel que envuelve una suposición adicional (κατὰ πρόσληψιν). El categórico comprende estos dos géneros: el simple y el compuesto. Dentro del silogismo simple hay de nuevo tres géneros: la primera, la segunda y la tercera figuras. Dentro del silogismo compuesto hay cuatro géneros: la primera, la segunda, la tercera y la cuarta figuras. Aristóteles afirma que hay tres figuras porque tan sólo considera los silogismos simples construidos con tres términos. Galeno, sin embargo, afirma en su *Apodíctico* que hay cuatro porque toma en consideración los silogismos compuestos construidos con cuatro términos, habiendo encontrado muchos de ellos en los diálogos de Platón» [16].

De la explicación subsiguiente parece desprenderse que Galeno numeraba sus figuras según un plan como éste:

Figuras galénicas del silogismo compuesto		*Figuras aristotélicas del silogismo simple*
I	combinando	I y I
II	»	I y II o II y I
III	»	I y III o III y I
IV	»	II y III o III y II

Sería natural pensar entonces que cada silogismo compuesto era considerado como un tipo de argumento en que la conclusión de un silogismo simple aristotélico (que contendría dos de las tres premisas de un silogismo compuesto) sirviera de premisa en un segundo silogismo simple aristotélico (que contendría la tercera premisa del silogismo compuesto). Pero esta hipótesis no concuerda con la advertencia del escoliasta según la cual el esquema de Galeno no permitiría la combinación de II con II o III con III. Como razón para la exclusión de tales combinaciones el escoliasta aduce las reglas generales de la silogística que impiden que se siga ninguna conclusión de dos premisas negativas o dos premisas particulares. Esta explicación seguramente va descaminada, dado que implica que los silogismos simples aristotélicos mencionados en cada par de más arriba han de considerarse como prosilogismos respecto de un tercero y final silogismo aristotélico, cuando lo cierto es que un repertorio de cuatro términos no da manifiestamente abasto para una estructura tan complicada. Pero hemos de admitir que el esquema de Galeno únicamente reconoce en realidad las combinaciones mencionadas en el cuadro precedente, por lo que la única salida que permitiría dar sentido a la caracterización del escoliasta consiste en suponer que Galeno consideraba a cada silogismo compuesto como una combinación de los dos silogismos simples que podrían formarse conjugando la premisa media (esto es, aquella que no contenga al sujeto ni al predicado de la conclusión) primero con la premisa menor y luego con la premisa mayor del argumento en su totalidad o, viceversa, primero con la premisa mayor y luego con la menor. Se trata de un curioso modo de analizar un complejo curso de razonamiento, que desde luego no sería reco-

16 Ammonio, op. cit., Praefatio, p. IX. Este pasaje ha sido estudiado por J. Lukasiewicz en su *Aristotle's Syllogistic*, § 14.

mendable proceder a imitar; pero es fácil imaginar cómo una malinterpretación por parte de algún filósofo árabe con acceso al *Apodíctico* de Galeno pudo haber dado origen a la tradición de una cuarta figura, la «galénica», añadida por aquél a la teoría silogística de Aristóteles.

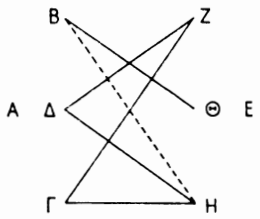
En tercer lugar, Galeno admite hacia el final de su *Introducción a la Dialéctica* la existencia de argumentos que no se ajustan al esquema aristotélico ni al estoico, como por ejemplo «Zeón tiene dos veces más que Dión, y Filón tiene dos veces más que Zeón; luego Filón tiene cuatro veces más que Dión» o «Sofronisco es el padre de Sócrates; luego Sócrates es el hijo de Sofronisco» [17]. Galeno los llama silogismos relacionales (κατὰ τὸ πρός τι), sugiriendo la posibilidad de formular principios generales que permitan garantizar su validez, pero sin haber llegado a poner en práctica el programa de su formulación. Sin duda contaba con ideas, procedentes tal vez de su lectura de Teofrasto o Eudemo, que habrían permitido el desarrollo de una teoría general de las relaciones.

De entre los autores de comienzos del siglo III, Sexto Empírico y Alejandro de Afrodisia merecen especial mención por constituir dos de las fuentes de información más valiosas con que contamos para la lógica griega. Como buen escéptico, Sexto mantuvo una imparcial aversión hacia peripatéticos y estoicos, pero fue lo suficientemente concienzudo como para reproducir con minuciosidad una serie de argumentaciones de una y otra escuela en su intento de mostrar la futilidad de todos sus esfuerzos sistemáticos. Alejandro era partidario de Aristóteles, de cuyas obras constituye el más eminente de los comentaristas antiguos, pero ofició también como un crítico a la vez agudo y honesto de las doctrinas estoicas, juzgando necesario discutir con detalle un cierto número de tesis rivales. De la importancia de los datos acerca de la antigüedad que ambos autores han contribuido a preservar dan testimonio las referencias del último capítulo. Es posible asimismo, aunque no seguro, que Sexto haya ejercido un influjo directo en el desarrollo de la lógica medieval, pues sus *Bosquejos Pirrónicos*, que contienen información acerca de la lógica megárica y estoica, se tradujeron al latín en el período de formación de aquélla y pudieron ser leídos por algunos de sus promotores, aun si nunca alcanzaron una gran difusión. La influencia de Alejandro, por su parte, es segura, aunque indirecta. Sus comentarios constituyeron una mina para los estudiosos posteriores, y algunas de sus enseñanzas arribaron al Occidente latino a través de Boecio u otros intermediarios. Aunque no demasiado importante, tenemos un curioso ejemplo de esa influencia en su comentario a los *Primeros Analíticos I, 28* de Aristóteles.

En el capítulo citado, Aristóteles propone un recurso técnico tendente a procurarnos silogismos que prueben conclusiones correspondientes a cada uno de los cuatro géneros enunciativos. Para probar una conclusión afirmativa universal con dos términos dados, habremos de considerar características que impliquen el predicado y características implicadas por el sujeto de la conclusión propuesta. Para probar una particular afirmativa, consideraremos características que impliquen el predicado y características

17 *Institutio Logica*, ed. Kalbfleisch, p. 38.

que impliquen el sujeto. Para probar una universal negativa, tomaremos en consideración características incompatibles con el predicado y características implicadas por el sujeto o, a la inversa, características implicadas por el predicado y características incompatibles con el sujeto. Y, finalmente, para probar una particular negativa tendremos que considerar características incompatibles con el predicado y características que impliquen el sujeto. Si en los dos grupos de características que nos vemos llevados a considerar para cualquiera de estos casos encontramos un miembro común, podremos construir un silogismo en una u otra de las tres figuras. Por alguna razón que no está clara, Aristóteles asignaba una letra distintiva a cada uno de los seis grupos de características mencionados, lo que sugirió a Alejandro (o tal vez a algún otro estudioso anterior a él) la confección de un diagrama (*διάγραμμα*) en que el enlace deseado entre dos grupos dados de características pudiera ser indicado mediante una línea que una dos de los puntos marcados por letras [18]. El diagrama descrito por Alejandro no aparece en el texto conservado de su obra, pero podría ser fácilmente reconstruido como a continuación se indica:



De acuerdo con la asignación de letras propuesta por Aristóteles, A representaría el predicado de la conclusión, B el grupo de características implicadas por A, Γ el de características que implican A, Δ el de características incompatibles con A, E el sujeto de la conclusión y Z, H y Θ las agrupaciones de características que se relacionan con E de modo análogo a como sus opuestas lo hacían con A. En nuestro gráfico hemos insertado cinco líneas continuas para representar los cinco casos arriba mencionados (dos de ellos se refieren a la prueba de conclusiones universales negativas) y una discontinua para representar el caso (*Baralipton*) en que podría probarse una conclusión particular afirmativa a partir de premisas suficientes para probar la correspondiente universal afirmativa con los términos traspuestos. El diagrama reaparece, incluidos todos los ejemplos de Alejandro, en el comentario del estudioso cristiano del siglo VI Juan Filopón [19], hallándose no sólo recogido en nuestro más antiguo manuscrito griego de los *Primeros Analíticos* sino asimismo en un escolio a una temprana versión latina de esa obra. El manuscrito latino que contiene el escolio data de la segunda mitad del siglo XII, pero la traducción y el propio escolio pudieran bien ser obra de Boecio y remontarse, pues, al siglo VI [20]. En la baja Edad Media este diagrama (acompañado de una serie de versos mnemotécnicos para distinguir las conexiones correctas de las incorrectas) se utilizó

18 Alejandro, *In Aristotelis An. Pr. Lib. I Commentarium*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* II (I), p. 301.
19 Filopón, *In Aristotelis An. Pr. Commentaria*, ed. Wallies, *C.I.A.G.* XIII (II), p. 274.
20 L. Minio-Paluello, "A Latin Commentary (Translated by Boethius?) on the Prior Analytics, and its Greek Sources", *The Journal of Hellenic Studies*, LXXVII, I (1957), pp. 93-102.

frecuentemente en la enseñanza de la silogística, llegando a conocérsele como el *pons asinorum*. Es muy posible que las figuras triangulares que aparecen destinadas en los manuscritos medievales y los primeros libros impresos a explicar los silogismos y su reducción *per impossibile* sean también de antiguo origen, pues se encuentran ya en el manuscrito del siglo XII que acabamos de mencionar, así como en manuscritos del comentario de Juan Filopón [21].

A finales del siglo tercero hemos de mencionar a Porfirio, no sólo por su participación en la transmisión del legado antiguo —de la que tendremos ocasión de decir algo más adelante, cuando hablemos de la obra de Boecio—, sino también por ser la fuente de una malinterpretación de la doctrina aristotélica de los predicables, que produjo no poca confusión en tiempos ulteriores. Aparte ciertos pasajes de las *Categorías* y el *De Interpretatione*, la lógica de Aristóteles se ocupa de las proposiciones generales. Cuando aquél formuló su doctrina de los predicables, estaba tratando de ofrecer un cuadro de las diferentes relaciones que el predicado podría guardar con el sujeto de un enunciado general, esto es, un enunciado acerca de géneros o especies. El predicado —afirmaba— podría constituir la definición del sujeto o una parte de esta última, como el género, o bien podría tratarse de una propiedad o un accidente. Cabría pensar que tales distinciones son menos valiosas de lo que Aristóteles creía, pero al menos es posible encontrarles sentido si se recuerda que Aristóteles hablaba allí de relaciones de un predicado respecto de otro término asimismo general. En su *Eisagogé* (o *Introducción*, a saber, a las *Categorías* y la lógica en general), Porfirio añadió la *species* como uno de los rótulos clasificatorios que requerían explicación. Si se interpreta semejante innovación en el sentido de permitir hablar de predicables en conexión con un sujeto individual hay que decir que se trata de una innovación desafortunada, puesto que nada hay que sea esencial o accidental a un individuo en cuanto tal. Aquí tenemos, sin embargo, el origen de la doctrina medieval de los *quinque voces* (especie, género, diferencia, propiedad y accidente).

En el siglo cuarto, las *Categorías* y el *De Interpretatione* de Aristóteles, junto con la *Eisagogé* de Porfirio, fueron traducidas al latín por Mario Victorino. Este retórico compuso asimismo comentarios al *De Inventione* y los *Topica* de Cicerón y escribió un cierto número de obras personales, como las tituladas *De Definitionibus* y *De Syllogismis Hipotheticis*. De entre ellas únicamente sobreviven el tratado *De Definitionibus* y el comentario al *De Inventione* de Cicerón. Mario Victorino no sólo fue maestro de San Jerónimo y autor influyente en San Agustín, sino un converso al cristianismo a quien se deben algunos tratados teológicos. Todo esto habría de convertirle con posterioridad en una autoridad para el conocimiento del mundo antiguo, y es por esta razón —más bien que por la novedad de sus aportaciones— por lo que ocupa algún lugar en la historia de la lógica.

Entre las obras atribuidas a San Agustín se encuentran el ensayo titulado *Principia Dialecticae* y un pequeño tratado cuyo título reza *Categoriae Decem ex Aristotele Decerptae*. Esta última consiste en una exposición de la doctrina aristotélica debida a algún autor latino que seguía al comentarista

21 Cf. el artículo de Minio-Paluello mencionado en la nota precedente y la edición de Filopón citada con anterioridad, pp. VII y XXXVII.

Temistio, y sólo merece ser citada aquí por el hecho de que su inserción entre las obras del Santo aseguró una gran influencia en los primeros tiempos medievales, en que la difusión de las obras paganas era aún muy escasa, a este apartado de la filosofía de Aristóteles. La primera de ambas obras parece ser, en cambio, auténtica de Agustín, pues contiene un pasaje en que el autor usa su propio nombre a título de ilustración. Se trata, sin embargo, de un ensayo de escasa envergadura, ya que apenas consiste en otra cosa que en una introducción a la *scientia bene disputandi* a través de algunas someras reflexiones sobre las palabras, los pensamientos y las cosas, así como la necesidad de prevenir los equívocos. Lo más interesante del mismo parece ser su empleo del vocablo *dicibile*. A él se dedica la siguiente observación: «Quod dixi, *dicibile*, verbum est, nec tamen verbum sed quod in verbo intelligitur et in animo continetur significat» [22]. Dicha expresión se contrapone, por otra parte, a *dictio* en términos que sugieren que el autor está tratando de traducir la contraposición existente entre los vocablos griegos λεκτόν y λέξις. En cualquier caso, se trata de un pasaje que podría haber estimulado a los lógicos medievales a reelaborar por cuenta propia la teoría estoica de los contenidos proposicionales.

Durante el siglo cuarto, la civilización antigua había iniciado ya su decadencia, y a comienzos del quinto —en plena producción de San Agustín— una considerable extensión del Imperio Romano de Occidente había sido invadida por los bárbaros. Por esa misma época escribió Marciano Capella su obra *De Nuptiis Philologiae et Mercurii*, cuyo libro cuarto se titula *De Arte Dialectica*. Se trata de un tedioso manual escrito en un estilo grandilocuente y pedantesco, pero resulta interesante para nuestros propósitos por reflejar cómo ciertos aspectos de la tradición estoica se hallaban vivos todavía por aquellas fechas. En los versos con que se abre el libro cuarto, Aristóteles y Crisipo son mencionados a una como las dos grandes autoridades en materia de lógica, y en el cuerpo de la obra encontramos una caracterización de los silogismos hipotéticos evidentemente derivada, por vía directa o indirecta, de fuentes estoicas, ya que en ella se hace uso de los numerales *primum* y *secundum* a título de variables proposicionales. Por nuestra parte ya hemos visto cómo la persistencia de ese uso permitía arrojar luz sobre un pasaje controvertido de los *Topica* ciceronianos.

Boecio es el último filósofo de la antigüedad latina que se va a mencionar aquí, pero es de todos el más importante por su influencia en la Edad Media. Fue un cristiano que vivió del año 470 al 524 y escribió copiosamente no sólo sobre lógica, sino también sobre aritmética, música y teología. En la mayor parte de los casos, hubo de contentarse con la compilación de material procedente de manuales y comentarios griegos, pero fue al menos un estudioso erudito y paciente, cuyas obras habrían de convertirse en un valioso almacén de conocimientos para los hombres que intentaron la reconstrucción de la civilización en Occidente tras las Edades Oscuras. Las versiones latinas de las *Categorías* y el *De Interpretatione* fueron, de hecho, los únicos textos de Aristóteles generalmente asequibles a los filósofos de la alta Edad Media. Investigaciones recientes sugieren que las traducciones de los *Primeros Analíticos*, los *Tópicos* y el *De Sophisticis Elenchis*, que le fueron atribuidas en la primera edición impresa de estas

22 *Principia Dialecticae*, 5.

obras, son asimismo auténticas, pero parece en cualquier caso que su circulación no alcanzó gran extensión sino hasta una fecha posterior [23]. Aparte de sus traducciones, el resto de sus obras sobre lógica comprende dos comentarios sobre la *Eisagogé* de Porfirio (uno de ellos basado en la traducción de Mario Victorino, el otro en la suya propia), un comentario sobre las *Categorías* de Aristóteles, dos ediciones de un comentario sobre el *De Interpretatione* de Aristóteles, un tratado *De Syllogismo Categorico*, con una *Introductio ad Syllogismos Categoricos*, un tratado *De Syllogismo Hypothetico*, un tratado *De Divisione*, un comentario a los *Topica* de Cicerón y un tratado *De Differentiis Topicis*.

La obrita *Introductio ad Syllogismos Categoricos* reviste interés por contener el primer testimonio de aquella distinción entre cinco posibles relaciones entre términos generales que apuntábamos en nuestro examen de los *Tópicos* de Aristóteles. Como su nombre indica, el opúsculo de Boecio se ocupa de los preliminares de la silogística, integrándolo material al parecer directamente procedente de los propios escritos de Aristóteles, aunque parte de él podría tal vez haber sido tomado de otra compilación. Aproximadamente al comienzo de la obra, al explicar la distinción entre predicación convertible (*reciproca*) y no convertible, Boecio afirma la imposibilidad de que el término-sujeto de una proposición posea un ámbito de aplicación mayor que el predicado: «Ut vero id quod subiectum est maius possit esse praedicato nulla prorsus enuntitione contingit: ipsa enim natura praedicata minora esse non patitur» [24]. Se trata del supuesto que condujo a Aristóteles a hablar de términos mayor y menor, tal y como lo hizo en su *Primeros Analíticos*. Pero con posterioridad, al discutir los resultados del emplazamiento de signos negativos ante términos proposicionales, Boecio abandona tácitamente el confundente viejo dogma y opera con la siguiente clasificación de los predicados:

1. *quod de subiecto nequeat segregari, ut ab homine rationabilitas;*
2. *quod a subiecto quidem recedere queat sed subiecti naturam non possit aequare, ut homini grammaticus;*
3. *quod numquam subiecto valeat convenire, ut lapis homini;*
4. *quod conveniens a* [*subiecto*] *possit abscedere cum sit maius et universalius subiecto, ut iustitia homini;*
5. *quod et semper* [*subiecto*] *copuletur neque tamen subiectum possit excedere, ut risibile homini* [25].

Los ejemplos son todos ellos aristotélicos, resultando manifiesto que la clasificación está inspirada por la reflexión acerca de la doctrina de los predicables de Aristóteles; mas Boecio no discute su origen y nada hay en el texto que revele quién fue el primero en formularla. Todo lo que cabe decir es que las explicaciones de Boecio y su uso repetido de los cinco mismos ejemplos acredita con suficiente claridad su adhesión a los principios que la inspiran. Respecto del cuarto caso, por ejemplo, escribe: «Item propositio *Omnis homo iustus est* falsa est, cuius sequitur falsitatem *Omnis*

---

23 Minio-Paluello, "Note sull' Aristotele latino medievale", VI, *Rivista di Filosofia neoscolastica*, XLIV (1952), pp. 398-401, y "Les Traductions et les Commentaires aristotéliciens de Boèce", *Studia Patristica*, II (1957), pp. 358-65.

24 *Introd. ad. Syll. Cat.* 768 D. Las referencias remiten a las columnas de la *Patrologia Latina* de Migne, vol. LXIV.

25 Ibid., 779 C - 781 A.

non homo non iustus est. Nam divinis substantiis adest semper iustitia, cum non sit humanitas» [26].

Al referirse a las controversias entre aristotélicos y estoicos, Boecio se inclina en favor de los aristotélicos. Así, en su comentario al *De Interpretatione* afirma que los estoicos se equivocaban en sus ataques a las observaciones de Aristóteles acerca de los futuros contingentes, y sostiene que una proposición relativa al futuro y su contradictoria no necesitan ser ni una ni otra definitivamente (*definite*) verdaderas, aunque la disyunción de ambas lo es [27]. Y en un pasaje ulterior de la misma obra se muestra impaciente en la defensa de la identificación aristotélica entre posibilidad y contingencia contra la tesis estoica de que lo necesario podría ser reputado de posible [28]. En su teoría de la modalidad se declara seguidor de Teofrasto, a quien profesa gran admiración [29], pero en su obra *De Syllogismo Categorico* no hace el menor intento de abordar la caracterización de los silogismos modales, aristotélicos ni teofrásticos.

Las ideas capitales del *De Syllogismo Hipothetico* proceden asimismo de Teofrasto, que es mencionado al comienzo del tratado conjuntamente con Eudemo, e incluso la engorrosa elaboración de las mismas —que a primera vista parece obra del propio Boecio— pudiera haber sido tomada de Porfirio [30]. El tratado se ocupa principalmente de silogismos hipotéticos complejos de formas tales como:

Si est A, est B; si est B, est C; ergo si est A, est C,

reconociendo tres figuras del tipo de las atribuidas a Teofrasto por Alejandro de Afrodisia. La distinción y enumeración de los modos, cuyo mérito recaba Boecio para sí, se efectúa mediante el intercambio reiterado de las formas afirmativa y negativa en las diversas cláusulas de las diversas premisas. Mas todo ello se hace sin recurrir a ejemplos, y no está claro cómo desea Boecio que el lector interprete un esquema del género de *Si est A, est B.* Si la teoría ha de aplicarse a cualquier clase de proposiciones condicionales, las letras en cuestión tendrían que representar signos proposicionales y el verbo *est* habría de entenderse como si su sentido fuera el de «es el caso que». Mas ya que la teoría es de procedencia peripatética, lo más probable es que las letras hayan de representar nombres comunes, como *homo* y *animal,* entendiéndose el *est* como si su sentido fuese el de «es» o «hay».

Existen rastros indudables de influencia estoica al comienzo del *De Syllogismo Hypothetico,* cuando en él se discuten argumentos hipotéticos como el antes citado. Hallamos, así, un ejemplo cuya antigüedad casi seguramente se remonta a los megáricos:

Si dies est, lucet; atqui dies est; lucet igitur [31].

Pero Boecio difícilmente podía tener presente un original estoico cuando afirma que la forma negativa de *Si est A, est B* es *Si est A, non est B* [32], ni

---

26 Ibid.
27 *In Lib. de Int. Ed. Sec.* III, 498 B.
28 Ibid. V, 587 B.
29 Ibid. 585 C.
30 *De Syll. Hyp.* I, 831 D. J. Bidez, "Boèce et Porphyre", *Revue belge de philologie et d'histoire,* II (1923), pp. 189 y ss.
31 *De Syll. Hyp.* I, 833 C.
32 Ibid. 843 D.

tampoco cuando presenta como un esquema válido de razonamiento el siguiente esquema: *Si est A, cum sit B est C; atqui cum sit B, non est C; non est igitur A* [33]. Interpretando, como parece probable, el vocablo *cum* como no más que una variante estilística de *si*, tendríamos en el segundo un error que es consecuencia natural del cometido en el primero de esos casos. Pero sería al menos posible que el segundo argumento resultase aceptable si no se admite una completa ecuación entre las cláusulas *cum sit B* y *si est B*. Pues si, en efecto, se interpreta la cláusula *cum sit B* en su sentido más corriente de «ya que hay una cosa B», el argumento sería realmente válido, aun si un tanto chocante.

Los indemostrables estoicos se hallan conservados por Boecio en su comentario a los *Topica* de Cicerón tal y como aquéllos aparecen en el original, pero haciendo notar que el tercero y el séptimo de los patrones de argumentación enumerados por Cicerón no sirven para mucho [34]. Su versión del tercero incluye entre las dos premisas una frase (*et his alia negatio rursus adiungitur*) que resulta ininteligible en el contexto, pero cabe pensar que fue extraída de una glosa en la que una nueva regla sustituía a la del texto de Marciano Capella. En un pasaje de su comentario, Boecio trata efectivamente de pergeñar, partiendo de las palabras de Cicerón, una regla semejante a la de Marciano Capella, pero encuentra dificultades para hacerla cuadrar con los ejemplos del propio Cicerón. Su versión de la séptima regla ciceroniana, y el comentario que le añade, demuestran que el texto era ya en aquella época defectuoso, tal y como acontece con el texto de la regla correspondiente en nuestros manuscritos de Marciano Capella.

Aunque Beocio es importante sobre todo por su papel de agente transmisor de la cultura clásica a la Edad Media, hay un punto en su tratamiento de los silogismos hipotéticos que pudiera revestir cierta novedad y merece atención en cualquier caso, ya que tal vez esté ahí la base de uno de los más interesantes desarrollos de la lógica medieval. Se trata de un intento de distinción y clarificación de los enunciados condicionales según el tipo de *consequentia* envuelto en ellos [35]. El término *consequentia* utilizado por Boecio constituye presumiblemente una traducción de ἀκολούθησις y ἀκολουθία, términos éstos de los que Aristóteles y los estoicos se sirvieron respectivamente con el sentido de «algo que se sigue de» [36]. Para Boecio, la verdad de un enunciado condicional pudiera no envolver una conexión necesaria sino sólo *secundum accidens*. Ocurriría así especialmente con los condicionales construidos por medio de la conjunción *cum* en vez de *si*, como por ejemplo en el enunciado «Cum ignis calidus sit, coelum rotundum est».

Por otra parte, hay enunciados condicionales que envuelven una *consequentia naturae* y se hallan subdivididos por Boecio tal y como se indica en el pasaje que a continuación sigue:

«Harum quoque duplex modus est, unus cum necesse est consequi ea tamen ipsa consequentia non per terminorum positionem fit, alius vero cum fit consequentia per terminorum positionem. Ac prioris quidem modi exemplum est, ut ita di-

33 Ibid. 815 C.
34 *In Top. Cic. Comm.* V, 1142 C y 1144 D.
35 *De Syll. Hyp.* I, 835 B.
36 Cf. por ejemplo *Analytica Priora*, I, 46 (52b29).

camus: *Cum homo sit, animal est.* Haec enim consequentia inconcussa veritate est subnixa, sed non idcirco animal est quia homo est. Non enim idcirco genus est quia species est, sed fortasse a genere principium ducitur, magisque essentiae causa ex universalibus trahi potest, ut idcirco sit homo quia animal est; causa enim speciei genus est. At qui dicit *Cum homo sit, animal est,* rectam et necessariam consequentiam facit; per terminorum vero positionem talis consequentia non procedit. Sunt autem aliae hypotheticae propositiones in quibus et consequentia necessaria reperietur et ipsius consequentiae causam terminorum positio facit hoc modo: *Si terrae fuerit obiectus, defectio lunae consequitur.* Haec enim consequentia rata est, et idcirco defectio lunae consequitur quia terrae intervenit obiectus. Istae igitur sunt propositiones certae atque utiles ad demonstrationem.»

En su traducción de los *Primeros Analíticos* aristotélicos, Boecio recurre a la expresión *positio terminorum* para indicar lo que en castellano expresaríamos por «posición de los términos», a saber, el orden en que éstos intervienen en las premisas de un silogismo [37]; y parece que aquí dicha expresión ha de entenderse en un sentido similar, considerando que una *consequentia naturae* se halla establecida *per terminorum positionem* si, y sólo si, el antecedente designa la *causa* o razón de ser de lo expresado por el consecuente. El ejemplo de que Boecio se sirve para ilustrar este punto procede de Aristóteles [38], y sería probable que la fraseología de las *consequentiae* cumpliese así el simple propósito de compendiar la vieja doctrina aristotélica de la auténtica ciencia como conocimiento de las cosas por sus causas. Pero hay que confesar que la expresión *consequentia per terminorum positionem* es bastante curiosa. Quizá Boecio tuviese en su mente el aparato silogístico de los *Segundos Analíticos,* por más que ello no sea estrictamente relevante para el ejemplo tal y como se sirve de él en el pasaje.

Los enunciados condicionales que establecen conexiones necesarias, aunque no siempre *per terminorum positionem,* abundan según Boecio en los *loci* estudiados por Aristóteles y Cicerón. Un *locus* es para Cicerón una *sedes argumenti.* Cuando nosotros formulamos el principio en términos generales, el resultado es una *maxima propositio*:

«Ideo et universales et maximae propositiones loci sunt dictae, quoniam ipsae sunt quae continent ceteras propositiones et per eas fit consequens et rata conclusio. Ac sicut locus in se corporis continet quantitatem, ita hae propositiones quae sunt maximae inter se omnem vim posteriorum atque ipsius conclusionis consequentiam tenent, et uno quidem modo locus, id est sedes argumenti, dicitur maxima principalisque propositio fidem ceteris subministrans.» [39]

El interés que Boecio muestra por los *loci,* e incluso el contenido de su doctrina, procede de la tradición aristotélica y de la enseñanza de las escuelas de retórica, más bien que de un origen estoico. Pero tal vez quepa rastrear algún influjo estoico en su empleo del término *consequentia* para aludir al mismo tiempo a la relación entre una conclusión y sus premisas y a la relación entre el consecuente y el antecedente de un enunciado condicional. Es cierto que Aristóteles hizo uso de la forma condicional de la oración en su expresión de los principios del razonamiento silogístico, pero parece haberlo hecho sin pararse a reflexionar sobre la naturaleza de los enunciados condicionales. Los estoicos, en cambio, identificaron

---

37 *Prior An. Arist. Interp.* I, 35, 676 D.
38 *Analytica Posteriora,* II, 2 (89b36-90a34).
39 *De Diff. Top.* II, 1185 D.

explícitamente la noción de inferencia válida o implicación con la de corrección de un enunciado condicional, y semejante identificación parece subyacer al modo como Boecio trata la *consequentia*. Es incluso posible que lo que dice acerca de la *consequentia secundum accidens* derive de alguna reseña estoica del debate entre los megáricos Filón y Diodoro, por más que la expresión *secundum accidens* comporte una indudable resonancia aristotélica.

Como ya vimos, los estoicos —a diferencia de los peripatéticos— consideraron a la dialéctica como uno de los apartados capitales de la filosofía, mas la trataron en estrecha conexión con su teoría del lenguaje, estudio éste que en la antigüedad posterior habría de asociarse comúnmente a la retórica. No es sorprendente, por lo tanto, que Boecio hable de la conexión entre lógica y lenguaje como de algo universalmente admitido. Mas para comprender las teorías a que daría lugar su obra siglos más tarde es importante reparar en lo que dice al exponer aquella concepción de la lógica.

En su comentario a las *Categorías* de Aristóteles, Boecio escribe *Omnis ars logica de oratione est* en orden a aclarar por qué aquella obra ha de tomarse como punto de partida para el estudio de la lógica y, de este modo, para el de la filosofía en su conjunto [40]. La lógica se ocupa de silogismos, pero los silogismos se componen de proposiciones y las proposiciones de signos simples. Siendo las *Categorías* una clasificación de las cosas que pueden ser significadas por tales signos simples, reúnen por ello títulos suficientes para ocupar el primer lugar en el estudio de la lógica; y, puesto que facilitan una consideración sistemática de los diversos géneros de cosas, revisten asimismo un interés considerable para quienes deseen estudiar luego la filosofía natural de Aristóteles o su filosofía moral. Pues al tratar de los signos inevitablemente tratamos de algún modo de las cosas significadas, aunque lo apropiado es comenzar primero por los signos: «Res enim et rerum significatio iuncta est, sed principalior erit illa disputatio quae de sermonibus est, secundum vero loco illa quae de rerum ratione formatur». Al afirmar que la lógica se ocupa del lenguaje (*oratio*), Boecio no pretende, sin embargo, que aquélla se reduzca a un capítulo de la gramática o de lo que hoy llamaríamos filología. Pues, como se desprende de su segundo comentario al *De Interpretatione* de Aristóteles, emplea la voz *oratio* para verter el griego λόγος, incluyendo bajo ella por lo tanto no sólo las palabras habladas o escritas sino también aquel discurso que se compone de pensamientos (*intellectus*) [41].

Al comienzo de su *De Interpretatione*, Aristóteles había sostenido que las palabras escritas eran signos de las habladas y éstas eran a su vez signos de estados mentales (παθήματα τῆς ψυχῆς) comunes a todos los hombres en tanto que imágenes de las cosas. De acuerdo con Boecio, esta doctrina habría sido desarrollada por los peripatéticos hasta dar lugar a la teoría de los tres géneros de discurso —escrito, oral y mental— a que antes se aludía. Porfirio es mencionado especialmente como uno de los padres de la misma, y el comentario de Porfirio a las *Categorías* (que ha sobrevivido en un único manuscrito griego) contiene de hecho una referencia a aquel discurso del entendimiento (ὁ ἐν τῇ διανοίᾳ λόγος), que tiene lugar incluso

40 *In Cat. Arist.* I, 161 C.
41 *In Lib. de Int. Ed. Sec.* I, 407 B.

cuando permanecemos en silencio [42]. En sí misma considerada, la frase de Porfirio pudiera sólo referirse a la imaginación fónica (*image-speech*) —esto es, a lo que a veces llamaríamos, según el caso, pensar-en-griego o pensar-en-castellano—, pero de las aclaraciones de Boecio se sigue que el discurso mental habría de ser el mismo para hombres de idiomas diferentes, puesto que lo integran estados mentales que en algún sentido constituyen copias de objetos no-mentales y son, por tanto, signos naturales de estos últimos. La existencia de tales signos podría ser fácilmente deducida de la teoría aristotélica del *De Anima* acerca de la capacidad del alma intelectiva para constituirse en recipiente de formas. Pero en sí misma no carece de una cierta plausibilidad, por lo que ha sido retenida en épocas harto más recientes por muchos pensadores que no dudaron en ridiculizar a la psicología aristotélica.

Como escritor latino, Boecio toma usualmente los vocablos del latín escrito como ejemplos de signos, pero sigue a Aristóteles reconociendo que tales signos sólo son significativos en cuanto que se hallan convencionalmente conectados con conceptos que por su parte serán signos naturales:

«Sicut nummus quoque non solum aes impressum quadam figura est ut nummus vocetur sed etiam ut alterius rei sit pretium, eodem quoque modo verba et nomina non solum voces sunt sed positae ad quandam intellectuum significationem. Vox enim quae nihil designat, ut est gargulus, licet eam grammatici figuram vocis intuentes nomen esse contendant, tamen eam nomen philosophia non putarit nisi sit posita ut designaret aliquam animi conceptionem, eoque modo significare aliquid rerum possit.»[43]

Al entrar en detalles acerca de la noción de convención lingüística, hace suya la distinción de Porfirio [44] (quien probablemente la tomó de algún predecesor) entre nombres de primera y segunda imposición (*θέσις*), esto es, entre nombres que designan entidades extralingüísticas y nombres que designan otros nombres: «Est prima positio ut nomina rebus imponerentur, secunda vero ut aliis nominibus ipsa nomina designarentur» [45]. Pero al parecer juzga que el estudio de la segunda imposición es asunto de los gramáticos, pues el empleo de nombres de segunda imposición se destina a la clasificación de los nombres de primera imposición, mientras que el objetivo de las *Categorías* que ahora se consideran es —siguiendo nuevamente a Porfirio en este punto— el tratamiento de los nombres de primera imposición en tanto que funcionan como signos («de vocibus res significantibus in eo quod significantes sunt pertractare»). El cometido de estas observaciones es, evidentemente, permitir la distinción entre la lógica, tal como ésta es entendida por Boecio, y la gramática.

La filosofía aristotélica de la lógica habría ganado en claridad si Aristóteles se hubiese esforzado por precisar con más exactitud lo que deseaba decir acerca de las palabras y lo que deseaba decir acerca de las cosas. Cuando afirma, por ejemplo, que «el individuo hombre existe en la especie hombre y el género de la especie es animal» (*ὁ τὶς ἄνθρωπος ἐν εἴδει μὲν ὑπάρχει τῷ ἀνθρώπῳ, γένος δὲ τοῦ εἴδους ἐστὶ τὸ ζῷον*), parece dar a entender que los hombres singulares ejemplifican la especie humana, la perte-

42 Porfirio, *In Aristotelis Categorias Expositio*, ed. Busse, *C.I.A.G.* IV (I), p. 101.
43 *In Lib. de Int. Ed. Sec.* I, 408 C.
44 Porfirio, op. cit., p. 57.
45 *In Cat. Arist.* I, 159 C.

nencia a la cual viene indicada por medio de la aplicación de la palabra «hombre», y que otro tanto ocurre con el género animal, la pertenencia al cual viene indicada por medio de la aplicación de la palabra «animal». Mas su fraseología también sugiere que admite la existencia de una especie llamada «hombre» y de un género llamado «animal», e incluso llega a caracterizar a hombre y animal como substancias segundas (*δεύτεραι οὖν αὗται λέγονται οὐσίαι, οἷον ὁ ἄνθρωπος καὶ τὸ ζῷον*) [46]. Esta singular manera de expresarse, que fue de uso corriente a todo lo largo de la antigüedad, habría de originar —vía Boecio— todos los quebraderos de cabeza acerca de los universales que tanto conturbaron a los filósofos medievales.

El pasaje más influyente de Boecio a este respecto se halla inscrito al comienzo del comentario a su propia traducción de la *Eisagogé* de Porfirio. Porfirio había afirmado en el inicio de su obra:

> «En cuanto al género y la especie, pido me sea excusado discutir ahora la cuestión de si existen en la realidad o tienen su lugar única y exclusivamente en nuestros pensamientos, y si —en caso de que existan— habrán de ser corpóreos o incorpóreos, separables de las cosas sensibles o incardinados en las mismas y dependientes de ellas. Pues se trata de una cuestión notablemente ardua que requiere de otra investigación más detallada» [47].

Pero Boecio se sentía obligado a ocuparse de esos problemas de un modo que —pensaba— llevase la tranquilidad al ánimo del lector, sin por ello perderse en una digresión demasiado extensa [48]. De acuerdo con su doctrina, los universales subsisten en las cosas sensibles y corpóreas, aunque en sí mismos sean incorpóreos y separables de estas últimas en el pensamiento; pues una *especie* o un *género* no es sino una semejanza entre individuos que la mente puede extraer a partir de éstos, como por ejemplo la *similitudo humanitatis* extraída *ex singulis hominibus*. Este —nos dice— es el punto de vista aristotélico, que cabría aceptar a los efectos de nuestro estudio, sin pretender zanjar definitivamente en contra de Platón la cuestión de si los universales no sólo son pensables aparte de las realidades corpóreas sino también capaces de existir por separado.

Merece la pena destacar que, en su caracterización de los universales, Boecio toma acertadamente *humanitas*, más bien que *homo*, por nombre de la especie. Mas la práctica contraria, seguida por el mismo Boecio en muchos otros lugares, estaba tan extendida que la expresión *Homo est species* seguiría usándose como una frase hecha hasta tanto los hombres continuaron sirviéndose del latín para sus discusiones filosóficas. No es sorprendente, pues, que algunos filósofos modernos, poco propicios a cualquier discusión del problema de los universales, hayan tratado de minimizarlo interpretando toda la doctrina como una ilusión creada por la suposición de que los términos generales son significativos en la misma medida en que lo son los nombres propios. Como vimos, el propio Aristóteles —aun cuando ciertamente trate de dejar bien sentada la diferencia entre ambos géneros de significatividad— se sirve en ocasiones de una jerga que alenta esos malentendidos. En su *De Interpretatione*, por ejemplo, escribe lo siguiente: «Algunas cosas son universales y otras singulares. Llamo universal a aquello que por su naturaleza es susceptible de ser predicado de muchas cosas

---

46 *Categoriae*, 5 (2a16-18).
47 Porfirio, *Isagoge*, ed. Busse, *C.I.A.G.* IV (I), p. 1.
48 *In Porph. Comm.* I, 83 A.

y singular a aquello que no lo es. Así, hombre es universal (ἄνθρωπος μὲν τῶν καθόλου), en tanto Callias es singular» [49]. Si este pasaje hubiera comenzado refiriéndose a palabras en lugar de cosas, podría ser aceptado como una explicación satisfactoria y útil de la diferencia existente entre los vocablos ἄνθρωπος y Καλλίας, pero lo cierto es que pretende presentarse como una caracterización de dos géneros de cosas (πράγματα), dando lugar así al equívoco. En su comentario, Boecio trata de prestar algún sentido a esas afirmaciones suponiendo que, así como el término *homo* de su traducción latina es un modismo filosófico que desempeña el cometido del término *humanitas*, de la misma manera el término *Plato* (que reemplaza al menos familiar *Callias*) sería un modismo filosófico llamado a desempeñar el cometido del término *Platonitas*, esto es, el nombre de una cualidad correctamente predicable del individuo Platón con exclusividad [50]. Es improbable que Aristóteles pensara en nada semejante a este respecto, pero no obstante es fácil imaginar cómo pudieron suscitar sus palabras una interpretación así. En cualquier caso nos hallamos ante el despuntar de otra confusión, que ha contribuido a complicar, no menos endiabladamente que la anterior, la teoría de los universales y singulares. En efecto, en lugar de incurrir en el absurdo de tratar al término *homo* como si sólo difiriera de un nombre propio por el hecho de designar algo general, Boecio adopta el expediente —igualmente extravagante— de tratar al término *Plato* como si sólo difiriera de un nombre común por el hecho de constreñir su aplicación a un individuo, interpretación ésta que también habría de ser seguida por algunos filósofos posteriores.

En la historia de la cultura occidental, la obra de Boecio reviste importancia por haber sido escrita en el ocaso de la antigüedad clásica, antes de que el aluvión de la barbarie se precipitase sobre la refinada ilustración de aquellos siglos. Si deseásemos abandonarnos a la melancolía, podríamos pensar que la distancia que hoy nos separa de él es más o menos la misma que a él le separaba de la guerra de Troya y la destrucción de la cultura minoica. En la historia del pensamiento griego y oriental, las obras de los autores contemporáneos —como Ammonio y el autor del escolio «Sobre todas las formas del silogismo» —carecen de una relevancia comparable a la suya, pues la reelaboración de los viejos temas a que todos ellos se dedicaron por igual fue proseguida en Oriente durante muchos siglos gracias a una ininterrumpida tradición erudita. Ni siquiera cesó por largo tiempo en aquellas zonas del imperio bizantino que cayeron en poder de los árabes; y éstos se convirtieron pronto en estudiosos de la filosofía clásica, que gracias a su labor pudo ser luego parcialmente recobrada en Occidente. Tras de los comentarios griegos de Aristóteles, sus obras habrían de constituir el más prometedor de los filones en orden al ulterior descubrimiento del legado lógico de la antigüedad clásica.

2. De Alcuino a Abelardo *

Cuando la cultura comenzó a revivir a fines del siglo octavo, los textos que hubieron de servir de base para el estudio de la lógica fueron

---

[49] *De Interpretatione*, 7 (17a38 y ss.).

[50] *In Lib. de Int. Ed. Sec.* II, 463 A. Probablemente quepa ver en ello una reminiscencia de la ἰδία ποιότης estoica.

* La práctica observada en nuestra transcripción de los nombres propios de autores citados en ésta y las siguientes secciones del presente capítulo es declaradamente ecléctica. Como en

los escritos más fácilmente asequibles de los autores latinos mencionados en la última sección. Alcuino, que enseñaba en York hacia el año 778, nos informa de que la biblioteca contenía por esas fechas a Aristóteles, Victorino y Boecio [51], mas no sabemos con certeza qué era lo que incluía dicha versión latina de Aristóteles. Hasta el siglo XII, las únicas obras de Aristóteles generalmente disponibles en Occidente fueron las *Categorías* y el *De Interpretatione*. La posesión de tales obras, junto con la *Eisagogé* de Porfirio y los tratados de Boecio, constituía el caso ideal, pues con frecuencia había que componérselas con material procedente de otras fuentes y hasta el propio Marciano Capella rindió algún servicio por aquel entonces. En efecto, los monjes irlandeses, a la cabeza de la cultura de su tiempo, tenían copias de su obra y la reintrodujeron en las escuelas.

El primer tratado medieval de lógica fue la propia *Dialectica* de Alcuino, probablemente redactada para su utilización en el *trivium* (gramática, dialéctica y retórica) que Alcuino restableció como base de la educación cuando fue puesto al frente de la escuela palatina de Carlomagno. Está compuesta en forma de un curioso diálogo entre él mismo y el emperador, a quien se le hace responder a las preguntas de Alcuino como podría hacerlo un niño aplicado de *La familia suiza Robinson*. Las categorías aristotélicas (según la exposición de las pseudoagustinianas *Categoriae Decem*) reciben una atención desproporcionada, mientras que el espacio concedido al estudio de la argumentación resulta muy menguado. No hay, por ejemplo, la menor información acerca de la teoría del silogismo. La obra se empleó mucho en la enseñanza durante un cierto tiempo, para acabar cayendo luego en el olvido conforme fue incrementándose el caudal de conocimientos.

De Juan Escoto Erígena, que vivió aproximadamente del 810 al 877, se dice que fue el primer autor medieval que se sirvió de formas silogísticas de razonamiento, pero quedaba aún tiempo por delante hasta que dicha práctica se convirtiera en general. Para muchos estudiosos, la lógica no era más que una curiosidad encerrada en el depósito literario de la Roma cristiana. Hacia el siglo X, no obstante, las traducciones boecianas de las *Categorías* y el *De Interpretatione* de Aristóteles, así como la *Eisagogé* de Porfirio, comenzaron a circular más ampliamente, y se dice que Gerberto —que enseñó en Reims desde el 972 y murió en 1003 como Papa bajo el nombre de Silvestre II— había asimismo trabajado sobre los *Topica* de Cicerón y los escritos de Victorino y de Boecio. Abón de Fleury y Notker Labeo de St. Gall fueron otros influyentes maestros de este período.

La renovación del interés por la lógica corrió a la par de un creciente interés por la gramática, y el resultado de esta asociación fue a veces desafortunado. En la *Dialectica* de Garland el Computista (esto es, autor de un *computus* o tratado sobre el cálculo de almanaques), posiblemente compuesta en Lieja poco antes del año 1040, los predicables se estudian bajo el encabezamiento *De Vocibus Incomplexis*, diciéndose que ellos mismos son

---

la sección precedente, se continúan castellanizando los nombres latinos o, cuando menos, susceptibles de latinización. Pero, allí donde ésta pudiera resultar excesivamente forzada, se prescinde *a fortiori* de la castellanización del nombre correspondiente. En el próximo capítulo, en que la latinización de los nombres de algunos lógicos renacentistas obedece a un cultismo de la época, se opta sin más por preservarla cuando ello no resulta demasiado excéntrico. *(N. del T.)*

51 *Poema de Pontificibus et Sanctis Ecclesiae Eboracensis*, VV, 1547-9 (ed. Migne, II, 843 C).

voces puesto que cabe predicarlos en las proposiciones [52]. El lector podría creer a primera vista que Garland está hablando de las palabras *genus, species, differentia, proprium* y *accidens*, a menudo llamadas las *quinque voces*, pero la confusión es mucho más profunda que todo eso. En la sección correspondiente a los accidentes, por ejemplo, se dice: «Accidens est quod adest et abest praeter subiecti corruptionem... Quod totum est dicere: illa vox appellatur accidens quae consignificat adventicio modo substantivae voci» [53]. Tal vez una de las raíces del embrollo sea la tendencia de Aristóteles a hablar del hombre como especie y del animal como género, pues Garland afirma en otro lugar: «Ista *Animal est genus* de hac sola voce quae est *animal* agit» [54]. Y más adelante añade esta notable observación:

«Videndum est itaque quod in omni propositione categorica vera affirmativa aut praedicatus et subiectus consignificant (ut hic, *Omnis homo est animal*) aut significatum subiecti consignificat significato praedicati (ut hic, *Species est genus*, id est *Homo est animal*) aut significatum subiecti consignificat praedicato (ut *Species est animal*, id est *Homo est animal*) aut significatum praedicati consignificat subiecto (ut *Homo est genus*, id est *animal*) aut alterum significat alterum, id est praedicatus subiectum (ut hic, *Animal est genus*) vel subiectus praedicatum (ut in ista *Genus est animal*)» [55].

Consignificat quiere decir aquí «significa lo mismo», y *species* se entiende al parecer como un nombre de la palabra *homo*, entendiéndose *genus* como un nombre de la palabra *animal*.

La inocencia con que Garland expone su doctrina, y su omisión de toda referencia en particular a los párrafos iniciales del comentario de Boecio a la *Eisagogé* de Porfirio, parecen dar idea de que por esta época no había surgido aún el gran debate acerca de los universales que habría de enfrentar por cuatro siglos a las escuelas filosóficas. Pero es de presumir que los *moderni* que rechazarían luego la doctrina aristotélica de los universales elaboraron sus tesis en un contexto de discusiones lingüísticas muy semejantes a las que acaban de considerarse en la obra de Garland. Dado que insistieron repetidamente en que un *homo* no podía ser sino una *res discreta* o individuo, parece ser que desconfiaban —con sobrada razón, por lo demás— del enunciado *Homo est species* y deseaban ante todo deshacerse de las erróneas sugerencias platonizantes implicadas en la fraseología de los *antiqui*. Pedro Abelardo (1079-1142) expuso muy hábilmente el planteamiento de la cuestión cuando escribió: «Singuli homines discreti ab invicem... in eo... conveniunt quod homines sunt; non dico *in homine*, cum res nulla sit homo nisi discreta, sed *in esse hominem*. Esse autem hominem non est homo nec res aliqua» [56]. Mas esta irritación justificable frente a la desafortunada jerga de los filósofos antiguos condujo a veces a los modernos a adherir a la absurda tesis del nominalismo, a saber, que las *species* y *genera* —y con ellas todos los *universalia*— no son sino palabras o *flatus vocis*, según se cuenta que sostuvo Roscelino. Ya que algunos dogmas de la Iglesia, en especial la doctrina de la Trinidad, habían sido ex-

---

52 *Dialectica*, ed. L. M. de Rijk (Assen, 1959), p. 3.
53 Ibid. pp. 10-11.
54 Ibid. p. 44.
55 Ibid. p. 115.
56 *Logica Ingredientibus*, p. 19, en *Peter Abaelards Philosophische Schriften*, ed. B. Geyer, *Beiträge zur Geschichte der Philosophie und Theologie des Mittelalters*, XXI (1919-33). Cf. asimismo los pronunciamientos de los *moderni* tal como San Anselmo los recoge en su *De Fide Trinitatis*, cap. II (ed. Migne, 265 A).

puestos en el lenguaje del realismo filosófico, la teoría fue tachada de teológicamente peligrosa y Roscelino fue condenado en 1092, a instancias de San Anselmo, bajo el cargo de triteísmo. También Abelardo fue censurado en 1121, y nuevamente en 1140, por sus opiniones teológicas, si bien su modernismo era considerablemente más sutil que el de Roscelino. Al referirse a estas cuestiones en 1154, Juan de Salisbury constató que tales cuitas tenían todas su origen en la problemática planteada al comienzo de la *Eisagogé* de Porfirio:

«Naturam tamen universalium hic omnes expediunt, et altissimum negotium et maioris inquisitionis contra mentem auctoris explicare nituntur. Alius ergo consistit in vocibus, licet haec opinio cum Rocelino suo fere iam evanuerit. Alius sermones intuetur et ad illos detorquet quicquid alicubi de universalibus meminit scriptum. In hac autem opinione deprehensus est Peripateticus Palatinus Abaelardus noster, qui multos reliquit et adhuc quidem aliquos habet professionis huius sectatores... Rem de re praedicari monstrum ducunt, licet Aristoteles monstruositatis huius auctor sit» [57].

Lejos de menguar, como Juan de Salisbury parecía haber esperado, el partido de los *moderni* engrosó considerablemente sus filas en los siglos siguientes a Abelardo, por lo que más adelante tendremos ocasión de reseñar sus aportaciones. Pero lo que por el momento nos interesa consignar es el nuevo espíritu de confianza en sí mismos que por aquellas fechas comenzaba a inspirar a los filósofos. Juan de Salisbury nos relata, por ejemplo, cómo un tal Guillermo de Soissons, a quien había enseñado los rudimentos de la lógica, «fabricó luego un ingenio destinado, al decir de sus partidarios, a conquistar la ciudadela de la vieja lógica, produciendo insólitas sartas de argumentos y demoliendo las concepciones de los antiguos» («ad expugnandam, ut aiunt sui, logicae vetustatem et consequentias inopinabiles construendas et antiquorum sententias diruendas machinam postmodum fecit») [58]. Recientemente se ha creído ver en esto una anticipación de la primera máquina lógica de Jevons, pero lo más seguro es que el invento consistiera en el descubrimiento de algún nuevo patrón de argumentación que sus entusiastas compararon a un ariete u otra maquinaria de asedio, más o menos como hoy podríamos comparar este o aquel procedimiento de controversia intelectual a una trituradora o un apisonador. No sabemos cuál fuese exactamente su funcionamiento; mas, por lo visto, permitía demostrar —aunque no a la satisfacción de Juan de Salisbury— que de una imposibilidad se sigue toda suerte de imposibilidades, así como argüir contra Aristóteles que una misma consecuencia podía seguirse de hipótesis contradictorias («idem esse ex contradictione, cum Aristoteles obloquatur»). Como veremos, la primera de estas tesis fue también sustentada por su contemporáneo Abelardo; y, en cuanto a la segunda, alcanzaría general aceptación tiempo después.

Tan grande fue el espíritu de aventura intelectual de fines del siglo once y comienzos del doce, que el mismísimo San Anselmo —que describía a los *moderni* como herejes de la dialéctica y sostuvo que habían de ser aventados (*exsufflandi*) de las discusiones acerca de cuestiones espirituales [59]— introdujo en su propia teología una de las más célebres herejías dialécticas de la historia. Pues, en efecto, trató en su *Proslogion* de demos-

[57] *Metalogicon*, II, 17 (ed. Migne, 847 B).
[58] Ibid. II, 10 (ed. Migne, 868 C).
[59] *De Fide Trinitatis Contra Blasphemias Ruzelini sive Roscelini*, 2 (ed. Migne, 265 A).

trar la existencia de Dios mediante un argumento (llamado luego ontológico) en el que la existencia se interpretaba como un atributo que añadir al repertorio de perfecciones de la cosa que decimos existe. Dios —afirma— podría ser definido como aquello mayor que lo cual nada puede pensarse y, de acuerdo con tal definición, sería tan cierto que existe que no cabría siquiera pensar su inexistencia:

«Nam potest cogitari esse aliquid quod non possit cogitari non esse, quod maius est quam quod non esse cogitari potest. Quare si id quo maius nequit cogitari potest cogitari non esse, id ipsum quo maius cogitari nequit non est id quo maius cogitari nequit; quod convenire non potest. Sic ergo vere est aliquid quo maius cogitari non potest ut nec cogitari possit non esse» [60].

Hasta donde nos es dado saber, este intento de demostración de la existencia de Dios a partir del descubrimiento de una contradicción en la suposición de que no existe es creación personal de San Anselmo. Pero en otro argumento, que Anselmo nos presenta en su *Monologion*, pueden rastrearse huellas inequívocas de la lógica estoica, que haría tal vez llegar su influencia a través de San Agustín:

«Denique si veritas habuit principium vel habebit finem, antequam ipsa inciperet verum erat tunc quia non erat veritas, et postquam finita erit verum erit tunc quia non erit veritas. Atqui verum non potest esse sine veritate. Erat igitur veritas antequam esset veritas, et erit veritas postquam finita erit veritas, quod inconvenientissimum est. Sive igitur dicatur veritas habere sive intelligatur non habere principium vel finem, nullo claudi potest veritas principio vel fine. Quare idem sequitur de summa natura, quia ipsa summa veritas est» [61].

Probablemente era este argumento (que responde al modelo de la que más tarde vendría a llamarse *consequentia mirabilis*) el que Sto. Tomás tenía en la mente cuando, en su *De Veritate*, concedía a un oponente la posibilidad de argumentar:

«Omne illud cuius esse sequitur ad destructionem sui esse est aeternum, quia sive ponatur esse sive ponatur non esse sequitur quod erit, et oportet secundum unumquodque tempus ponere de unoquoque quod sit vel quod non sit. Sed ad destructionem veritatis sequitur veritatem esse, quia, si veritas non est, veritatem non esse est verum, et nihil potest verum nisi veritate. Ergo veritas est aeterna." [62]

La primera mitad del siglo XII fue la época en que la filosofía medieval cobró la fisonomía que habría de retener hasta el Renacimiento, y una de las mayores contribuciones a la génesis de dicha tradición vino representada por la obra de Abelardo *Sic et Non*. En ella se procede a citar una serie de opiniones de autoridades en conflicto sobre cuestiones de teología, no —como algún racionalista de nuestros días pudiera pensar— con el ánimo de desacreditar a aquélla última, sino más bien con la satisfacción de poder ejercitar la razón humana en materias de tan trascendental importancia. Las obras de autores posteriores tenidos como paradigmas de ortodoxia, cual es el caso de Sto. Tomás de Aquino, persisten en el uso de aquel procedimiento. El estudio de la filosofía, la teología e incluso la jurisprudencia se desenvolverá siempre al hilo, por lo tanto, de un examen de esas *quaestiones*. Al comienzo de cada *quaestio*, las opi-

60 *Proslogion*, 3.
61 *Monologion*, 18. Cf. *De Veritate*, I.
62 *De Veritate*, q. I, art. 5 (2).

niones contrapuestas —o que parecen serlo— se enumeran una tras otra, demostrando luego el maestro su destreza en la provisión de precisas distinciones sobre el significado de las mismas hasta lograr la solución del problema y la desaparición de todas las dificultades. En las universidades, que por primera vez surgieron a lo largo del siglo XII, hasta los estudiantes tenían que adiestrarse en tales debates, pues sus exámenes consistían en disputas en que los candidatos habían de demostrar su capacidad de proseguir la tarea de sus maestros. Puesto que las conclusiones extraídas en sus discusiones por los escolares medievales habían de conformarse a la Revelación, su actividad no podría reputarse de dialéctica en el mismo sentido que los griegos acordaban a ese ejercicio. Pero el empleo de dicho rótulo no carece, con todo, de justificación, ya que lo que se pretendía era llegar a la verdad por medio de una discusión que pusiera de manifiesto las consecuencias inaceptables de una serie de puntos de vista sometidos a litigio. Por lo demás, no cabe duda alguna del entusiasmo suscitado en la Edad Media por este método. Abelardo llamaba a la dialéctica *dux universae doctrinae* [63], y era su confianza en la razón —más bien que tal o cual doctrina herética en particular— lo que infundía a las multitudes que acudían a escucharle. Críticos hubo que alegaban que el cristianismo nada tenía que ver con la cultura secular, haciendo de la lógica en particular el blanco de sus ataques, pero esta actitud sectaria no llegó a prevalecer. Por el contrario, la organización de las universidades descansa en el supuesto de que —para expresarlo con palabras de Abelardo— *veritas veritati non est adversa* [64].

Abelardo compuso cuatro obras sobre lógica: (1) *Introductiones Parvulorum* [65], integrada por cuatro glosas a la *Eisagogé* de Porfirio y las *Categorías* y el *De Interpretatione* de Aristóteles; (2) *Logica Ingredientibus* [66] (así llamada por ser *ingredientibus* la primera palabra del texto), que se compone de más extensas glosas a los textos comentados en la obra anterior, así como al tratado *De Differentiis Topicis* de Boecio, y fue probablemente escrita cuando Abelardo enseñaba en París antes del 1120; (3) *Logica Nostrorum Petitioni* (también llamada así por ser *nostrorum petitioni* las primeras palabras de su texto), que amplía las glosas a la *Eisagogé* y podría fecharse durante el período de enseñanza en la ermita del Paráclito; (4) *Dialectica* [67], que se presenta como una obra independiente y abarca las materias tratadas en los escritos lógicos de Boecio y el *De Definitionibus* de Victorino. Esta última obra parece dar cabida a materiales de diferentes etapas de la vida de Abelardo, siendo probable que no alcanzara su forma definitiva sino tardíamente, acaso durante su estancia en Cluny poco antes de su muerte. Junto con la *Logica Ingredientibus*, se trata de la más valiosa de las cuatro obras mencionadas. Aunque basado, como la *Dialectica* de Garland, en la obra de Boecio y afectado de la prolijidad común a todos

63 *Dialectica*, ed. L. M. de Rijk, p. 470.
64 Ibid. p. 469.
65 Editadas por M. Dal Pra bajo el título de *Pietro Abelardo, Scritti Filosofici, Editio super Porphyrium*, etc. (Milán, 1954). La denominación arriba asignada es aquella mediante la que el propio Abelardo se refiere a la obra en su *Dialectica*, p. 329.
66 Editada, conjuntamente con la obra que sigue en nuestra lista, por B. Geyer en *Peter Abaelard's Philosophische Schriften, Beiträge zur Geschichte der Philosophie und Theologie des Mittelalters*, XXI (1919-33). El final del comentario al *De Interpretatione* en la edición de Geyer no parece deberse a Abelardo, pero el propio texto de Abelardo ha sido restaurado a partir de otro manuscrito por L. Minio-Paluello en *Abaelardiana Inedita, Twelfth Century Logic, Texts and Studies*, II (Roma, 1958).
67 Editada por L. M. De Rijk (Assen, 1956).

los autores medievales, es un texto notablemente original y tuvo decisiva relevancia para el desarrollo de la lógica en la Edad Media. La mente de Abelardo fue la más aguda (aunque no en todos los aspectos la más completa) de cuantas por espacio de más de mil años se ocuparon de la lógica, aproximándose a su tarea en la convicción de que aún era posible realizar nuevos descubrimientos en la materia: «Non enim tanta fuit antiquorum scriptorum perfectio ut non et nostro doctrina indigeat studio, nec tantum in nobis mortalibus scientia potest crescere ut non ultra possit augmentum recipere» [68]. La *Dialectica* de Abelardo ha llegado a nosotros en un único manuscrito falto de las secciones iniciales. Fragmentos seleccionados de la misma fueron publicados por Victor Cousin, en 1836, en sus *Ouvrages inédits d'Abélard*. Mas por desgracia el texto íntegro no se imprimió hasta 1956, por lo que antes de esa fecha no fue posible calibrar la magnitud de la contribución de Abelardo al cuerpo de las doctrinas que hoy día consideramos característicamente medievales. En lo que sigue vamos a examinar el contenido de esta obra, mencionando no sólo las principales aportaciones de la misma sino también algunas de las doctrinas de Boecio a las que Abelardo supo dar nueva vida.

El texto se halla dividido en cinco *tractatus* que corresponden a la agrupación de las obras de Boecio y ostentan los siguientes títulos: I *Liber Partium*, II *De Categoricis*, III *Topica*, IV *De Hypotheticis* y V *De Divisionibus et Definitionibus*. El primero de ellos se subdvide en tres *volumina*, que respectivamente versan sobre los *antepraedicamenta* (o *quinque voces* de Porfirio), los *praedicamenta* (o categorías de Aristóteles) y los *postpraedicamenta* (o cuestiones acerca del significado suscitadas en el *De Interpretatione*) [69]; pero al único manuscrito conservado le falta la totalidad del primer *volumen* y el comienzo del segundo. Este hecho es tanto más de lamentar cuanto que la parte perdida contenía probablemente las últimas posiciones de Abelardo en relación con el problema de los universales. Asimismo se puede asegurar que contenía una caracterización de la distinción entre términos de primera y segunda imposición, mencionada por Boecio en su comentario a las *Categorías* y dada más adelante por establecida por el propio Abelardo [70].

En los fragmentos que han llegado hasta nosotros del tratamiento abelardiano de las *Categorías*, la cantidad es objeto de un examen más detallado que cualquiera de los restantes apartados; y dicho examen incluye una sección sobre la *oratio*, o lenguaje, que Aristóteles había caracterizado como un proceso que discurre en el tiempo. El interés por ella de Abelardo obedecía, naturalmente, a su creencia de que la lógica ha de ocuparse de la *oratio* en tanto que vehículo del razonamiento. En la sección se llega a la conclusión de que, ya que una expresión oral se considera conclusa y no subsiste por más tiempo una vez que ha sido dado a conocer su significado completo, su significatividad no puede constituir una propiedad o una forma que le pertenezca por derecho propio, sino tendrá que consistir sencillamente en el hecho de haber dado lugar a un pensa-

---

[68] *Dialectica*, p. 535.

[69] Con posterioridad, el rótulo de *antepraedicamenta* vendría a hacerse corresponder —con mayor propiedad— a las materias tratadas por Aristóteles en sus *Categorías*, 1-3 (i. e., nominación unívoca y equívoca, expresiones simples y complejas, etcétera), correspondiendo el de *postpraedicamenta* a las materias tratadas en las *Categorías*, 10-15 (i. e., clases de oposición, géneros de prioridad, etc.).

[70] *Dialectica*, p. 122.

miento. A este respecto, sin embargo, Abelardo apunta que la palabra *oratio* podría aplicarse a otras cosas que las meras expresiones verbales, y menciona la vieja doctrina de los tres tipos de lenguaje o discurso, escrito, hablado y mental.

La tercera parte del primer *tractatus* y los dos primeros libros del segundo (*De Partibus Categoricarum* y *De Specierum Differentiis Categoricarum*) podrían ser agrupados formando un solo cuerpo, puesto que se ocupan de los contenidos del *De Interpretatione* y la teoría de las proposiciones presupuesta en la doctrina del silogismo categórico. Abelardo define la *propositio* (esto es, el signo proposicional) como *oratio verumfalsumve significans* [71]. La fórmula deriva obviamente, con algunas ligeras modificaciones de expresión, de la definición de *enuntiatio* ofrecida por Boecio en diversos pasajes de sus obras [72]. Pero Abelardo, a diferencia de Boecio, se muestra consciente de una interesante implicación de semejante definición, a saber, que la verdad y la falsedad corresponden primariamente a los contenidos significados por los signos proposicionales. Por descontado, nada le impide hablar de las proposiciones mismas (esto es, los signos proposicionales) como verdaderas o falsas, y hasta reconocerlas susceptibles de cambiar su verdad en falsedad o viceversa de acuerdo con las circunstancias [73]. Mas sostiene que, al calificar de verdadera a una proposición, tenemos que aludir o bien al hecho de dar lugar a un pensamiento o bien al hecho de exponer lo que es el caso (*id quod in re est*), añadiendo que —de ambas— la segunda noción es la fundamental. Pues aunque, en efecto, pueda decirse que los signos significan en dos sentidos diferentes, el uno concerniente a pensamientos y el otro a cosas, lo que nos interesa de las proposiciones cuando nos ocupamos de ellas en la lógica es su capacidad para significar aquellas últimas, esto es, la significación de este o aquel estado de cosas. Así, cuando decimos por ejemplo que una proposición implica otra, lo que queremos decir no es que el pensamiento envuelto en la primera sea imposible sin el pensamiento envuelto en la segunda, puesto que el uno podría darse fácilmente sin que concurra el otro: «Cum enim dicimus *Si est homo est animal*, si ad intellectus propositionum consecutionem referamus, ut videlicet de ipsis intellectibus agamus, nulla est consequentiae veritas, cum scilicet alter intellectum sine altero omnino subsistat» [74]. Está claro, por tanto, que en la definición de la proposición «*verum* et *falsum* nomina sunt earum existentiarum rerum quas ipsae propositiones loquuntur» [75]. Y este es el sentido de la misma que tenemos presente cuando decimos, por ejemplo, *Socratem currere verum est*, pues el acusativo y el infinitivo de la oración subordinada oficiarían aquí como un nombre de lo expresado por los correspondientes nominativo e indicativo en régimen de oración principal (*quasi nomen illius quod propositione exprimitur*) [76]. En la terminología de la *Logica Ingredientibus*, dichas palabras se referirían al *dictum* de la proposición en cuestión [77].

Esta reflexiones conducen a Abelardo a la cuestión «utrum illae existentiae rerum quas propositiones loquuntur sint aliquae de rebus existenti-

71 Ibid. p. 153.
72 *In lib. de Int. Ed. Sec.* II, 451 D; *De Diff. Top.* I, 1174 B.
73 *Dialectica*, p. 53.
74 Ibid. p. 154.
75 Ibid. p. 156.
76 Ibid. p. 150.
77 *Logica Ingredientibus* (ed. Geyer), p. 275.

bus», concluyendo que lo que una proposición expresa no puede reducirse a una cosa existente puesto que es la existencia misma de la cosa o, por lo menos, el modo como ésta se relaciona con otras cosas:

«Esse autem rem aliquam vel non esse nulla est omnino rerum essentia. Non itaque propositiones res aliquas designant simpliciter quemadmodum nomina, immo qualiter sese ad vicem habent, utrum scilicet sibi conveniant annon, proponunt; ac tunc quidem verae sunt cum ita in re est sicut enuntiant, tunc autem falsae cum non est in re ita. Et est profecto ita in re sicut dicit vera propositio, sed non est res aliqua quod dicit. Unde quasi quidam rerum modus habendi se per propositiones exprimitur, non res aliquae designantur» [78].

Como podía esperarse, hay una estrecha semejanza entre esta caracterización de los contenidos proposicionales y la posición de Abelardo acerca de los universales expuesta más arriba. Aquello que todos los hombres poseen en común es el ser-un-hombre, y esto no es una cosa del tipo de las indicadas por palabras como *Socrates* y *homo*. De modo semejante, lo significado mediante la expresión *Socrates est homo* es el ser-un-hombre-de-Sócrates, que de nuevo tampoco es una cosa (*res*) según Abelardo, por más que presumiblemente sea algo (*aliquid*) en el sentido en que para él una palabra podría aplicarse incluso a un objeto de pensamiento inexistente [79]. En cada uno de ambos casos, el verbo «ser» apunta a la entidad abstracta sometida a consideración, razón por la que semejante *verbum substantivum* —como fue llamado por los gramáticos latinos que traducían a sus predecesores griegos— merece ser objeto de especial atención.

En su *De Interpretatione* [80], Aristóteles afirma que un enunciado se compone de un nombre y un verbo, pero también observa de pasada que un verbo como «pasea» podría ser reemplazado por la expresión compleja «es paseante»; y en su teoría del silogismo está bien claro que se parte de suponer que todas las proposiciones generales contienen dos términos de la misma naturaleza, esto es, capaz cada uno de actuar indistintamente ya sea como sujeto, ya sea como predicado. Sobre la base de estas indicaciones, Abelardo interpreta al verbo «ser» como la *copula* o enlace entre el sujeto y el predicado de una proposición categórica [81]. Admite, desde luego, la posibilidad de enunciados en los que no se haga uso de tal verbo, pero añade que el resto de los verbos podrían analizarse a la manera aristotélica, arguyendo que el rasgo distintivo de los verbos respecto de los nombres no es —como Aristóteles decía— la connotación de un tiempo, sino más bien el hecho de efectuar la conexión (*copulatio*) requerida para que pueda constituirse una proposición [82]. Cuandoquiera que el verbo *est* aparece como *tertium adiacens*, como en la proposición *Socrates est homo*, se trata simplemente de un enlace entre dos términos expresamente formulados. Pero también pudiera aparecer *appositum subiecto* o sin un predicado explícito, como en *Socrates est*, en cuyo caso hay que entenderlo como una abreviatura de *est ens* [83].

La precedente descripción de los dos usos del verbo *est* implica, por lo pronto, que cuando el verbo *est* oficia como una simple *copula* no comporta

78 *Dialectica*, p. 160.
79 Ibid. p. 137.
80 *De Interpretatione*, 12 (21b9-10).
81 *Dialectica*, p. 161.
82 Ibid. p. 123.
83 Ibid. pp. 161-2.

para Abelardo predicación alguna de existencia. Pues, si lo hiciera así, la proposición *Socrates est ens* habría de resolverse en *Socrates est ens ens*, y así *ad infinitum*, mientras que la proposición *Chimaera est opinabilis* (donde *opinabilis* quiere decir «imaginaria») sería obviamente falsa [84]. En su uso originario, el verbo se aplicaba únicamente a cosas existentes [85] y de este modo no surgían dificultades. Mas cuando tropezamos con su presencia en proposiciones tales como *Chimaera est opinabilis*, habría que decir que nos hallamos ante una *locutio* que es *impropria* en la misma medida en que lo pueda ser una expresión que contenga una *oppositio in adiecto*. Pues así como el uso de la expresión «hombre muerto» podría incorrectamente sugerir que estamos hablando acerca de un hombre inexistente, de la misma manera el uso de la proposición *Chimaera est opinabilis* podría incorrectamente sugerir que estamos obligándonos a admitir la verdad de la proposición *Chimaera est*. En uno y otro caso, la dificultad surge de intentar considerar aisladamente expresiones que no están destinadas a semejante consideración independiente [86]. Según Abelardo nos informa, uno de sus maestros (posiblemente Guillermo de Champeaux) sostenía que *Chimaera est opinabilis* constituye una *figurativa atque impropria locutio*, ya que su construcción sugiere impropiamente la atribución de una determinada propiedad a una quimera inexistente cuando lo cierto es que su auténtico sentido viene dado por la más compleja proposición *Anima alicuius opinionem habet de chimaera* [87]. Abelardo no rechaza del todo tal solución a la cuestión, pero insiste en que el problema podría resolverse de una manera más sencilla proscribiendo la interpretación de la cópula como un signo de existencia: «Nec quidem, quantum ad eius interpretationem pertinet, ex eo quod dicitur *Petrus est homo* inferri potest *Petrus est*, sed fortasse quantum ad praedicationem *hominis*, quod existentis rei tantum nomen est» [88].

A Abelardo se le atribuye usualmente la introducción del término *copula* en el vocabulario técnico de la lógica, pero de lo que él mismo cuenta se desprende que ya antes había habido discusiones acerca del papel del verbo «ser» en las proposiciones categóricas. Así, ciertos filósofos habían sostenido que aquel verbo expresa una relación de inherencia entre el predicado y el sujeto. Como es obvio, dicha tesis venía asociada comúnmente a una interpretación de los universales que a Abelardo le displacía, e incluso en ocasiones era objeto de bárbaras formulaciones en que los términos generales se interpretaban como si fueran nombres propios de universales. Así, quienes no sentían reparos en decir *Homo est species*, tampoco lo sentían en decir *Homo inhaeret Socrati* más bien que *Humanitas inhaeret* (o *inest*) *Socrati*. Abelardo no rechaza totalmente la interpretación en términos de inherencia, pero insiste en su inutilidad para explicar el significado del verbo «ser» y arguye que, llevada a sus últimas consecuencias, conduciría al absurdo, en especial al absurdo de una regresión infinita:

«Si per *esse* inhaerentiam necesse sit attribui, et cum dicitur *Inhaerentia est inhaerentia* inhaerentiam quoque in inhaerentia per verbum copulamus, in adiacentia scilicet sicut in aliis propositionibus. Si enim in essentia attribueretur per verbum

[84] Ibid. pp. 137, 162.
[85] Ibid. p. 137.
[86] Ibid. p. 138.
[87] Ibid. p. 136.
[88] Ibid. p. 137.

inhaerentia inhaerentiae, superflue subderetur post verbum nomen *inhaerentiae*. Quodsi per *est* verbum inhaerentia secundum adiacentiam attribuatur inhaerentiae, et rursus cum de illa quae attribuitur vere dicitur quia est inhaerentia, in ipsa quoque rursus inhaerentiam oportet esse, ita ut in infinitum ratio procedat» [89].

En oposición a todo ello, Abelardo recalca que el *est* es un enlace intransitivo, esto es, un enlace mediante el que algo se relaciona sólo consigo mismo: «Oportet autem praedicatum subiecto intransitive copulari, ut videlicet in eadem re ipsius impositio in subiecto inveniatur; veluti cum dicitur *Homo est animal*... et *homo* et *animal*... eiusdem nomina esse oportet» [90]. Para decirlo en dos palabras, interpreta la cópula como un signo de identidad.

Contra lo que cabría haber esperado, este análisis de los usos del verbo «ser» no ayuda mucho a esclarecer sus doctrinas de los universales y los contenidos proposicionales ni es fácil de reconciliar con lo que más adelante va a decirnos acerca del alcance existencial de las proposiciones categóricas. Pese a toda su perspicacia y sutileza, Abelardo no parece haber llegado a apreciar la extraordinaria importancia de la diferencia que existe entre referirse a un individuo mediante un nombre propio o un demostrativo y caracterizarlo mediante un término general o una cláusula descriptiva, por más que sea capaz naturalmente de manejar aquella distinción en el discurso ordinario e incluso hablar con agudeza acerca de ella cuando no está enfrascado en la controvertida problemática para cuya resolución es esencial. La influencia de sus puntos de vista fue, sin embargo, muy considerable, y muchos de sus sucesores aceptaron —aun no estando de acuerdo con su interpretación de los universales— su doctrina de que una proposición categórica afirmativa es verdadera si, y sólo si, el término-sujeto y el término-predicado representan la misma cosa o cosas. De esta doctrina habría de surgir, en los siglos siguientes, la teoría de la *suppositio terminorum*, esto es, la teoría de los diversos modos en que los términos pueden representar o «suplir por» * las cosas en el seno de una proposición.

Ya que más tarde habremos de ocuparnos de los tratados *De Proprietatibus Terminorum*, en los cuales es presentada la teoría de la *suppositio*, una detallada discusión de la misma estaría ahora fuera de lugar. Tal vez sea útil, sin embargo, tomar nota de algunas tesis de Abelardo que han de reaparecer más adelante, cuando estudiemos la teoría en sus fases más evolucionadas. Tenemos, en primer lugar, la observación de que los verbos —a diferencia de los nombres— pueden enlazar directamente con los sujetos. En tiempos posteriores, la *copulatio* que Abelardo menciona a este respecto fue reconocida como una de las *proprietates terminorum*, junto con la *significatio*, la *suppositio* y la *appellatio*. Es cierto que ni el término *suppositio* ni el término *appellatio* aparecen en la *Dialectica* con el sentido técnico que luego adquirirían, mas la expresión *proprietates terminorum* guarda una estrecha semejanza con la expresión *proprietates nominum iuxta significationem* que Abelardo utiliza en una discusión acerca

---

89 Ibid. pp. 158-59.
90 Ibid. p. 166.
* La versión del verbo latino *supponere* por "suplir por" cuenta con algún que otro precedente en traducciones castellanas de autores escolásticos y resulta generalmente adecuada para darnos idea del uso de aquel verbo en el contexto de la lógica medieval. (Para una excepción a dicha regla general, véanse las págs. 230 y ss., especialmente 235-240.) *(N. del T.)*

de las peculiaridades gramaticales de los nombres [91] En segundo lugar, Abelardo repara en que los términos-sujetos representan primariamente cosas existentes en el momento de hablar, por lo que arguye que las proposiciones de pasado y de futuro no admiten ser convertidas de una manera tan sencilla como las de presente. Cuando Sócrates sea viejo, podrá decirse con verdad «Sócrates fue un muchacho» mas no «Un muchacho fue Sócrates». Si deseamos obtener la conversa de la primera proposición, tendremos que incluir en el predicado la indicación del tiempo de pasado antes de proceder a la inversión del orden de los términos, de suerte que ésta arroje «Algo que fue un muchacho es Sócrates» [92]. Problemas de este género desempeñarían luego un papel prominente en los debates acerca de la *suppositio*. En tercer lugar, y al explicar su noción de la *copula* como un enlace intransitivo, Abelardo se opone a las afirmaciones de algunos gramáticos según los cuales una proposición como *Homo est nomen* envuelve una construcción transitiva (*transitivam grammaticam*) por referirse al tiempo a un signo y a lo que éste significa. El término-sujeto *homo* —concede Abelardo— es aquí un nombre de sí propio, mas la admisión de este hecho no le obliga a abandonar su caracterización del funcionamiento de la *copula*; pues, comoquiera que sea, seguirá siendo verdadero que los términos sujeto y predicado representan lo mismo, a saber, la palabra que oficia de sujeto: «Quodsi vox subiecta se ipsam nominat ac rursus praedicata ipsa nominatur, profecto praedicata vox et subiecta in eadem re conveniunt atque hoc modo consignificant» [93]. Este texto parece contener el embrión de lo que luego habría de convertirse en la doctrina de la *suppositio materialis*.

Tras haber tratado de los términos y la *copula*, Abelardo se excusa de tratar el cuadrado de la oposición y las reglas de la conversión, de las que se ha ocupado por extenso en sus *Introductiones Parvulorum;* pero declara su intención de someter a una investigación más minuciosa ciertas cuestiones acerca de la negación. El detalle que más especialmente le interesa es la diferencia de sentido que pudiera resultar de modificar la posición del signo de negación, como acontecería por ejemplo entre *Non quidam homo est iustus* y *Quidam homo non est iustus*. La tesis que, en particular, desea hacer suya es que la manera apropiada de negar una proposición, ya sea categórica o hipotética, consiste en aplicar el signo de negación a la totalidad de la proposición: «Manifestum est autem ex suprapositis omni affirmationi eam in contradictionem recte opponi negationem tamquam propriam dividentem quae negatione praeposita totam eius sententiam perimit» [94].

Se trata, como vemos, de la doctrina oficial estoica, si bien Abelardo parece haber llegado a ella por cuenta propia. A continuación, extrae de ahí una conclusión un tanto sorprendente, que se halla en desacuerdo con la caracterización ordinaria del cuadrado de la oposición a la que él mismo había prestado asentimiento en la obra antes aludida. Así, mientras admite que *Nullus homo est albus* podría considerarse como contradictoria de *Quidam homo est albus*, puesto que *nullus* no es más que la nega-

91 Ibid. p. 124.
92 Ibid. p. 139.
93 Ibid. p. 166.
94 Ibid. p. 178.

ción de *non ullus* [95], rehúsa ahora en cambio conceder que *Quidam homo non est albus* sea la contradictoria de *Omnis homo est albus*, tal y como Boecio lo había mantenido, alegando que Aristóteles se enfrentó más sutilmente a la cuestión al proponer *Non omnis homo est albus* como dicha contradictoria. Es cierto, desde luego, que Aristóteles propuso a este respecto lo que cabría llamar la versión griega de *Non omnis homo est albus* [96], mas no parece que con ello tratara de sentar una doctrina diferente a la que le fue luego atribuida por Boecio. Abelardo, por otra parte, parece creer que el significado de *Non omnis homo est albus* difiere en algo del de la proposición negativa particular *Quidam homo non est albus*, por lo que habría de quedar fuera del esquema usual de las cuatro formas categóricas [97]. La razón que le mueve a introducir esta complicación no es otra que la atribución de alcance existencial a *Omnis homo est albus*, aunque no así aparentemente a *Nullus homo est albus*. La atribución de alcance existencial a la proposición universal afirmativa resulta harto curiosa tras de su expresa declaración de que la *copula* no comporta aserción alguna de existencia; pero no hay duda de que aquélla es su doctrina en este punto, ya que insiste en que hasta una proposición con trazas de tautológica como *Omnis homo est homo* sería falsa si no hubiese hombres: «Cum autem *Quidam homo non est homo* semper falsa sit atque *Omnis homo est homo* homine non existente, patet simul easdem falsas esse: unde nec recte dividentes dici poterunt» [98]. Hemos de suponer, por consiguiente, que en su opinión es la palabra *omnis* la que introduce allí el alcance existencial.

Los lógicos medievales posteriores no siguieron a Abelardo en su intento de distinguir entre *non omnis* y *quidam non*; pero un especialista contemporáneo en lógica medieval afirma que únicamente asumieron el alcance existencial de las proposiciones afirmativas, preservando entonces el habitual cuadrado de la oposición por la vía de otorgar a *quidam non* el sentido reservado por Abelardo a *non omnis* [99]. En apoyo de dicha afirmación no se ha aducido ningún testimonio verdaderamente concluyente y es difícil pensar que alguien atribuyese a *Quidam homo non est albus* el sentido de «O bien no hay hombres o bien hay un hombre que no es blanco». Mas si ello fuera cierto, sería una prueba más de la relevancia del influjo de Abelardo en la conformación de la lógica medieval. En cualquier caso, nuestro autor merece ser reputado como el primer lógico que adoptó una actitud crítica frente al cuadrado de la oposición tradicional, si bien es cierto que no extrajo todas las consecuencias que podían extraerse de las modificaciones propuestas.

De la negación pasa Abelardo a la consideración de los *signa quantitatis*: *omnis*, *quidam* y *nullus*. El último, como hemos visto, equivalía para él a *non quidam*, con lo que el problema se reduce en definitiva a los dos primeros. Está claro que *omnis* no es lo que el gramático Prisciano llamara un *nomen appellativum*. Esto es, cuando tenemos una cláusula del tipo de *omnis homo* no nos es dado tratar a *omnis* como aplicable a cada uno de los hombres comprendidos bajo *homo*. Por el contrario, su fun-

---

[95] Ibid. p. 177.
[96] *De Interpretatione*, 7 (17b16-19).
[97] *Dialectica*, p. 184.
[98] Ibid. p. 176.
[99] E. A. Moody, *Truth and Consequence in Medieval Logic*, pp. 52-53.

ción es la colección de los diversos individuos en cuestión, más o menos como cabría coleccionarlos por medio de sus respectivos nombres propios, asegurando al tiempo que ninguno quede excluido de esa colección «... in *omnis* non solum singula colliguntur, verum etiam innuitur quod nullum excipiatur» [100]. Tal vez cabría decir, por consiguiente, que la expresión *omnis homo* funciona como un nombre compuesto que representa a cada uno de los hombres singulares sin excepción, en tanto que la expresión *quidam homo* es un nombre compuesto que representa indeterminadamente este o aquel hombre [101]. Y dado que dicha expresión pudiera figurar tanto en el lugar del predicado cuanto en el del sujeto de una proposición, habría que admitir dos géneros de universalidad, y otros dos géneros de particularidad, de las proposiciones, con sus correspondientes relaciones de oposición: «Potest quoque in propositionibus duplex universalitas aut particularitas accipi signis quantitatis tam subiecto quam praedicato appositis» [102]. Se verá que Abelardo considera en todo momento a los términos como nombres de cosas, esto es, adopta lo que hoy llamaríamos una interpretación extensional de las proposiciones categóricas.

En diversos lugares, la argumentación de Abelardo revela hallarse dirigida contra tesis de sus predecesores o contemporáneos, y en ocasiones él mismo confiesa expresamente que las tesis criticadas proceden de otros lógicos. Así sucede con su discusión de la modalidad. Nos cuenta allí que uno de sus maestros (quizá Guillermo de Champeaux) mantenía que toda proposición modal se refiere al sentido de otra proposición, de modo que decir *Possibile est Socratem currere* equivaldría a predicar la posibilidad del *sensus* de la proposición *Socrates currit* [103]. Abelardo no trata de negar que semejantes expresiones que contienen *possibile* u otros términos por el estilo puedan interpretarse de aquel modo. Por el contrario, reconoce que dicha interpretación encaja bien con la de la verdad como una propiedad de los contenidos proposicionales, que él hacía suya más arriba [104]. De hecho, ésa es la interpretación que parece tener *in mente* cuando escribe: «...*verum*... antecedit quidem ad *possibile*, sequitur vero ad *necessarium; falsum* autem ad *impossibile* tantum sequitur» [105]. Pero sostiene que una proposición que se acomode a dicha interpretación no sería una proposición modal estrictamente hablando, ya que no envuelve modificación alguna del enlace proposicional entre dos cosas y se contenta con la simple aplicación de un cierto tipo de adjetivo a un mero contenido proposicional. Una proposición genuinamente modal sería aquella, piensa, que envolviera una modalidad *secundum expositionem de rebus* [106]. Cabría construirla por medio de un adverbio, tal como por ejemplo *possibiliter*, pero también mediante un adjetivo modal acompañado de un acusativo y un infinitivo. Pues, aunque *Nullum hominem possibile est esse album* podría interpretarse como una proposición singular afirmativa verdadera cuyo significado sea «Es posible que ningún hombre fuese blanco», cabría también interpretarla como una proposición universal negativa falsa con el significado de «Ningún hombre podría ser blanco» o «Es imposible que

100 *Dialectica*, p. 187.
101 Ibid. p. 188.
102 Ibid. p. 190.
103 Ibid. p. 195.
104 Ibid. p. 205.
105 Ibid. p. 204.
106 Ibid. p. 206.

un hombre sea blanco»; y, para Abelardo, sólo será una auténtica proposición modal cuando se la interprete en el segundo sentido, esto es, cuando el término modal cualifique a la cópula o enlace y pueda así decirse que expresa una manera o modo de conexión.

En este contraste entre *expositio de sensu* y *expositio de rebus* (que aparece asimismo en el comentario de Abelardo al *De Interpretatione*, bajo la forma de una distinción entre *expositio per compositionem* y *expositio per divisionem*, con una referencia al *De Sophisticis Elenchis*) [107] tenemos un intento de establecer aquella distinción entre cualificación extrínseca e intrínseca que, en un capítulo anterior, considerábamos como posible justificación de ciertas extrañas peculiaridades de la teoría aristotélica de los silogismos modales. Tiempo después, algunos lógicos medievales hablarían de una distinción entre modalidad *de dicto* y modalidad *de re*, dando con ello por sentado que cabe caracterizar como modales a las proposiciones *de dicto*. Pero algunos por lo menos de entre los lógicos posteriores adhirieron a la tesis de Abelardo, según la cual las auténticas proposiciones modales nada tienen que ver con la aplicación de adjetivos modales a contenidos proposicionales. Se trata de un punto de vista desafortunado. Pues hoy nos parece evidente que el uso *de dicto* de los términos modales es el fundamental y que, si dichos términos desempeñan a veces el cometido de una cualificación inextricablemente interna, no hay que pensar por ello que éste sea su uso básico y elemental, sino más bien hay que tomarlo como muestra de la complejidad del discurso en que esos términos funcionan. En algunos aspectos, con los términos modales pasa lo que con las partículas negativas. Como Abelardo mismo reconoce, para obtener la negación de una proposición determinada hemos de introducir la partícula negativa de forma tal que afecte a la totalidad de la proposición. Pero esa partícula, no obstante, podría también aparecer —dentro de una proposición especialmente complicada— en una posición en la que no opere sobre todo lo demás y de la que no quepa extraerla por medio de paráfrasis más o menos ingeniosas. Sería absurdo decir, en ese caso, que sólo las proposiciones complicadas de este último género son auténticamente negativas. Por el contrario, lo razonable sería conceder, como Abelardo hace por cierto, que una proposición así no necesita ser considerada como negativa en su conjunto. De la misma manera, una proposición que envuelva la llamada modalidad *de re* tampoco necesita ser considerada como modal en su conjunto. Y la denegación, en cambio, de ese título a las proposiciones de la forma «Es posible que ningún hombre fuese blanco» no parece otra cosa que el resultado de una pedantesca fidelidad a ciertas connotaciones infundadas de la palabra *modus*. Algunos escolásticos de las postreras hornadas se acercaron bastante al reconocimiento de este hecho, pero en líneas generales sucumbieron al peso de la tradición.

Hacia el comienzo de su tratamiento de la modalidad, Abelardo afirma que *possibile* y *contingens* son equivalentes [108]. Esta equivalencia se inspira, claro está, en Aristóteles, pero Abelardo parece servirse de ella en orden a sentar una nueva definición de *contingens* más bien que con el fin de restringir la de *possibile* a lo que no es necesario. Pues, si bien considera

---

[107] L. Minio-Paluello, *Abaelardiana Inedita, Twelfth Century Logic, Texts and Studies*, II, pp. 13 y ss.

[108] *Dialectica*, p. 193.

necessarium, possibile e *impossibile* como los tres términos modales básicos sobre los que ha de versar su indagación, sostiene que *Necesse est Socratem esse album* implica *Possibile est Socratem esse album,* lo que no sería cierto si *possibile* significara para él lo que *contingens* significa usualmente [109].

Del problema de la modalidad pasa Abelardo al de los futuros contingentes. Y aquí, como podía esperarse, emplea el vocablo *contingentia* en un sentido bastante semejante al usual, pues afirma que contingente es lo que puede o no acontecer y lo contrasta con lo *necessarium* y lo *naturale,* ofreciendo como ejemplo de esto último la proposición de que un hombre morirá [110]. El pasado y el presente —nos dice— se hallan determinados, pues, aunque no sepamos si el número de las estrellas es par o impar, habrá de ser lo uno o lo otro [111]. Así, las proposiciones verdaderas acerca del pasado o el presente serán determinadamente verdaderas, puesto que su verdad puede dilucidarse al menos en principio por el conocimiento de los hechos enunciados. Por el contrario, ninguna proposición *de contingenti futuro* podría ser determinadamente verdadera ni determinadamente falsa en un sentido análogo al anterior, pero ello no equivale a sostener que una proposición de dicho género no pueda ser verdadera o falsa. Antes bien, esa proposición será verdadera si el futuro se ajusta a lo que enuncia y aun si nosotros no sabemos cómo se ha de desenvolver («si futurum sit ut propositio dicit, etsi ignoratum nobis sit») [112]. Lo que Aristóteles trataba de mantener en su *De Interpretatione* es que, mientras una proposición verdadera es necesariamente verdadera cuando es verdadera, no por eso es necesariamente verdadera en todo momento [113]. En relación con el problema del libre albedrío, un oponente —como los estoicos— podría alegar, con todo, que los juicios y las acciones de los hombres son ellos mismos sucesos necesarios y por lo tanto no se hallan excluidos de la doctrina de la necesidad universal, pero seguramente no era ésta una cuestión que a Aristóteles le interesase discutir [114].

El pasaje precedente constituye un intento, en apariencia, de defender a Aristóteles del cargo de haber negado validez universal al principio de bivalencia; y, hasta cierto punto, encierra una explicación muy plausible de un texto sobremanera oscuro. Pero comporta al mismo tiempo la pretensión de hacer valer la idea de que una proposición podría ser verdadera en un instante dado pero no serlo en otro. Abelardo no llega a definir expresamente la proposición necesaria como aquella que es verdadera en todo tiempo, en tanto la proposición contingente sería aquella que es verdadera a veces, pero parece identificar en cualquier caso la necesidad absoluta con la verdad omnitemporal, mencionando en varios otros lugares como rasgo distintivo de las verdades necesarias —especialmente de las *consequentiae* tales como *Si est homo, est animal*— el hecho de ser *verae ab aeterno.* La idea de que las verdades contingentes puedan ser unas veces verdaderas y otras no se compadece mal con la doctrina de que la verdad corresponde primariamente a los contenidos proposicionales más bien que a los signos proposicionales que les sirven de vehícu-

109 Ibid. pp. 198-9.
110 Ibid. p. 211.
111 Ibid. p. 212.
112 Ibid. p. 213.
113 Ibid. p. 221.
114 Ibid. pp. 216 y 222.

lo. Pero Abelardo pasó por alto esta dificultad, y de nuevo su costumbre de hablar de verdad-en-un-instante-dado fue imitada por muchos de los lógicos que le sucedieron.

Tras estos concienzudos preliminares, que ocupan 180 páginas de nuestro texto impreso, resulta un tanto sorprendente que la exposición toda de la silogística se reduzca a 18 páginas. Su presentación de las figuras y modos silogísticos, así como la reducción de los modos de la segunda y tercera figuras a los de la primera, es —hasta donde puede serlo— satisfactoria, pero excesivamente concisa. Contiene poca cosa, por ejemplo, acerca de los silogismos modales, y nada en absoluto sobre la filosofía del razonamiento deductivo. Esto puede deberse en parte a la orientación de los intereses de Abelardo, probablemente más atraído por la metafísica que por la teoría de los sistemas deductivos. Pero lo más probable es que su desigual distribución del espacio disponible obedezca al mayor o menor grado de difusión de los textos clásicos en su tiempo. En toda la *Dialectica* sólo hay tres referencias a los *Primeros Analíticos*, en contraste con las más de 250 citas de las *Categorías* y el *De Interpretatione*, que eran bien conocidos en la época y gozaban de una mayor circulación. No hay que pensar, no obstante, que el propio Abelardo no haya tenido entre sus manos una versión latina de los *Primeros Analíticos*. Pues por lo menos dos de sus alusiones a dicha obra no pueden proceder de fuente alguna secundaria conocida, como sería el caso por ejemplo del *De Syllogismo Categorico* de Boecio [115]. Lo más probable es que tuviera ocasión de consultar una copia de la traducción de Boecio en alguna biblioteca, aunque no la estudiara a fondo ni pudiera presuponer en sus oyentes o lectores una mediana familiarización con ella.

Como en los escritos de Boecio, también aquí el estudio de los *loci* —o tópicos— recibe una atención considerable. De hecho, Abelardo les concede más espacio que a todo el resto de los dos primeros tratados; y hay que admitir que buena parte de lo que tiene que decir a este respecto resulta tedioso y falto de interés para el lector moderno interesado en rastrear el desarrollo de la lógica formal. Pero es ésta la parte de la obra que encierra su tratamiento de las *consequentiae*, de donde habría de surgir una de las más interesantes novedades de la lógica medieval.

Para Abelardo, el término *consequentia* no significa —como para Boecio— el modo en que una proposición se sigue de otra. Cuando Abelardo desea hablar de esta última relación, acostumbra a servirse del término *consecutio* [116], pues *consequentia* lo reserva para significar «proposición condicional». Por el modo como explica dicho uso de la palabra, se puede concluir que lo habían adoptado ya otros antes que él [117]. Como nos indica, su acepción parece basarse en el empleo del término *consequens* para designar la segunda parte de una proposición condicional; pero no hay duda de que *consequentia* retiene aún para Abelardo la idea de «seguirse de», como cuando decimos que la conclusión de un argumento válido se sigue de las premisas. Según nos informa, algunos autores —incluido uno de sus maestros (posiblemente Guillermo de Champeaux)— pensaban que la mera probabilidad bastaría para asegurar la verdad de una proposi-

115 B. Geyer, "Die ältesten lateinischen Übersetzungen der Analytik, Topik, und Elenchik", *Philosophisches Jahrbuch der Görresgesellschaft*, XXX (1917), pp. 25-43.
116 *Dialectica*, pp. 163 y 472.
117 *Ibid.* p. 165.

ción condicional. Pero, en su opinión, ésta exige nada menos que la *necessitas consecutionis* [118]. En resumidas cuentas, pues, los enunciados condicionales —o, en cualquier caso, los que llama *consequentiae*— son para él enunciados de conexiones necesarias como las que a veces ofrecemos para justificar una inferencia, y ésta es la razón de que le parezca oportuno ocuparse detenidamente de ellos al estudiar la teoría de los tópicos. Por lo demás, ya que se trata de enunciados necesarios, piensa que habrán de ser —si verdaderos— verdaderos *ab aeterno* [119].

Algunos argumentos, nos dice, son perfectos en el sentido de que sus premisas se bastan por sí solas para establecer sus conclusiones. Si construimos un enunciado condicional que tenga por antecedente la conjunción de las premisas de un argumento semejante, teniendo por consecuente la conclusión de este último, el resultado será una *consequentia* verdadera *secundum complexionem*, esto es, verdadera en virtud de su estructura formal. Sea a título de ejemplo: «Si omnis homo est animal et omne animal est animatus, omnis homo est animatus». Podremos reemplazar como gustemos sus términos por otros, pero lo que obtengamos seguirá siendo siempre una *consequentia* verdadera, con la única condición de mantener invariable la estructura del esquema. Hay, sin embargo, otros argumentos que tendríamos que llamar imperfectos porque no satisfacen tales requisitos, sino exigen para su justificación algún suplemento *ex rerum natura*. La verdad de la *consequentia* correspondiente a un argumento semejante dependerá de la naturaleza de las cosas denominadas por sus términos en una medida en la que no lo hace la verdad de una *consequentia* correspondiente a un argumento perfecto. Pues si reemplazásemos por otros dichos términos, el resultado pudiera muy bien ser una proposición falsa:

«Istae ergo consequentiae recte ex natura rerum verae dicuntur quarum veritas una cum rerum natura variatur; illae vero veritatem ex complexione, non ex rerum natura, tenent quarum complexio necessitatem in quibuslibet rebus, cuiuscumque sint habitudinis, aeque custodit, sicut in syllogismis vel in consequentiis quae formas eorum tenent ostenditur» [120].

Ahora bien, Cicerón definió al *locus* como *sedes argumenti*, y —a la luz de la distinción que acabamos de establecer —cabría también hablar aquí de la *vis inferentiae* de un argumento imperfecto [121]. Así, cuando pasemos de la premisa *Socrates est homo* a la conclusión *Socrates est animal*, estaremos usando del *locus a specie* cuya *maxima propositio* es *De quocumque praedicatur species, et genus*. Mas si tratamos de precisar cuál haya sido la contribución del *locus* en ese caso concreto, obtendremos una *consequentia* verdadera *ex rerum natura*, a saber, *Si Socrates est homo, est animal*. Así, la *maxima propositio* del *locus* en cuestión podría describirse como el principio que encierra en sí el sentido de todas las *consequentiae* gobernadas por el mismo [122]. Boecio reconocía la existencia de *maximae propositiones* incluso para los silogismos [123], y es cierto que todo silogismo se deja subsumir bajo una regla general del tipo de: «Si aliquid praedicatur de alio universaliter et aliud praedicetur de praedicato universaliter, illud

---

118 Ibid. pp. 253 y 271-4.
119 Ibid. pp. 160 y 279.
120 Ibid. p. 256.
121 Ibid. p. 253.
122 Ibid. p. 263.
123 *De Differentiis Topicis*, I, 1173 B.

idem praedicatur et de subiecto universaliter» [124]. Pero las reglas de este género no deben confundirse con las máximas, pues los silogismos regidos por ellas serían ya perfectos en razón de su estructura (*complexio*) y no requerirían de ninguna otra justificación ejercida desde fuera [125]. Ciertamente, los silogismos de la segunda y tercera figuras se dicen imperfectos, pero este calificativo se refiere —para Abelardo— a lo que se podría llamar su claridad (*evidentia*), no a su carácter concluyente (*inferentia*), pues respecto de este último seguirán siendo perfectos, por más que no podamos detectarlo con la misma presteza que si sus términos guardasen entre sí la ordenación correcta de la primera figura.

No contento con insistir en que la forma condicional ha de considerarse expresión de una conexión necesaria, Abelardo llega a afirmar que hasta el rótulo de *consecutionis necessitas* sería insuficiente para dar idea de aquel requisito, puesto que dicho rótulo admite una interpretación laxa que pudiera llevar a consecuencias indeseables (*inconvenientia*). Para algunos autores, por ejemplo, una *consequentia* es necesariamente verdadera si es imposible que el antecedente sea verdadero sin serlo el consecuente. A primera vista, parece que se trata de una interpretación razonable, pero obliga a aceptar como una *consequentia* verdadera la paradójica aserción: *Si Socrates est lapis, est asinus*. Pues, en efecto, es imposible que Sócrates sea una piedra, y por lo tanto lo es que sea una piedra no siendo un asno. Por consiguiente, hay que entender la *consecutionis necessitas* en un sentido más estricto, de acuerdo con el cual el antecedente de un condicional verdadero requiera intrínsecamente (*ex se ipso exigit*) [126] el consecuente. Esta interesante precisión de Abelardo parece constituir el punto de partida del extenso debate medieval acerca de las paradojas de la implicación. Pues es difícil atribuir a una simple casualidad el hecho de que los lógicos que tomaron luego parte en el debate mencionen comúnmente como ejemplo de imposibilidad el que un hombre sea un asno, utilizando incluso el término *Brunellus* —que aparece en Abelardo— como nombre de asno [127]. Pero el modo como Abelardo aplica su definición restringida de conexión necesaria resulta desafortunado. Abelardo sostiene que la *consequentia* que cita tan a menudo como ejemplo —*Si est homo, est animal*— es satisfactoria por procederse en ella de lo menos general (*inferius*) a lo más general (*superius*), que al decir de Prisciano se halla sobrentendido en lo primero. Por otra parte, considera que nuestras cotas de rigor descenderían sensiblemente tan pronto como una *consequentia* comportase dos distintas substancias en sus antecedente y consecuente, tal y como sucede por ejemplo en *Si homo est, lapis non est* o *Si paternitas est, filiatio est*. Pues afirma que, en tales casos, el sentido del consecuente no se halla contenido en el sentido del antecedente, por lo que la verdad del enunciado en su conjunto únicamente puede establecerse a través de un conocimiento extraformal de la naturaleza de las cosas («posterius ex naturae discretione et propietatis naturae cognitione») [128].

Es difícil encontrar una interpretación satisfactoria a este pasaje. A primera vista, un lector moderno se inclinaría a pensar que se halla ante

---

124 *Dialectica*, p. 261. El subjuntivo aparece en el texto impreso.
125 Ibid. p. 261.
126 Ibid. pp. 283-5.
127 Ibid. p. 293.
128 Ibid. p. 284.

un intento de distinguir entre verdades *a priori*, basadas en una consideración del significado de las palabras que les sirven de expresión, y verdades empíricas o *a posteriori* que sólo podrían basarse en los datos de la experiencia. Pero esta interpretación constituiría a buen seguro un anacronismo. No hay ninguna razón para pensar que Abelardo tuviese idea de lo que hoy llamaríamos el método inductivo, aparte de que los ejemplos antes citados tampoco se acomodan demasiado a tal efecto. La cuestión parece estribar más bien en que, al tener que hablar de cualquier género de relaciones (incluidas las de incompatibilidad entre las características percibidas en cosas diferentes), no nos puede bastar con apoyarnos en nuestra familiaridad con las definiciones *per genus et differentiam*, ya que tales definiciones son obviamente inadecuadas para abordar el nuevo tipo de problemas suscitados por dichas relaciones. Así, nosotros podríamos, por ejemplo, saber que un hombre es por definición un animal racional y que, análogamente, una piedra es por definición un mineral sólido; pero estas informaciones por sí solas no nos autorizarían a decir que, si algo es un hombre, ese algo no es una piedra. Más aún, puesto que es imposible introducir la noción de paternidad mediante una definición de términos no-relacionales, es evidente que ninguna definición podría ayudarnos en el segundo ejemplo de Abelardo. Parece, pues, como si éste hubiera llegado por un momento a cobrar conciencia de una seria limitación de la concepción aristotélica de la ciencia heredada de Boecio, pero sin saber cómo superarla de verdad. En lugar de (a) tratar de hacer un sitio dentro de la lógica formal a la teoría de las relaciones y (b) intentar establecer una línea de demarcación entre la investigación empírica y la *a priori*, Abelardo retiene el esquema aristotélico mientras sugiere la necesidad de añadirle una nueva lógica no-formal capaz de ocuparse de las *consequentiae* verdaderas *gratia terminorum*, esto es, verdaderas en virtud de sus términos en cuanto algo distinto de su estructura.

El siguiente pasaje explica su extensión del concepto de lógica:

«Hoc autem logicae disciplinae proprium relinquitur, ut scilicet vocum impositiones pensando quantum unaquaque proponatur oratione sive dictione discutiat. Physicae vero proprium est inquirere utrum rei natura consentiat enuntiationi, utrum ita sese, ut dicitur, rerum proprietas habeat vel non. Est autem alterius consideratio alteri necessaria. Ut enim logicae discipulis appareat quid in singulis intelligendum sit vocabulis, prius rerum proprietas est investiganda. Sed cum ab his rerum natura non pro se sed pro vocum impositione requiritur, tota eorum intentio referenda est ad logicam. Cum autem rerum natura percontata fuerit, vocum significatio secundum rerum proprietates distinguenda est, primo quidem in singulis dictionibus, deinde in orationibus quae ex dictionibus iunguntur et ex ipsis suos sensus sortiuntur»[129].

Tomadas al pie de la letra, las dos primeras oraciones del texto parecen entrañar la distinción —de indudables resonancias actuales— entre la lógica entendida como la indagación de los significados y la física entendida como el estudio de los hechos. Pues Abelardo afirma que la misión de la ciencia de la lógica es reflexionar sobre las convenciones que otorgan a las palabras sus significados, discerniendo así el contenido de las diversas expresiones, mientras que el oficio de la física consistiría en inquirir si las

129 Ibid. pp. 286-7.

cosas se hallan en posesión de las características que las diversas proposiciones les adscriben. Pero inmediatamente añade que el estudioso de la lógica debe asimismo investigar la naturaleza de las cosas en orden a captar lo que haya de entenderse cuando empleamos las palabras, sosteniendo que semejante actividad habrá de destinarse a hacer posible la estipulación de convenciones acerca de nuestro uso de las mismas (*pro vocum impositione*). De tales sugerencias se desprende que el lenguaje podría ser regimentado y explotado hasta tal punto que su dominio nos conduzca a dominar la ciencia en su totalidad. Si Abelardo hizo de veras suya semejante convicción, figuraría a la cabeza de una tradición tan ilustre como exagerada en sus pretensiones. Mas, por desgracia, aquel pasaje es demasiado breve como para ayudarnos a esclarecer su posición.

La mayor parte de las máximas propuestas por Abelardo para sus diferentes tópicos las podemos pasar por alto aquí, pero en su discusión de las *consequentiae* tuvo ocasión naturalmente de servirse de una serie de reglas de la lógica formal, algunas de las cuales interesa exponer en lo que sigue. En ocasiones tales reglas reciben asimismo la denominación de máximas.

Tenemos en primer lugar la regla de lo que luego habría de llamarse el *modus ponendo ponens*:

(1) *Posito antecedente ponitur consequens,*

y, en segundo lugar, la regla del *modus tollendo tollens*:

(2) *Perempto consequente perimitur antecedens.*

Ambas reglas se citan de vez en vez bajo otras formulaciones, pero las anteriores son las más abreviadas [130]. Al presentarlas, Abelardo advierte la posibilidad de derivar cada una de ellas de la otra, puesto que de *Si est homo, est animal* puede pasarse a *Si non est animal, non est homo* y viceversa. La prueba de su equivalencia que Abelardo nos suministra procede a base de una *reductio ad impossibile,* pues si alguien admitiera la primera de dichas *consequentiae* poniendo en duda la segunda, vendría a conceder la posibilidad de que no haya un animal habiendo un hombre. Pero por la primera *consequentia,* ya admitida, tendrá que haber un animal si hay un hombre. Con lo que el objetor habría incurrido en flagrante contradicción. Una contradicción análoga resultará si el objetor acepta la segunda *consequentia* y rechaza en cambio la primera.

A renglón seguido de las precedentes, Abelardo enumera una serie de reglas negativas, a saber, reglas que establecen la imposibilidad de una argumentación formalmente válida que nos conduzca (a) de la afirmación del antecedente a la negación del consecuente, o (b) de la negación del antecedente a la negación del consecuente, o (c) de la negación del antecedente a la afirmación del consecuente, o (d) de la negación del consecuente a la afirmación del antecedente, o (e) de la afirmación del consecuente a la afirmación del antecedente, o (f) de la afirmación del consecuente a la negación del antecedente. E intenta erróneamente derivar la primera de ellas a partir de la regla (2) antes citada por medio de un argumento

[130] Ibid. p. 289.

aristotélico destinado a demostrar que una proposición y su negación no pueden ambas implicar la misma conclusión.

A continuación tendríamos lo que modernamente se conoce como principio de transitividad de la implicación. Aparece asimismo bajo diversas formulaciones, la más sencilla de las cuales es:

(3) *Si aliquid infert aliud quod inferat aliud, primum inferens infert ultimum* [131].

Vienen luego dos máximas para las interrelaciones de verdad y falsedad, por un lado, y afirmación y negación por otro:

(4) *Si vera est affirmatio, falsa est negatio,*
(5) *Si vera est negatio, falsa est affirmatio* [132].

Finalmente contamos con varias reglas que ponen en relación las diversas modalidades (incluidas entre ellas la verdad y la falsedad) con la noción de implicación:

(6) *Si antecedens possibile est esse, et consequens,*
(7) *Si antecedens verum est esse, et consequens,*
(8) *Si antecedens necessarium est esse, et consequens,*
(9) *Si consequens esse impossibile est, et antecedens,*
(10) *Si consequens esse falsum est, et antecedens* [133].

De nuevo existen variantes de algunas de estas reglas. Así tenemos, por ejemplo, el principio *Nullum verum infert falsum* citado en otro lugar [134].

Tras del tratado de los tópicos pasamos al de las proposiciones hipotéticas. El calificativo de «hipotéticas» se aplica aún por igual, por esta época, a las proposiciones tanto condicionales cuanto disyuntivas, de suerte que las primeras eran también a veces llamadas conjuntivas para distinguirlas de las segundas dentro del género común. Dado que presentaba su tratado como una reelaboración del *De Syllogismo Hipotetico* de Boecio, Abelardo procuró retener la vieja terminología, pero tendía a identificar las proposiciones «hipotéticas» con las «condicionales» [135], justificando entonces su aplicación del calificativo a las proposiciones disyuntivas mediante la demostración de la posibilidad de reducirlas a proposiciones condicionales [136]. Propia y naturalmente hipotéticas (*naturales et rectae hypotheticae*) son, pues, aquellas *consequentiae* de las que se ha ocupado por extenso en el tratado precedente, por lo que ahora no juzga necesario detenerse de nuevo en el examen de sus condiciones de verdad. Pero recoge en este punto de pasada la distinción establecida por Boecio entre enunciados condicionales verdaderos *per positionem terminorum* y el resto de los condicionales [137]. La novedad más interesante de entre sus observaciones iniciales es el tratamiento de las proposiciones temporales construidas mediante la conjunción *cum*. Boecio las había considerado como condicionales que no envuelven la noción de necesidad, pudiendo ser consideradas por lo

131 Ibid. p. 297.
132 Ibid. p. 395.
133 Ibid. pp. 361-2.
134 Ibid. p. 287.
135 Ibid. pp. 287 y 484-5.
136 Ibid. p. 488.
137 Ibid. pp. 472-3.

tanto como accidentalmente verdaderas. Abelardo, por su parte, se niega a conceder que quepa con propiedad llamarlas hipotéticas o condicionales, puesto que solamente envuelven una *comitatio* en lugar de una estricta *necessitas consecutionis*, pero ofrece tres reglas por medio de las cuales se las podría correlacionar con *naturales consequentiae*:

(I) *Quorumque antecedentia sese comitantur, et consequentia,*
(II) *Existente antecedente existunt simul quaelibet eius consequentia,*
(III) *Existente antecedente cum quolibet, existit quodlibet eius consequens.*

Los siguientes, nos dice, son ejemplos de aplicación de tales reglas:

(I) *Si cum est homo est medicus, cum est animal est artifex,*
(II) *Si est homo, cum est animatum est animal,*
(III) *Si cum est animatum est homo, est animal* [138].

No obstante, es digno de mención que —incluso en este punto, en que Abelardo se halla trabajando con material extraído de la obra de Boecio— cree lo apropiado proponer ejemplos integrados por cláusulas del tipo de *si est homo*, esto es, cláusulas como las que Teofrasto había usado siglos antes en su doctrina de los silogismos totalmente hipotéticos.

Análogo conservadurismo puede apreciarse en la caracterización abelardiana de los argumentos hipotéticos. Pues, aunque modifica el orden de su exposición [139] y enmienda la cuestionable argumentación de Boecio reseñada en la última sección [140], no discute su autoridad y se mantiene estrechamente fiel a su modo de proceder en el curso del tratamiento de los diversos modos complejos. Y aquí, donde Boecio había hecho uso de letras como variables, también él se permite este recurso —si bien siempre en esquemas del tipo de *Si est A, est B*— para indicar aquellos lugares que han de ser rellenados por términos generales. Dos siglos más tarde, todavía Gualterio Burleigh pensaba que ésta era la práctica más conveniente en orden a reproducir el sistema de Boecio, por más que para nada se sirviera en otros lugares de variables. Por lo demás, Abelardo no prestó especial atención a los fragmentos de la lógica estoica preservados por Boecio en su comentario a los *Topica* de Cicerón. Quizás el tratamiento ciceroniano del asunto era demasiado oscuro para servir de alguna ayuda a los lógicos medievales, por dependientes que éstos fueran del *corpus* de Boecio.

Como se hizo notar anteriormente, Abelardo juzgaba que la forma correcta de negar una proposición consistía en colocar el signo de negación de modo que afectase a la totalidad de aquella última. En consciente oposición a Boecio, declara que si el signo de negación se inserta en una u otra de las cláusulas de una proposición condicional, el resultado no será la negación de la proposición originaria sino una nueva proposición [141]. Así, *Si non est A, est B* significará lo mismo que *Aut est A aut est B* y, de manera semejante, *Aut non est A aut est B* significará lo mismo que *Si est A, est B*. Para Abelardo sería un error decir, como algunos

138 Ibid. pp. 482-4.
139 Ibid. p. 515.
140 Ibid. p. 507.
141 Ibid. pp. 485 y ss.

autores habían propuesto, que para la verdad de una disyunción es suficiente con que sea verdadera una de sus disyuntas; como también sería un error decir, según proponían otros, que basta que lo sea una, y sólo una, de estas últimas. Para captar el auténtico sentido de la disyunción hemos de acudir siempre, como lo hizo Boecio, al condicional asociado que comporta la noción de necesidad. Pero, de acuerdo con Boecio, los dos miembros de una disyunción son necesariamente incompatibles, lo que es tanto como decir que *Aut est A aut est B* no equivaldría a *Si non est A, est B*, sino más bien a la conjunción de esta proposición con *Si est A, non est B*. Abelardo rechaza este segundo y más estricto requisito y, con él, el argumento que habría de permitir pasar de la afirmación de un miembro de la disyunción a la negación del otro, esto es, lo que más tarde habría de llamarse el *modus ponendo tollens* [142]. Y, puesto que considera a la disyunción como equivalente a un condicional con el antecedente negativo, el *modus tollendo ponens* del razonamiento disyuntivo constituirá para él naturalmente un caso particular del *modus ponendo ponens* del razonamiento condicional.

Al abandonar el requisito de que los miembros de una disyunción hayan de ser incompatibles, Abelardo comienza a distanciarse de la interpretación fuerte de la partícula disyuntiva introducida —creemos— por Crisipo. Y no es éste el único paso de Abelardo hacia una simplificación de la lógica proposicional. Por más que insista en que una disyunción de dos miembros ha de entenderse equivalente al enunciado de que la negación de uno de ellos implica el otro, reconoce no obstante que esta interpretación no es extensible a disyunciones de más de dos miembros. Como él lo formula, la proposición verdadera *Aut est calidum aut frigidum aut tepidum* no puede realmente suponerse equivalente a la proposición *Aut est vera haec disiuncta 'Est calidum aut frigidum' aut est tepidum* ni tampoco a la proposición *Aut est calidum aut vera est illa disiuncta 'Est frigidum aut tepidum'*, ya que estas últimas son evidentemente falsas ambas si interpretamos *aut* —a la vez dentro y fuera del entrecomillado— en términos de una conexión necesaria. El único modo de escapar a la dificultad consistiría en admitir una interpretación más débil de la disyunción, cosa que hace Abelardo alegando que ese sentido de la misma está presente ya en el uso de *aut* o *vel* para la formación de predicados complejos de las proposiciones categóricas. De acuerdo con esta nueva interpretación, la disyunción originaria de tres miembros equivaldría a la proposición *Si non est calidum, est frigidum vel tepidum* (donde *vel* se interpreta en el sentido débil apuntado) y, por supuesto, a las otras dos proposiciones que se podrían formar sobre la base de esa misma estructura mediante la permutación de sus tres términos [143]. El hecho de haber reparado en esta dificultad, tratando de resolverla de una manera harto prometedora, es por lo menos una muestra de la agudeza de Abelardo. Para una completa solución de la misma sólo hace falta añadir que el sentido débil de la disyunción, que Abelardo confina al caso de ciertos predicados complejos, puede tomarse en general como el fundamental, toda vez que su sentido modal fuerte resultaría siempre expresable prefijando la cláusula «es necesario que» en orden a operar *de sensu* sobre la disyunción débil en su conjunto.

142 Ibid. pp. 489, 491, 499, 531. Cf. Boecio, *De Syll. Hyp.* II, 876 C.
143 *Dialectica*, pp. 492-3.

Según Abelardo, la proposición temporal y la disyuntiva podrían convertirse por medio de una simple reordenación de sus cláusulas, mas las proposiciones condicionales sólo podrían hacerlo por contraposición de acuerdo con la regla: «Si aliquid antecedit ut aliud consequatur, si id quod consequitur non fuerit, nec illud quidem quod antecedit erit». Al parecer, algunos lógicos habían puesto objeciones al empleo del término «conversio» en este contexto, por lo que Abelardo considera necesario echar mano de cuantos precedentes cree poder encontrar para aducirlos en favor de su práctica [144]. La cuestión no reviste otro interés que el de mostrar la existencia de debates más o menos pormenorizados entre las diversas escuelas de lógica con anterioridad a la época de Abelardo.

El último tratado, *De Divisionibus et Definitionibus*, no contiene gran cosa de interés para el desarrollo de la lógica, aunque sí es interesante para la historia general de la filosofía. Le achaca en él a Roscelino la *insana sententia* de que nada puede componerse de partes puesto que toda parte es anterior al todo, con lo que éste —que consiste en sus partes— sería anterior a sí mismo. Al parecer, esta paradójica afirmación tiene algo que ver con la controversia acerca de los universales, pues Abelardo dice de Roscelino a este respecto: «Sicut solis vocibus species, ita et partes adscribebat» [145]. Inmediatamente después de este pasaje encontramos una alusión a la doctrina del *anima mundi* y una exposición de las razones por las que Abelardo la encuentra, en el momento de su redacción, inconciliable con la fe católica.

3. La lógica de las Universidades

Es concebible que en algún manuscrito medieval pueda haber sobrevivido alguna obra de Guillermo de Champeaux o de algún otro predecesor de Abelardo, pero lo que no parece probable es que ningún hallazgo de ese género logre alterar sustancialmente los rasgos capitales de nuestro bosquejo del desarrollo de la lógica anterior a él ni nos conduzca a revisar nuestra valoración de ese período. El cuadro es muy distinto si volvemos la vista a la historia posterior de la lógica medieval. Tras siglos de incuria o de desprecio (el caso, por ejemplo, de Prantl en el tercero y cuarto volúmenes de su *Geschichte der Logik*), los logros de los lógicos medievales que nos eran accesibles a través de libros impresos a fines del siglo XV y comienzos del XVI han sido reconsiderados a la luz de los descubrimientos de la lógica moderna, con lo que obras un día condenadas como tediosas e irrelevantes son hoy tenidas por brillantes anticipaciones de innovaciones recientes. Esta repentina revalorización conduce poco menos que inevitablemente a exageraciones y errores de perspectiva. Así, autores del siglo XIV han sido honrados por aportaciones debidas a Abelardo un par de siglos antes, y sentencias originarias de Boecio o algún comentador árabe de Aristóteles se han exhibido a veces como joyas de la sabiduría cristiana medieval. Pero en la historia literaria, a diferencia que en la arqueología, los desmanes de los entusiastas no destruyen los testimonios

144 *Ibid.* p. 496.
145 Ibid. p. 555.

disponibles. Por el contrario, pueden servir de estímulo a investigaciones que corrijan sus propios errores. Y eso es lo que ha ocurrido en nuestro caso. Por ejemplo, hoy sabemos que —aparte de los textos posteriormente impresos— existen numerosísimos tratados manuscritos de lógica de los siglos XII y siguientes. Hasta que todos esos manuscritos no hayan sido editados, o al menos analizados y descritos, por expertos en estudios medievales, no se puede esperar una correcta clasificación de los diversos estratos de tan vasto depósito [146]. En esta sección, pues, sólo podemos intentar ofrecer un esbozo sumario de la historia de la lógica en la alta Edad Media, con especial mención de alguna que otra de las grandes figuras que por aquel entonces cultivaron su investigación. Mas con el fin de hacernos una idea de la enorme cantidad de material que está aguardando un escrutinio detenido, trataremos en las secciones siguientes de recolectar información sobre dos de las más interesantes novedades introducidas en la exposición de la lógica por espacio de casi un cuarto de milenio tras la muerte de Abelardo.

Poco después de la primera mitad del siglo XII, la totalidad del *Organon* circulaba ya por Europa, una veces en la vieja versión de Boecio, otras en traducciones de nuevo cuño. Al cabo del siguiente medio siglo, la mayor parte de los restantes escritos aristotélicos se había tornado asequible en traducciones latinas. Algunas de esas traducciones se confeccionaron por esa época en España a partir de versiones árabes, y otras fueron obra en Italia de estudiosos que estaban en contacto con la cultura bizantina. El que por uno u otro conducto se realizasen esas traducciones hay que atribuirlo al despertar intelectual del mundo occidental de aquellos tiempos más bien que a ningún otro tipo de accidente histórico. Hombres que habían oído del esplendor de la ciencia árabe emprendían, por ejemplo, largos viajes para encontrar lo que buscaban. Así, Adelardo de Bath, que en 1126 trajo a Occidente las tablas trigonométricas de Al-Karismi, cuyo nombre —de donde proviene el de «algoritmo»— se asociaría posteriormente al cálculo tal y como el de Euclides se asociaba a la geometría. Aquellas partes del *Organon* que ahora se introducían por vez primera en las escuelas —ya sea en las nuevas traducciones o en las versiones de Boecio— y comprendían toda la lógica aristotélica, con excepción de las *Categorías* y el *Peri Hermeneias*, se conocieron hasta mucho después como la *ars nova*. Y, de aquí en adelante, el repertorio de obras lógicas estudiadas en París, Oxford y otras universidades incluirían el *Organon*, la *Eisagogé* de Porfirio, los tratados *De Divisionibus* y *De Differentiis Topicis* de Boecio y el *Liber de Sex Principiis* atribuido a Gilberto de la Porrée. Este último era un tratado compuesto hacia mediados del siglo XII, que intentaba suplementar a las *Categorías* aristotélicas ocupándose de aquellos encabezamientos que Aristóteles no había estudiado con detalle.

La primera obra medieval que toma en cuenta el *Organon* en su totalidad es el *Metalogicon* de Juan de Salisbury, escrito en 1159. Pretende presentarse como una defensa de la lógica (concebida como *loquendi vel disserendi*

146 M. Grabmann proporciona alguna información sobre once tratados primitivos en su artículo "Bearbeitungen und Auslegungen der Aristotelischen Logik aus der Zeit von Peter Abaelard bis Petrus Hispanus", *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1937, N. 5. Pero L. Minio-Paluello ha coleccionado copias fotográficas de otras muchas obras de este período, procediendo a la publicación de una serie de textos y estudios bajo el título general de *Twelfth Century Logic* (Roma, 1956-).

ratio) contra los ataques de un crítico ignorante, pero su principal valor estriba en la información que suministra acerca del estado de los conocimientos sobre lógica durante el siglo XII. En 1136, cuando aún era un muchacho, Juan fue estudiante de lógica en París y quedó impresionado por la brillantez de los maestros cuyas aulas frecuentó. Abelardo había vuelto a enseñar por aquella época, pero también había otros profesores apasionados por la dialéctica. Al retornar doce años más tarde, le sorprendió encontrar a muchos de ellos enzarzados en debatir las mismas cuestiones de su juventud, como si nada hubiesen aprendido en ese tiempo y en cambio hubieran olvidado su inicial espíritu de morigeración. «Y así» —escribiría— «la experiencia me enseñó una manifiesta conclusión, a saber, que si bien la dialéctica es capaz de promover otros estudios, cuando permanece encerrada dentro de sí se queda exangüe y torna estéril, sin inducir al alma a sacar fruto de la filosofía sino por el contrario constriñéndola a dar vueltas en torno de lo mismo» [147].

Cuando se escribió esto, la *Física* y la *Metafísica* de Aristóteles no habían sido incorporadas todavía a los programas de enseñanza en las universidades, tal y como lo llegarían a ser al cabo de medio siglo, por lo que es muy posible que la instrucción filosófica al uso resultase insuficiente. Pero, en los doscientos años que siguieron, el entusiasmo de los dialécticos dio un formidable impulso al desarrollo de la filosofía. Nosotros no somos los llamados a decidir si los resultados obtenidos justificaron un esfuerzo intelectual de tal magnitud. Acaso los sistemas de Santo Tomás de Aquino y Juan Duns Escoto únicamente nos merezcan la reluctante admiración que concedemos a las pirámides de Egipto y al palacio de Versalles. Y se podría quizá pensar que los millares de jóvenes talentos que en las universidades medievales batallaban con abstracciones sutilísimas hubieran rendido más provecho de dedicarse a los estudios literarios, confinados por aquel entonces a las escuelas de gramática. Pero, como contrapartida, también puede argüirse que los ejercicios de las universidades medievales preparaban el camino a la ciencia moderna, contribuyendo a afinar el raciocinio humano y conduciendo a los escolares a interesarse por los métodos de adquisición del conocimiento. Pues, en efecto, es un error suponer que todos los filósofos medievales se afanaban en la construcción de sistemas de metafísica deductiva y que la ciencia experimental surgió a partir de cero y de repente al hacer Galileo, u otro ilustre representante del Renacimiento, la primera observación con el fin de refutar alguna generalización de Aristóteles o Galeno. Suponer tal sería lo mismo que creer que Lutero fue el primero en sugerir la reforma de la Iglesia.

Una vez traducidos al latín los textos de Aristóteles y sus comentaristas árabes, los filósofos de Occidente se pusieron manos a la obra de digerir y asimilar todo este nuevo material, elaborando al efecto no sólo comentarios sino también literatura de su cosecha, como *tractatus* sobre tales o cuales temas especializados y *summulae* o compendios sistemáticos. Por lo que hace a la lógica formal, la obra de Aristóteles que mayor impresión produjo entre los lógicos del siglo XII no fueron —como tal vez cabría haber esperado— los *Primeros Analíticos*, sino los *De Sophisticis*

147 *Metalogicon*, II, 10 (ed. Migne 869 B).

Elenchis. La razón de ello es que este último tratado venía a llenar un vacío en la colección de textos con que hasta la fecha se contaba. Los medievales estaban ya familiarizados con los tópicos y la silogística por lo que habían leído en los escritos de Boecio, pero no habían dispuesto nunca hasta la fecha de un texto dedicado a los sofismas y lo que allí encontraron resultó de su agrado. En la teoría del silogismo tenían ciertamente ocasión de lidiar con la doctrina de los silogismos modales, que era para ellos nueva y se presentaba repleta de dificultades, pero a primera vista parecía haber poco —si había algo— que poder añadir a lo ya dicho por Aristóteles. Por otra parte, así como en tiempos de Abelardo la teoría de los tópicos —por ser más imperfecta que la de los silogismos— dejaba mayor campo a las innovaciones, del mismo modo ahora la sofística —o estudio de los sofismas— incitaba a los filósofos a ejercitar su ingenio en la confección y resolución de nuevos rompecabezas. Por lo demás, ya antes incluso del auge y expansión de la *ars nova* era apreciable ese interés por los sofismas en la *Ars Disserendi* escrita en 1132 por el inglés Adán de Balsham (apodado también Parvipontano por haber profesado en el Petit Pont de París). De acuerdo con este autor, que deliberadamente rehuía la terminología tradicional y se preciaba de su originalidad, una de las finalidades capitales del estudio de la lógica consistiría en adiestrarnos en el dominio del lenguaje para evitar ser engañados por sofismas [148]. Una empresa semejante obliga, como es natural, a prestar atención a los diversos modos como podrían surgir tales sofismas, lo que a su vez exige dedicar tiempo y paciencia a la dilucidación de las sutilezas de nuestros usos ordinarios del lenguaje. Una interesante paradoja en la que incidentalmente repara Adán de Balsham es la de la posibilidad de que un conjunto de cosas posea un subconjunto propio de su misma magnitud [149]. Con posterioridad, una vez estimulado el apetito con la lectura del *De Sophisticis Elenchis* aristotélico, la pasión por los sofismas llegó a ser tan grande que los vemos introducidos en toda suerte de contextos. Gualterio Burleigh por ejemplo, que escribió su *De Puritate Artis Logicae Tractatus Longior* en el siglo XIV, los diseminó con tal prodigalidad a lo largo de la última parte de su obra que en algunas secciones de la misma alcanzaban a ocupar más de la mitad del espacio total. Incluso se llegaron a componer colecciones de *aurea sophismata*. Mas los sabores picantes acaban por empachar y hacerse insípidos, y lo que en un comienzo pareciera fascinante tornaría al fin a resultar estúpido e insoportable. En el Renacimiento, la ocupación con la sofística vino a ser tenida por el más deleznable de los ingredientes de la educación medieval.

De entre los *sophismata*, merecieron especial atención ciertas variantes de la paradoja del Mentiroso, que en la Edad Media recibirían el nombre de *insolubilia*. Adán de Balsham menciona como bien conocido el rompecabezas del hombre *qui se mentiri dicit* [150], al que luego se habrían de dedicar numerosos tratados. Pero hasta el momento no es gran cosa lo que se ha trabajado sobre los textos disponibles, por lo que ni siquiera nos

---

148 Cf. L. Minio-Paluello, "The Ars Disserendi of Adam of Balsham, Parvipontanus", *Mediaevai and Renaissance Studies*, III (1954), pp. 116-69, así como su *Twelfth Century Logic*, I (1956), que contiene la primera impresión del texto íntegro. Nuestro autor es mencionado por Juan de Salisbury en su *Metalogicon*, II, 10.

149 *Ars Disserendi*, ed. L. Minio Paluello, p. 92. Cf. I. Thomas, "A Twelfth Century Paradox of the Infinite", *Journal of Symbolic Logic*, XXIII (1958), pp. 133-4.

150 *Ars Disserendi*, ed. cit., p. 107.

es dado decir cuándo o cómo se suscitó el estudio de los *insolubilia*. La paradoja del Mentiroso no se halla formulada en los textos de Aristóteles; y, aunque el pasaje del *De Sophisticis Elenchis* en que se habla de «la historia del hombre que miente y dice la verdad al mismo tiempo» pudiera acaso referirse a ella, lo cierto es que sólo con un derroche de esfuerzo y buena voluntad daría pie dicho texto para reconstruirla [151]. San Pablo se refiere ciertamente a la versión de Epiménides, pero al parecer sin reparar en que se trata de una paradoja; pues, en efecto, escribe: «Uno de entre ellos mismos... dijo 'Los cretenses son siempre mentirosos...'. Este testimonio es veraz» [152]. Es posible, por tanto, que la paradoja fuese objeto de un nuevo descubrimiento en el siglo XII. En cualquier caso, los lógicos medievales no se contentaron con sus versiones más elementales, como *Ego dico falsum*, e idearon variantes más complicadas como «Sócrates dice 'Lo que dice Platón es falso' y Platón dice 'Lo que dice Sócrates es verdad', sin añadir ninguno de ellos nada más. ¿Es verdadero o falso lo que dice Sócrates?» Y tuvieron plena conciencia de que la dificultad surge del intento de otorgar a la proposición controvertida una cierta capacidad de autorreferencia, pues definían al *insolubile* como «propositio habens super se reflexionem suae falsitatis aut se non esse veram totaliter vel partialiter illativa» [153]. Pero no había, en cambio, una doctrina unánime sobre el modo de encarar tales paradojas desde la teoría del significado y la verdad. Por el contrario, los lógicos medievales sugirieron una diversidad de modos de abordar la cuestión. Así, en un manuscrito anónimo de comienzos del siglo XIV se nos dice:

> «Est autem triplex oppositio circa insolubilia, scilicet: cassatio, restrictio, solutio secundum quid et simpliciter... Cassantes autem dicunt quod dicens se dicere falsum nihil dicit... Restringentes dicunt quod littera *falsum* non potest supponere pro hac oratione cuius est pars, nec similiter pars pro toto» [154].

La *cassatio*, o doctrina de la nulidad de lo afirmado, parece representar el punto de vista correcto, si bien aquí (esto es, en el fragmento impreso de donde proviene nuestra cita) no se aducen las razones que obran en su favor. La *restrictio*, formulada en términos de la teoría de la *suppositio*, resulta por su parte demasiado astringente, puesto que injustificadamente excluye un tipo de autorreferencia tan inocua como la oración «Lo que ahora estoy diciendo es una frase en castellano». La tercera solución es una insatisfactoria sugerencia extraída del pasaje de Aristóteles mencionado más arriba. A comienzos del siglo XV, el prolífico autor Pablo de Venecia enumeraba quince procedimientos diferentes mediante los que diversos lógicos habían intentado resolver el problema. Algunos de ellos revisten escasa entidad y otros son simples variantes de sugerencias bien conocidas, como la de Aristóteles. De los quince, hay diez cuyos autores no han podido ser identificados por Prantl; y, de esos diez, uno (el quinto en la lista de Pablo) parece identificarse con la teoría de la casación antes citada, mientras otro (el octavo en la lista de Pablo) consiste en el principio, de

---

151 *De Sophisticis Elenchis*, 25 (180b2-7).

152 *Epistola a Tito*, I, 12-13.

153 Pablo de Venecia, *Logica Magna*, p. 194 *v*. B; parcialmente citado por Prantl, *Geschichte der Logik*, IV, p. 139.

154 *Bibliothèque Nationale, Cod. Lat.* 16617, antes *Codex Sarbonnensis* 1797; citado por Prantl, *Geschichte der Logik*, IV, p. 41. M. Grabmann opina que este tratado pudiera deberse a Guillermo de Shyreswood, en cuyo caso habría sido compuesto con toda probabilidad antes de mediados del siglo XIII. La palabra *littera* del texto de Prantl es presumiblemente un signo de entrecomillado del tipo de las vocales en la época *li* o *lv*.

análoga factura, según el cual «ningún *insolubile* es verdadero ni falso, puesto que nada de ese género constituye una proposición» [155]. Puesto que Prantl fue por lo menos un laborioso recopilador de referencias, cabe pensar que lo que él no logró encontrar nadie podría lograrlo. Por otra parte, es también muy posible que haya por ahí un detallado estudio acerca de la casación a la espera de que alguien lo edite. En el estado actual de los estudios medievales, no hay modo de pronunciarse con seguridad sobre qué es lo que se conserva o se ha perdido de la lógica de la época.

Cuando las obras no estrictamente lógicas de Aristóteles fueron traducidas, resultaron en un primer momento sospechosas por adosárseles la interpretación monopsiquista o panteísta del filósofo árabe Averroes (Ibn Rusd, 1126-98), que vivió y trabajó en España. Pero a lo largo del siglo XIII quedarían libres de sospecha y reconciliadas con el cristianismo por obra de San Alberto Magno (1193-1280) y Sto. Tomás de Aquino (1225-74). En las controversias de este período, la doctrina del alma intelectiva del *De Anima* aristotélico jugó un papel de capital importancia, concediéndose especial atención al aserto de Aristóteles de que el alma cobra conocimiento de las cosas al recibir sus formas (*species*) en sí misma. Semejante caracterización de la vida mental fue espontáneamente interpretada como una elaboración de las familiares concepciones del primer capítulo del *De Interpretatione*, en que se dice que el alma posee estados que constituyen en algún sentido copias de las cosas externas. De este modo, la vieja teoría de los tres géneros de discurso —escrito, hablado y mental— cobraría nueva vida. El pensamiento, según se sostenía universalmente, procede por medio de *propositiones mentales* formadas a partir de signos naturales del alma, y aquí de nuevo fue importante la contribución árabe a la formulación elaborada de la teoría. En el árabe de Avicena (Ibn Sīnā, 979-1037), una forma del alma venía a identificarse con una *ma'na*, esto es, un significado o una noción. Cuando las obras de Avicena se tradujeron al latín, el término *ma'na* se vertió en todos los contextos por *intentio*, que llegó así a adquirir en la epistemología medieval el sentido técnico de «signo natural de la mente». Y, lo que es más, así como Porfirio había distinguido entre términos de primera y segunda imposición, de la misma manera distinguía Avicena entre signos naturales de primera y segunda intelección, diciendo que estos últimos constituyen nociones abstractas —como las de *genus* y *species*— que los hombres aplican a los primeros. La lógica —sostenía— se ocupa únicamente de las *ma'ani* de segunda intelección, tal y como nosotros nos servimos de ellas en el razonamiento que permite pasar de lo conocido a lo desconocido:

«Subiectum vero logicae, sicut scisti, sunt intentiones intellectae secundo, quae apponuntur intentionibus primo intellectis, secundum quod per eas pervenitur de cognito ad incognitum, non in quantum ipsae sunt intellectae et habent esse intelligibile, quod esse nullo modo pendet ex materia, vel pendet ex materia sed non corporea» [156].

Aquí se halla el origen de la discusión acerca de las primeras y segundas intenciones que habría de proseguirse hasta el fin de la lógica medieval. La distinción entre unas y otras constituye esencialmente un des-

---

155 *Logica Magna*, p. 192*r*. B. e.s.; citado en la *Geschichte der Logik* de Prantl, IV, pp. 138-9.
156 *Avicennae Opera*, ed. Venecia, 1508, *Philosophia Prima*, I, 2, p. 70*v*. A; citado por Prantl, *Geschichte der Logik*, II, p. 328, pero con omisión de la partícula *non* antes de *in quantum*.

arrollo de la vieja teoría de los tres géneros de discurso, que nunca dejó de estar presente en los lógicos medievales y hay que considerar como un supuesto básico de su caracterización de la lógica como *scientia sermocinalis*. El propio Avicena habló de las formas-en-el-pensamiento como si éstas se hallasen en posesión de rasgos lógicos que no podrían poseer en tanto que formas-en-sí ni tan siquiera en tanto que formas-en-los-individuos singulares:

«In eis autem quae sunt extra non est essentialitas nec accidentalitas omnino, nec est aliquod complexum nec incomplexum nec propositio nec argumentatio nec cetera huiusmodi. Cum autem volumus considerare ad hoc ut sciamus eas, necesse est eas colligere in intellectu, et tunc necessario accident illis dispositiones quae sunt propriae tantum intellectui» [157].

Con posterioridad, la analogía entre pensamiento y lenguaje llegaría a ser tomada tan en serio que se pensaba que las proposiciones mentales eran pensamientos regidos por una gramática semejante a la que rige las proposiciones escritas o habladas. Así, por ejemplo, Pedro D'Ailly (1350-1425) afirma que los términos mentales —en el estricto sentido de la expresión— admiten la distinción entre nombres y verbos en no menor medida que los extramentales, e incluso que los primeros son susceptibles de flexión y poseen casos:

«Terminorum mentalium proprie dictorum aliqui naturaliter significant nominaliter et tales naturaliter sunt nomina, aliqui naturaliter significant verbaliter et tales sunt naturaliter verba, et sic de aliis partibus orationis... Item aliquis naturaliter est nominativi casus, alter genitivi, et sic de aliis» [158].

Un término mental de esta suerte se supone que es un *conceptus naturaliter significans aliquid vel aliqua*, siendo considerado como término mental *proprie dictus* para distinguirlo de la imagen de una palabra oral o gráfica. Una imagen semejante podría ser descrita como un signo natural de la palabra de la cual es imagen, pero ya que se trata de una copia de esa palabra también cabría describirla como un signo convencional de lo convencionalmente significado por la misma:

«Terminus mentalis improprie dictus est conceptus vocis vel scripturae... et, licet significet naturaliter proprie vocem vel scripturam, cuius est naturalis similitudo, potest tamen cum hoc significare ad placitum et subordinari alteri conceptui... v. gr. conceptus huius vocis *homo* naturaliter proprie significat illam vocem *homo*, sed, ad placitum significat omnes homines et sic subordinatur in significatione illi conceptui qui naturaliter est repraesentativus omnium hominum» [159].

Pedro D'Ailly declara luego que los adjetivos «verdadero» y «falso» son primariamente aplicables a las proposiciones mentales propiamente dichas, pero su punto de vista no fue universalmente aceptado. Algunos de sus contemporáneos, en efecto, prefirieron seguir a Gregorio de Rimini (muerto el 1358) y sostener que la verdad y la falsedad corresponden básicamente a los contenidos proposicionales, a los que daban la denominación de *complexe significabilia* [160]. Como vemos, por tanto, los problemas que

---

157 *Avicennae Opera*, ed. cit., *Logica*, p. 2*r*. B; citado por Prantl, ibid.

158 *Conceptus*, citado por Prantl, *Geschichte der Logik*, IV, p. 109. La doctrina del texto no coincide con la asignación estoica de casos a las partes de los λεκτα.

159 Ibid.

160 Para más detalles, cf. Pablo de Venecia, *Logica Magna*, I, 10 *(De Significato Propositionis)*, pp. 162*r*. A-167*v*. B.

Abelardo suscitara seguían debatiéndose trescientos años más tarde. Si Juan de Salisbury hubiera vivido por espacio de diez generaciones en lugar de dos, habría tenido ocasión de comprobar cómo las cuestiones disputadas por los lógicos eran aún las mismas de su juventud.

De entre los manuales de lógica confeccionados tras la introducción de la *ars nova*, el más antiguo impreso hasta la fecha son las *Introductiones in Logicam* o *Summulae* de Guillermo de Shyreswood [161]. Esta obrita, que no pasa de las setenta y cinco páginas en el texto de su moderna impresión, fue compuesta por un inglés en la primera mitad del siglo XIII y redactada en París probablemente. Se divide en seis partes que respectivamente versan sobre las proposiciones, los predicables, los silogismos, los tópicos dialécticos, las *proprietates terminorum* y las falacias.

En el apartado correspondiente a las proposiciones se dice que para la verdad de una proposición conjuntiva (*copulativa*) se requiere que ambas conjuntas sean verdaderas, mientras que para la verdad de un proposición disyuntiva basta con que lo sea una de sus disyuntas; en cuanto a la verdad de una proposición condicional, se requiere *quod cum sit antecedens sit consequens*. Las interrelaciones de los cuantificadores *omnis*, *quidam* y *nullus*, así como los modos como éstos pueden combinarse con *non*, son asimismo examinados, resumiéndose los resultados del examen en los siguientes versos mnemotécnicos:

> Aequivalent *omnis, nullus-non, non-aliquis-non.*
> *Nullus, non-aliquis, omnis-non* aequiparantur.
> *Quidam, non-nullus, non-omnis-non* sociantur.
> *Quidam-non, non-nullus-non, non-omnis* adhaerent [162].

Al ocuparse de la modalidad, el autor sigue a Abelardo distinguiendo entre proposiciones que adscriben *modi* (necesidad, posibilidad o imposibilidad) a *dicta* y proposiciones que adscriben modalmente (esto es, de manera cualificada) características a sujetos otros que *dicta*. Pero prosigue diciendo que una proposición del primer género *secundum constructionem* (y por lo tanto no estrictamente modal, sino más bien *de modo*) podría considerarse, sin embargo, en determinados contextos como modal *secundum rem*, tal y como ocurriría por ejemplo en el contexto del razonamiento silogístico cuando éste es caracterizado como universal o particular respecto de algo otro que un *dictum*.

En el apartado dedicado a la doctrina de los predicables nos encontramos con el esquema divisorio que comúnmente se conoce como árbol de Porfirio, esto es, el célebre cuadro en que mediante una serie de divisiones dicotómicas nos sería dado descender de la *substantia* —pasando por el *corpus*, el *corpus animatum*, el *animal*, el *animal rationale*— al *animal rationale mortale* u *homo*, que representa la *species infima* que contiene a Sócrates, Platón y otros hombres singulares. La construcción de semejante árbol se inspira en un pasaje de la *Eisagogé* de Porfirio [163], siendo probablemente utilizada en la exposición del comentario de Boecio. En la edi-

---

161 Editadas por M. Grabmann en *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie, Phil.-Hist. Abteilung*, 1937, Heft 10. Su introducción contiene información acerca del autor y el manuscrito (*Bibliothèque Nationale, Cod. Lat.* 16617, antes *Codex Sorbonnensis* 1797).

162 En la tercera y cuarta líneas del texto impreso de Grabmann, p. 39, se lee *ullus* en lugar de *nullus*.

163 *Commentaria in Aristotelem Graeca*, IV (I), ed. A. Busse, p. 4, ll. 21-25.

ción de las obras de Boecio impresa en Basilea en 1570, aparece un árbol cuyas raíces no solamente alojan a *Plato* como nombre de un hombre, sino también —y de manera un tanto inapropiada— a *Brunellus* como nombre de un asno singular.

En el apartado relativo a los silogismos hacen por vez primera aparición los versos mnemotécnicos *Barbara, celarent*, etc., por el siguiente orden:

> Barbara celarent darii ferio baralipton
> Celantes dabitis fapesmo frisesomorum;
> Cesare campestres festino baroco; darapti
> Felapton disamis datisi bocardo ferison.

Cada una de estas palabras se toma por la fórmula de un modo válido, interpretándosela de acuerdo con las reglas que siguen. Las tres primeras vocales indican la cantidad y cualidad de las proposiciones que intervienen en la confección del silogismo, donde *a, e, i, o* representan respectivamente la condición de universal afirmativa, universal negativa, particular afirmativa y particular negativa. La consonante inicial de cada fórmula, a partir de la quinta, indica que el modo ha de ser reducido a uno de los cuatro primeros, a saber, aquel cuya inicial coincida con la del modo a reducir. La *s* que aparezca inmediatamente a continuación de una vocal indicará que la proposición correspondiente ha de ser convertida por conversión simple en el curso de la reducción. Cuando sea *p* la letra que figure en semejante posición, la proposición en cuestión habrá de convertirse parcialmente o *per accidens*. Una *m* entre las dos primeras vocales de la fórmula sirve para indicar que las premisas habrán de transponerse. Finalmente, la *c* tras una de las dos primeras vocales indicará que la premisa de que se trate ha de ser reemplazada por su negación en orden a facilitar la reducción *per impossibile* del modo. La presente distribución de los versos ofrece el inconveniente de que la división de las líneas no corresponde exactamente a la de las figuras, lo que dio pie a muchos autores a ejercitar su ingenio sugiriendo diversas correcciones y mejoras. A pesar de su interés por el problema de la modalidad y su familiarización con los *Primeros Analíticos*, el autor no intenta abordar para nada la silogística modal.

Los tópicos se discuten de acuerdo con los epígrafes acostumbrados, enumerándose las máximas en el estilo usual, pero —a diferencia que en la obra de Abelardo— no hay mención de las *consequentiae* [163]. La aplicación de una máxima a un caso particular da lugar siempre a un argumento del tipo de «Socrates est homo, ergo Socrates est animal» o similar. Y, cuando el argumento parece requerir una premisa suplementaria, se le provee de ella de manera que resulte posible la confección de un silogismo categórico.

En el apartado *De Proprietatibus Terminorum* nos encontramos con una novedad de la lógica medieval que habrá de ser objeto de consideración aparte. En cuanto al apartado *De Fallaciis*, se trata de la caracterización aristotélica de los sofismas presentada con un surtido de ejemplificaciones de nuevo cuño que demuestran el vivo interés despertado por el tema. Como ilustración del equívoco se nos ofrece el divertido silo-

[163] El término *consequentia* aparece, por cierto, empleado alguna que otra vez (ej., p. 99 del texto de Grabmann), pero con el sentido de la *consecutio* abelardiana.

gismo: «Quicumque sunt episcopi sunt sacerdotes; isti asini sunt episcopi; ergo isti asini sunt sacerdotes». Los asnos, y Brunellus en particular, fueron por lo que se ve un motivo predilecto de los lógicos medievales.

En el manuscrito que contiene el único texto medieval conocido de las *Introductiones* se incluyen asimismo otras obras de lógica que se ha pensado puedan corresponder a Guillermo de Shyreswood. Son, a saber, tratados sobre los *syncategoremata*, los *insolubilia* y las *obligationes*, materias todas ellas a las que los autores medievales dedicaron abundantes trabajos específicos. Los *syncategoremata* son partículas tales como «y», «o», «no», «si», «todo», «algún», «solo» y «excepto», que no pueden funcionar como términos pero revisten especial importancia desde un punto de vista lógico por contribuir a poner de manifiesto la forma de los enunciados en los cuales intervienen. Nosotros ya nos hemos referido a un pasaje de las *Introductiones* en el que Guillermo de Shyreswood se ocupa de los resultados de combinar los cuantificadores con el signo de negación. El hecho de que los lógicos medievales considerasen necesario dedicar obras por separado a estas partículas demuestra que supieron apreciar su importancia para la lógica formal. Pero probablemente sea un error suponer que tales signos fueran universalmente reconocidos como formales en un sentido muy estricto, pues también las palabras *incipit* y *desinit* (esto es, «comienza» y «cesa») se hallan algunas veces incluidas entre las *dictiones syncategorematicae*, por más que ambas comportan indicaciones de tiempo [164]. De los *insolubilia* se habló ya más arriba. El tratado atribuido a Guillermo de Shyreswood es precisamente el que contiene la exposición de los tres procedimientos de solución —*cassatio*, *restrictio* y *solutio secundum quid et simpliciter*— a que antes aludimos. Las *obligationes* son compromisos adquiridos por el participante en una disputa o condiciones que han de ser observadas en el curso de ésta. Los lógicos de la época analizaban escrupulosamente el alcance de estas o aquellas concesiones hechas a efectos argumentales, como la concesión —pongamos por caso— de que una proposición dada es dudosa, e insistían en la necesidad de mantener a lo largo de la discusión una estricta coherencia con los principios asumidos. Esta faceta de la lógica medieval ha recibido hasta ahora escasa atención de los investigadores contemporáneos, pero por su temática podría tal vez parangonarse al tratamiento aristotélico del debate en sus *Tópicos* y *De Sophisticis Elenchis*.

Guillermo de Shyreswood parece haber gozado en su tiempo de un éxito considerable y Rogerio Bacon, escribiendo de él en 1267 como si todavía viviese, llegó a decir que era mejor filósofo que Alberto el Grande. Aunque pudiera ser que esta opinión fuese movida por prejuicios, ya que Rogerio era franciscano y Alberto dominico, por nuestra parte hemos de conceder que Guillermo de Shyreswood fue un buen lógico. Pero, pocos años más tarde, Pedro Hispano —que llegó a ser Papa con el nombre de Juan XXI y murió en 1277— escribió un manual, bajo el título de *Summulae Logicales*, que acabaría alcanzando mayor fama e influjo que el de Guillermo de cara a la posteridad. Las *Summulae* de Pedro Hispano se convirtieron en la pauta de los manuales de lógica a lo largo de toda la Edad Media subsiguiente, siendo todavía usadas a comienzos del siglo XVII,

[164] Walter Burleigh, *De Puritate Artis Logicae Tractatus Longior*, ed. Ph. Boehner, *Franciscan Institute Publications*, n. 9 (1955), p. 191.

en el que de las mismas circulaban nada menos que 166 ediciones impresas [165]. Su mayor éxito puede deberse al hecho de contener más y mejores versos mnemotécnicos que la obra de Guillermo de Shyreswood. En el siglo xv llegaron incluso a ser traducidas al griego, con versos y todo, con el curioso resultado de que Prantl —cuatrocientos años más tarde— tomase dicha traducción por un original bizantino, elaborando una teoría completamente gratuita acerca del influjo del Este sobre el Oeste en el siglo XIII [166]. Las *Summulae* constan de doce tratados, seis de ellos relativos a temas aristotélicos (composiciones, predicables, categorías, silogismos, tópicos y falacias) y otros seis sobre temas específicamente medievales (suposición, partículas relativas, ampliación, apelación, restricción y distribución). En algunas ediciones, estos últimos tratados aparecen agrupados bajo el rótulo *De Terminorum Proprietatibus* o *Parva Logicalia*. En líneas generales, el tratamiento de unos y otros temas es muy similar al de Guillermo de Shyreswood, en el que acaso pueda haberse inspirado. Los *Analíticos Posteriores* de Aristóteles son ignorados por completo, y el procedimiento seguido es puramente formal en el sentido de no incluir consideraciones epistemológicas acerca de la demostración al estilo aristotélico. Pero también hay interesantes diferencias entre ambos manuales. Como Abelardo, Pedro interpreta los enunciados condicionales como aseveraciones de una conexión necesaria: para la verdad de un condicional, afirma, se requiere *quod antecedens non possit esse verum sine consequente*, de suerte que *omnis conditionalis vera est necessaria* [167]. Pero en cambio no sigue a Abelardo, como lo hacía Guillermo, en la teoría de las proposiciones modales.

Otro lógico interesante de la misma generación es Roberto Kilwardby, dominico, que llegó a arzobispo de Canterbury. No es autor de ningún influyente manual, pero lo hasta ahora publicado de su comentario a los *Primeros Analíticos* revela que se trata de un pensador agudo. En particular, se debe a él la primera prueba conocida de un principio de conversión por medio de un silogismo con dos términos. Con el propósito de defender el tratamiento aristotélico de la conversión contra la acusación de circularidad, de que se le hizo objeto ya en la antigüedad, comienza por explicar el uso aristotélico de la *écthesis* para proseguir luego:

> «Alio modo potest idem declarari per syllogismum in quarto primae et per hoc primum principium *Non de eodem simul vera est affirmatio et negatio* sic. Si nullum B est A et aliquid A est B ex hypothesi, ergo aliquid A non est A, quod est contra primum principium. Hypothesis ergo non potest stare cum prima, quia ex positione eius sequitur maximum inconveniens, ut negatio eiusdem a se» [168].

Es posible que este modo de razonar le fuera sugerido por la yuxtaposición en el propio argumento aristotélico de las dos proposiciones que ahora le sirven de premisas para una *reductio ad impossibile* silogística. Pero, una vez reconocida la posibilidad de un razonamiento semejante, no es difícil caer en la cuenta de que cabría probar directamente y sin rodeos un prin-

---

165 J. P. Mullaly, *The Summulae Logicales of Peter of Spain, Publications in Mediaeval Studies*, VIII (1945), pp. 133-58.
166 *Geschichte der Logik*, III, p. 33.
167 *Summulae Logicales*, ed. I. M. Bochenski, § 23.
168 I. Thomas, "Kilwardby on Conversion", *Dominican Studies*, VI (1953), pp. 56-76.

cipio de conversión mediante un silogismo que tuviese por una de sus premisas el familiar principio de identidad. Algo más avanzado el mismo siglo, Alberto Magno nos informa de que algunos lógicos contemporáneos trataban de justificar la conversión como un entimema, o silogismo abreviado, afirmando del primer caso discutido por Aristóteles:

«Efficitur syllogismus per additionem minoris propositionis sic: *Nullum B A; omne A A; ergo nullum A B*... et est iste syllogismus primus secundae figurae... Similiter est de enthymemate quod est conversio universalis affirmativae, ...et fit syllogismus primus tertiae figurae per additionem maioris sic: *Omne B A; omne B B; ergo aliquid A B*» [169].

El propio Alberto se resiste a aprobar este procedimiento por creerlo circular. La conversión —nos dice— se supondría que queda validada mediante silogismos de la segunda y la tercera figuras, cuando a su vez éstas habrían de validarse a través de su reducción a la primera figura con ayuda de la conversión. Como nosotros ya sabemos, la conversión no es realmente necesaria para la reducción de los silogismos de la segunda o tercera figuras a la primera, pues el propio Aristóteles demostró cómo siempre cabría lograr tal reducción por el método indirecto. Pero la conversión, en cualquier caso, es necesaria para llevar a cabo el programa aristotélico de una completa reducción de todos los silogismos a *Barbara* o *Celarent*.

El enfoque de la modalidad a la usanza de Abelardo y Guillermo de Shyreswood reaparece en el comentario de San Alberto Magno a los *Primeros Analíticos* y en las obras de Sto. Tomas de Aquino. Ya que este último es considerado por muchos como la principal figura de la filosofía cristiana, cuyas obras únicamente cederían a la Biblia en importancia, sería interesante reparar en su tratamiento de este problema lógico y la ulterior aplicación de sus resultados en el dominio de la teología. En su opúsculo *De Modalibus* [170], Sto. Tomás distingue entre proposiciones modales *de dicto* y *de re*. Por proposición modal *de dicto* entiende, naturalmente, un enunciado de segundo orden como el que cabría expresar por medio de la fórmula «Es posible que Sócrates corra». La terminología es probable que proceda de Guillermo de Shyreswood o Pedro Hispano. Mas, por desgracia, los filósofos medievales raramente reconocen sus deudas con los autores de su misma época, aunque por lo demás citen gustosamente a Aristóteles y los Padres de la Iglesia en apoyo de sus opiniones. En cuanto a la proposición modal *de re*, Sto. Tomás entiende por tal aquella en la que el signo modal tiene un carácter esencialmente interno. Dicho signo puede ser un adverbio, como en «Sócrates posiblemente corre»; pero, en latín al menos, también podría ser expresado por medio de una cláusula predicativa desplazada hacia el interior de la frase, como en *Socratem possibile est currere*. A diferencia de Abelardo y Guillermo de Shyreswood, Sto. Tomás no pretende que una de aquellas dos variantes de la modalidad sea más propiamente modal que la otra, pero sigue a Guillermo al sostener que una proposición modal *de dicto* es siempre singular, dado que posee un *dictum* por sujeto, mientras que una proposición modal *de re* podría

---

169 Alberto Magno, *Liber I Priorum Analyticorum, Tractatus I*, cap. VIII (*Opera*, ed. Borgnet, I, p. 470).

170 Editado por I. M. Bochenski en "Sancti Thomae Aquinatis de Modalibus Opusculum et Doctrina", *Angelicum*, XVII (1940), pp. 180-218. La atribución a Santo Tomás de esta obra no goza de reconocimiento universal.

ser universal o particular de acuerdo con el signo de cantidad que en cada caso la preceda.

Los ejemplos con que Sto. Tomás ilustra su distinción en el opúsculo *De Modalibus* no son muy esclarecedores, pero encontramos nuevos datos acerca de la misma en un pasaje de su *Summa Contra Gentiles* destinado a desarticular una objeción contra el conocimiento divino de los futuros contingentes:

«Si unumquodque a Deo cognoscitur sicut praesentialiter visum, sic necessarium erit esse quod Deus cognoscit, sicut necessarium est Socratem sedere ex hoc quod sedere videtur. Hoc autem non necessarium est absolute, vel, ut a quibusdam dicitur, necessitate consequentis, sed sub conditione, vel necessitate consequentiae. Haec enim conditionalis est necessaria: *Si videtur sedere, sedet.* Unde et, si conditionalis in categoricam transferatur ut dicatur *Quod videtur sedere necesse est sedere,* patet eam de dicto intellectam et compositam esse veram, de re vero et divisam esse falsam. Et sic in his et in omnibus similibus quae Dei scientiam circa contingentia oppugnantes argumentantur secundum compositionem et divisionem falluntur» [171].

El sentido del pasaje para nuestros efectos está bastante claro. Si Dios tiene presciencia de una proposición acerca del futuro, dicha proposición es necesaria por relación al hecho de haber sido objeto de tal precognición, mas no por ello es absoluta o incondicionalmente necesaria. Pues cuando un predicado pertenece a un sujeto con necesidad incondicional, el hecho de que pueda decirse que pertenece necesariamente a ese sujeto no depende del modo como el sujeto sea descrito, como cuando se le describe, por ej., como una persona de la que Dios sabía de antemano que habría de sentarse en un momento dado. Y sólo en tales casos se podría afirmar que el enunciado modal lo sea *de re.* Cualquier enunciado de necesidad que sea verdadero en su interpretación *de re* lo será asimismo, al parecer, cuando lo interpretemos como necesario *de dicto;* mas la conversa no se sigue. La posición de Sto. Tomás en este punto constituye sin duda una buena réplica a la objeción sometida a consideración, pero cabría realmente desconfiar de que ninguna característica (a menos que se trate de una trivialidad, como la propiedad de ser-cuadrado-o-no-cuadrado) pueda nunca pertenecer a cosa alguna con necesidad absolutamente incondicional, si por tal entendemos «independiente de toda otra característica, o conjunto de características, por medio de la cual o de las cuales quepa identificar a la cosa en cuestión». Tendremos ocasión de retornar a este problema en un capítulo ulterior, cuando examinemos el desarrollo de la lógica modal en nuestro propio siglo. Por el momento, sin embargo, es interesante destacar que —al explicar su distinción— Santo Tomás se sirve del vocablo *consequentia* con el mismo sentido que éste tenía para Abelardo.

El problema de los futuros contingentes y la presciencia divina discutido por Sto. Tomás en el pasaje de su *Summa Contra Gentiles* que acabamos de transcribir no sólo afecta a la teoría de la modalidad, sino envuelve asimismo las cuestiones acerca de la verdad y el principio de tercio excluso que Aristóteles suscitara en su famoso capítulo del *De Interpretatione* sobre la batalla naval. No es sorprendente, pues, que aquel problema fuese objeto de enconados debates por parte de los lógicos medievales. A lo largo del período de aproximadamente un siglo de intensa actividad filosófica trans-

171 *Summa Contra Gentiles,* I, 67. Cf. asimismo su *De Veritate,* q. 2, art. 12, y 4.

currido desde la muerte de Sto. Tomás, todos los grandes escolásticos prestaron su contribución a la discusión de esas cuestiones. Pero sería difícil conceder que dicha discusión haya arrojado nueva luz sobre las dificultades que turbaron a Aristóteles, ya que todas las posiciones en litigio descansaban en el común supuesto de que es admisible hablar de proposiciones temporalmente verdaderas. Y es erróneo afirmar, como lo ha hecho algún historiador, que la idea de una lógica trivalente hubiese sido introducida en esta época por Guillermo de Ockham. Hubo ciertamente filósofos que aceptaron la tesis aristotélica de que una proposición acerca del futuro no es determinadamente verdadera ni determinadamente falsa, por más que la disyunción de esa proposición y su negación sea verdadera. Pero Ockham no figura entre los mismos, y toda su posible contribución al desarrollo de una lógica trivalente vendría a reducirse al intento de explayar lo que Aristóteles tuviera que decir acerca de las proposiciones condicionales «Si Dios sabe que A ha de suceder, entonces A ha de suceder» y «Si A ha de suceder, entonces Dios sabe que A ha de suceder» sobre la base de una serie de suposiciones relativas a la verdad, la falsedad o la indeterminación del antecedente y el consecuente [172].

Por la misma época, las discusiones acerca de la divina omnisciencia promovieron una serie de opiniones contrapuestas sobre el problema de la eternidad de la verdad, esto es, el problema de si lo que en una ocasión es verdadero ha de serlo por siempre. Poco antes de la mediación del siglo XII, Pedro Lombardo se preguntaba en sus *Sentencias* (que habrían de convertirse en el más reputado manual de teología de la Edad Media) «An ea quae semel scit Deus ver praescit semper sciat et praesciat et semper scierit et praescierit», respondiendo que lo que Dios conoce es intemporalmente verdadero, por más que al hablar nosotros de ello hayamos de hacer uso de tiempos verbales diferentes de acuerdo con nuestras diferentes posiciones en el decurso temporal. Así, los profetas predijeron el nacimiento de Cristo, y la misma verdad que ellos anunciaron en tiempo de futuro es hoy reconocida por los cristianos en tiempo de pasado:

> «Nam quod futurum tunc erat nunc praeteritum est, ideoque verba commutanda sunt ad ipsum designandum, sicut diversis temporibus loquentes eandem diem modo per hoc adverbium *cras*, dum adhuc futura est, designamus, modo per *hodie*, dum praesens est, modo per *heri*, dum praterita est... Tempora enim, ut ait Augustinus, variata sunt et ideo verba mutata sunt, non fides» [173].

Esta tesis se halla probablemente sugerida por la doctrina, sustentada por San Agustín y Boecio, de que Dios —al no ser en el tiempo— conoce todos los eventos históricos con igual inmediatez, más o menos de la misma manera como un hombre puede ver a la vez diversas cosas diseminadas ante él en el espacio en un instante dado [174]. Pero parece descansar, en

---

172 La sugerencia de que Ockham se hallara familiarizado con la idea de una lógica trivalente procede de Michalski en "Le problème de la volonté à Oxford et à Paris au XIVe siècle", *Studia Philosophica* II (1937), p. 299. La cuestión ha sido concienzudamente examinada por Philotheus Boehner, en *The Tractatus de Praedestinatione et de Praescientia Dei et de Futuris Contingentibus of William Ockham, Franciscan Institute Publications*, n. 2 (1945), pp. 58 y ss. Su discusión de la misma incluye un útil compendio de los puntos de vista de los más destacados lógicos medievales sobre el problema suscitado por el *De Interpretatione* aristotélico. Cf. también L. Baudry, *La Querelle des futurs contingents (Louvain 1465-1475), Textes inédits* (París, 1950).

173 *Sententiarum Lib. I*, dist. 41, cap. 3. La referencia es a San Agustín, *In Ioannis Evangelium*, XLV, 9.

174 Cf. Boecio, *De Consolatione Philosophiae*, V, 6.

cualquier caso, en consideraciones gramaticales. Según Juan de Salisbury, era doctrina común en la escuela de Bernardo de Chartres, contemporáneo de Abelardo, que palabras tales como *albus, album, albedo* y *albet*, que únicamente difieren entre sí por sus desinencias gramaticales, significan todas ellas una y la misma forma [175]. De donde al parecer venía a concluirse que el tiempo, que se decía *consignificatum* por un verbo, no forma parte de aquello que una oración enuncia y es susceptible de verdad o falsedad. Con posterioridad, algunos comentaristas de las *Sentencias* nos informan de que quienes sostenían aquella tesis eran llamados *nominales*. Ya que Bernardo de Chartres era un platónico, no hay que suponer que semejante rótulo aplicado a sus discípulos tenga nada que ver con el nominalismo. San Buenaventura, en efecto, describe así su posición: «Dicti sunt nominales quia fundabant positionem suam super nominis unitatem» [176].

Quienes rechazaban la opinión de Pedro Lombardo no trataron, por descontado, de poner en tela de juicio la doctrina tradicional de la inmutable omnisciencia divina, sino más bien de hacerla independiente de la tesis «Quod semel est verum semper est verum». Sto. Tomás, por ejemplo, escribe:

«Antiqui nominales dixerunt idem esse enuntiabile Christum nasci et esse nasciturum et esse natum, quia eadem res significatur per haec tria, scilicet nativitas Christi, et secundum hoc sequitur quod Deus quidquid scivit sciat, quia modo scit Christum natum quod significat idem ei quod est Christum esse nasciturum. Sed haec opinio falsa est, tum quia diversitas partium orationis diversitatem enuntiabilium causat, tum etiam quia sequeretur quod propositio quae semel est vera esset semper vera, quod est contra Philosophum, qui dicit quod haec oratio *Socrates sedet* vera est eo sedente et eadem falsa est eo surgente. Et ideo concedendum est quod haec non est vera, *Quidquid Deus scivit scit*, si ad enuntiabilia referatur. Sed ex hoc non sequitur quod scientia Dei sit variabilis. Sicut enim absque variatione divinae scientiae est quod sciat unam et eandem rem quandoque esse et quandoque non esse, ita absque variatione divinae scientiae est quod scit aliquod enuntiabile quandoque esse verum et quandoque esse falsum. Esset autem ex hoc scientia Dei variabilis, si enuntiabilia cognosceret per modum enuntiabilium, componendo et dividendo, sicut accidit in intellectu nostro» [177].

Como sucede con frecuencia en filosofía, las partes contrincantes en la presente disputa están hablando de cosas diferentes. Para zanjar la discusión es menester que recordemos una importante distinción sobre la que llamamos la atención en nuestra caracterización de la lógica estoica, a saber, la distinción existente entre lo que los hombres aseveran y lo que las expresiones verbales significan. Lo que los *nominales* llamaban verdadero en su sentido básico es lo que quienes hablan aseveran o podrían aseverar al proferir una oración-caso de carácter enunciativo, observando con razón que hay un uso establecido de acuerdo con el cual puede decirse que los hombres aseveran una y la misma cosa en instantes diferentes al proferir en éstos oraciones enunciativas con diferentes tiempos verbales. Así, después del nacimiento de Cristo, un cristiano podría defender la verdad de las antiguas profecías alegando: «Cristo ha nacido, como los

175 *Metalogicon*, III, 2.
176 *In I Sent.*, dist. 41, a.2, q.2. Una reconstrucción histórica en el trabajo de M. D. Chenu, "Grammaire et Théologie aux XIIe et XIIIe siècles", *Archives d'histoire doctrinale et littéraire du moyen âge*, 1936, pp. 5-28, de donde hemos extraído la mayor parte de nuestras referencias.
177 *Summa Theologica*, I, XIV, 15. Cf. asimismo sus *Quodlibetalia*, 4 (17).

profetas predijeron». Pero sería, no obstante, extraño pretender —como parecen hacer los *nominales*— que *Christus nasciturus est* y *Christus natus est* significan lo mismo. Pues mientras que los casos de estas dos oraciones-tipo pudieran referirse al mismo acontecimiento, es obvio que lo hacen de manera diferente y hay asimismo un uso bien establecido según el cual podría decirse que quienes profieren aquellas oraciones están haciendo diferentes aserciones. Al dar nosotros cuenta de la aserción de los profetas, tendríamos que servirnos por ejemplo de la expresión «que Cristo nacería» más bien que de la expresión «que Cristo ha nacido». Por su parte, Santo Tomás y cuantos comparten su punto de vista parecen sostener que la verdad en su sentido básico corresponde a una oración-tipo, o a algo significado en el intelecto por esta última, lo que les lleva a concluir con Aristóteles que lo que es verdadero en un instante puede ser falso en otro. El uso que hace Sto. Tomás del término *enuntiabile* es incierto y oscuro, pero parece estar fuera de duda que en ocasiones lo interpreta como una expresión verbal u otra suerte de signo, puesto que habla de *enuntiabilia in voce* o *in intellectu* [178], mereciendo advertirse que en el pasaje antes citado se pasa de hablar de la verdad de un *enuntiabile* a hablar de la verdad de una *propositio* u *oratio*. Ya que, no obstante, la omnisciencia divina no puede recaer sobre expresiones verbales, ni tan siquiera sobre lo significado por éstas, Sto. Tomás se ve obligado a sostener que lo que Dios conoce es que ciertos *enuntiabilia* son verdaderos en determinados instantes y falsos en otros. En este contexto, ello implica obviamente que la posesión de la verdad por parte de un *enuntiabile* en un instante dado constituye en sí mismo un hecho inalterable, lo que de nuevo nos conduce a una posición semejante a la antes bosquejada en nuestra crítica de los *nominales*. Pues, en efecto, afirmar que la frase «Cristo nacerá» era verdadera en tiempos de los profetas no es sino una manera de decir, por medio de un rodeo y refiriéndolo a una expresión verbal, lo mismo que los profetas afirmaban de manera directa, a saber, que Cristo nacería en el futuro, aserción ésta intemporalmente verdadera por más que al hablar de ella como acabamos de hacerlo tengamos que echar mano de la construcción «nacería».

Rogerio Bacon (1214-92) y Raimundo Lull (1235-1315) permanecen al margen de esta corriente general del desarrollo de la lógica medieval, pero no pueden ser pasados por alto en ningún panorama de esta última.

A Rogerio Bacon se le recuerda principalmente como un precursor de Francisco Bacon en la vindicación del método empírico. Por esta razón, se la ha ensalzado a menudo con el fin de detractar a sus contemporáneos. Es cierto, desde luego, que sus trabajos sobre el imán y el arco iris no despertaron mucho apasionamiento en aquella época y que nada logró con su obra magna, mediante la que esperaba interesar al Papa en un vasto plan para la investigación experimental. Pero su interés por el mundo de la naturaleza estaba lejos de constituir un caso único. El estudio del *quadrivium* (aritmética, geometría, astronomía y música) y de la *Física* aristotélica, por elemental y escasamente innovador que pudiera ser, como de hecho lo era comúnmente, mantuvo viva la noción de ciencia descubierta por los griegos; y no faltaron filósofos, especialmente entre los franciscanos ingleses, que trataron de incrementar el patrimonio recibido. Con anterioridad in-

178 Cf. especialmente *Summa Theologica*, I, XVI, 7.

cluso al propio Bacon, contamos con figuras como la de Roberto Grosseteste, que profesó en la escuela franciscana de Oxford alrededor del año 1224 y fue más tarde obispo de Lincoln. El obstáculo más formidable que por aquel entonces se oponía a la generalización del progreso científico no era la influencia de la lógica aristotélica ni ninguna otra manifestación de la herencia cultural griega, sino la obstinada falta de curiosidad hacia todo cuanto no hubiera sido mencionado por los autores antiguos ni pareciese contribuir en alguna medida a la salvación del alma. Era harto más fácil obtener el apoyo del Papa o del Emperador para una *inquisitio haereticae pravitatis* que para una *inquisitio naturae*.

Raimundo Lull fue un catalán que de la vida militar pasó a la religiosa y murió mientras trataba de convertir a los moros de Africa. Pero su fama se debe principalmente al invento de un sistema para combinar mecánicamente los conceptos hasta agotar todas las alternativas posibles. Parece que albergó la curiosa idea de que ello ayudaría a refutar a los mahometanos y expandir la verdad de la religión cristiana. Su artilugio había de disponer en círculos, a la manera de los puntos de una aguja de marear, los signos correspondientes a los conceptos más importantes agrupados con diverso criterio, de suerte que la rotación de los círculos en torno a un centro común arrojase una serie de combinaciones de esos signos. Su selección de los conceptos fundamentales objeto de combinación no acredita un especial talento filosófico; y el procedimiento ideado para combinarlos no condujo a ningún resultado, ni en lo que respecta a la conversión de los moros ni en lo concerniente al adelanto de la ciencia. Mas su sistema, que sus discípulos bautizaron con el nombre de *Ars Magna*, ha ejercido no obstante algún influjo en el desarrollo de la lógica. Nunca llegó a ser totalmente olvidado durante la Edad Media; y, en el siglo XVII, serviría de inspiración a diversos intentos de construir un lenguaje filosófico en el que todas las ideas complejas pudieran expresarse mediante la combinación de ciertos signos básicos. En particular, es probable que sugiriera a Leibniz —ya sea directa o indirectamente— su plan de elaborar una *characteristica universalis* basada en los principios de una *ars combinatoria* [179].

Entre los comentarios a los textos clásicos de este período reviste especial interés el titulado *In Universam Logicam Quaestiones*. Fue originariamente atribuido a Juan Duns Escoto (1266-1308), hallándose incluido en el primer volumen de la edición de sus obras debida a Luke Wadding en 1639, en compañía de otro interesante tratado que responde al título *De Modis Significandi sive Grammatica Speculativa*. Pero esta última obra se atribuye hoy a Tomás de Erfurt, que alcanzó su madurez hacia la primera mitad del siglo XIV, en tanto las *Quaestiones* han sido atribuidas —a falta de mejor expediente— a un Pseudo-Escoto no identificado. Aun si acaso no se trata del propio *doctor subtilis*, su autor es un lógico competente y experto, cuya obra no se reduce a una mera paráfrasis de los textos antiguos sino incluye una serie de discusiones sobre cuestiones sugeridas por la *Eisagogé* de Porfirio y el *Organon* de Aristóteles, excepción hecha de los *Tópicos*.

---

179 En la obra de Martin Gardner *Logic Machines and Diagrams* se pueden encontrar algunos detalles de la *Ars Magna*, junto con más información sobre la vida de Lull.

Algunos de los problemas planteados y tratados en las *Quaestiones* se distancian notablemente de cualquier tipo de problemática cultivada por los antiguos. Así, la *quaestio* 4 sobre el primer libro de los *Primeros Analíticos* se pregunta si toda proposición es por su cantidad universal, particular, indefinida o singular. El autor apunta con acierto que semejante distinción no es susceptible de aplicación a todas las proposiciones hipotéticas (esto es, complejas), por más que de sus partes quepa decir que poseen cantidad de acuerdo con el esquema habitual. Esta observación contrasta favorablemente con la torpe clasificación de los juicios de acuerdo con la cualidad, cantidad, relación y modalidad que Kant daría por buena en su *Crítica de la Razón Pura.*

En sus *quaestiones* 25-33 y 36 sobre el primer libro de los *Primeros Analíticos,* el Pseudo-Escoto nos ofrece la más aguda discusión de la lógica modal hasta ahora detectada en ningún texto medieval. En ella no habla para nada de proposiciones modales *de dicto* ni *de re,* sino distingue —como Sto. Tomás y Abelardo antes que él— entre un *sensus compositus* y un *sensus divisus* de la modalidad, sirviéndose de dicha distinción a los efectos de pergeñar una nueva teoría de la conversión y el razonamiento silogístico con proposiciones modales. En particular, aborda la tarea de justificar la parte más disputada de la teoría aristotélica manteniendo, en la *quaestio* 28, que «ex maiore de necessario in sensu diviso et minore de inesse valent modi primae figurae directe concludentes». Y, lo que es más, toma en consideración —aparte de las modalidades estrictamente lógicas como la necesidad, la posibilidad, la contingencia y la imposibilidad— otras modalidades expresadas por medio de vocablos tales como *dubium, scitum, opinatum, apparens, volitum* y *dilectum,* encontrando que algunos de ellos, si bien no todos, se hallan sujetos a reglas semejantes a las que rigen las modalidades del primer tipo [180]. Así, una proposición construida con el vocablo modal *scitum* es susceptible de conversión a la manera de la construida con el vocablo modal *necessarium,* pudiendo como ésta oficiar de premisa en un razonamiento silogístico. Acaso fueran éstas las complicaciones que condujeron a los estudiantes medievales de lógica a afirmar: *De modalibus non gustabit asinus.*

Algunos de los pasajes más notables de la obra se localizan en las *quaestiones* 10 del primer libro y 3 del segundo libro de los *Primeros Analíticos.* Se trata en ellos de las *consequentiae,* a las que los lógicos medievales consagrarían buen número de obras específicas y sobre las que habremos de retornar más adelante dedicándoles toda una sección del presente capítulo.

Guillermo de Ockham (*c.* 1295-1349) ya ha sido mencionado a propósito del debate en torno a los futuros contingentes. En nuestros días han sido reeditados sus escritos políticos contra las pretensiones del papado, y asimismo se le recuerda como un conspicuo e influyente nominalista; pero su reputación popular como una gran figura de la lógica descansa sobre todo en la célebre máxima conocida con el nombre de «navaja de Ockham»: *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.* Sin duda dicha fórmula refleja con fidelidad la orientación fundamental de su filo-

180 Las modalidades en este sentido amplio fueron tomadas ya en consideración por San Anselmo. Cf. F. S. Schmidt, *Ein neues unvollendetes Werk des Heiligen Anselms von Canterbury, Beiträge zur Geschichte der Philosophie des Mittelalters,* XXXIII, 3 (1936), y D. P. Henry, "St. Anselm on the Varieties of 'Doing'", *Theoria,* XIX (1953), pp. 178-83.

sofía, pero en esta versión no se la encuentra en ninguno de sus escritos conocidos. La formulación más aproximada parece ser *Nunquam ponenda est pluralitas sine necessitate,* que aparece en su obra teológica sobre las *Sentencias* de Pedro Lombardo [181]. Sus más importantes contribuciones a la lógica fueron su *Expositio Aurea super Artem Veterem* y su *Summa Totius Logicae.* Esta última seguía reimprimiéndose en Oxford por el año 1675 para su uso como libro de texto, mereciendo probablemente ser tenida como la primera obra que expuso en forma sistemática la totalidad de la lógica de la época, incluidas las novedades medievales. La obra se divide en tres libros que respectivamente se ocupan de los términos, proposiciones y argumentos; y el tercer libro se halla subdividido en cuatro partes dedicadas al silogismo, la demostración, las *consequentiae,* etcétera, así como a las falacias. A todo lo largo de ella abundan los pasajes de interés, como sucede por ejemplo con la teoría de los silogismos modales, más complicada incluso que la del Pseudo-Escoto al dar entrada a argumentos en los que una de las premisas se toma *in sensu composito* mientras la otra es tomada *in sensu diviso.* Mas los capítulos sobre los universales y sobre la *suppositio* del primer libro y toda la tercera parte del libro tercero son los que más valor encierran para el lector deseoso de informarse acerca de las peculiaridades de la lógica medieval. Además de un detallado tratamiento de las *consequentiae,* la tercera parte del libro tercero contiene siete capítulos relativos al tema de las *obligationes* y uno dedicado a los *insolubilia.* De las doctrinas de Ockham acerca de la *suppositio terminorum,* y por lo tanto acerca de los universales, nos ocuparemos en la próxima sección. En cuanto a su contribución a la teoría de las *consequentiae,* será examinada en la última sección de este capítulo.

Tras de Ockham habría que reseñar un gran número de lógicos que alcanzaron reputación europea durante el siglo XIV: Gualterio Burleigh, a quien también se debe una adaptación de la obra de Diógenes Laercio sobre las vidas de los filósofos antiguos; Juan Buridan, Rector de la Universidad de París en los años 1328 y 1340, que elaboró asimismo una teoría sobre el impulso físico; Ricardo Swineshead (en latín Suisseth), que profesó en el Merton College de Oxford en 1348, conocido corrientemente con el sobrenombre de *Calculator* por su afición a las matemáticas; Alberto de Sajonia, Rector de la Universidad de París en 1353; Marsilio de Inghen, primer Rector de la Universidad de Heidelberg; Guillermo Heytesbury (en latín Hentisberus o Tisberus), profesor igualmente en el Merton College en 1370; Rodolfo Strode, otro mertoniano; Ricardo Ferrybridge (en latín Ferabrich, Ferebrich o Feribrigus). No todos ellos fueron seguidores de Ockham. Burleigh, por ejemplo, fue un defensor de la vieja concepción de los universales. Mas la influencia de Ockham predominó ampliamente en el conjunto, lo que determinó que este período —el de más intenso cultivo de la lógica— marcase también el comienzo de la decadencia de la metafísica escolástica, una vez que Ockham hubo convencido a numerosos filósofos de la imposibilidad de obtener demostraciones racionales u otro tipo de justificación lógica de las doctrinas teológicas. Pero fue la teoría ockhamista del conocimiento la que con-

181 *Super Quattuor Libros Sententiarum* (ed. Lugd., 1495), I, dist. 27, q. 2, K. En su *Summa Totius Logicae,* I, 12, Ockham cita el principio de economía *Frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.*

dujo, por una parte, al escepticismo respecto de la metafísica y, por otra, al interés por la problemática de la necesidad formal. Por desgracia, este segundo aspecto de su influjo no parece haber sido muy duradero. A partir, más o menos, del año 1380, no hay grandes cosas ya que reseñar en el dominio de la lógica medieval. Los filósofos continuaban escribiendo acerca de los *insolubilia*, las *obligationes* y demás, mas sin llegar a producir nada verdaderamente nuevo, por más que la lógica era estudiada en esa época por un número más crecido de talentos y con mayor intensidad que en cualquier otra, anterior o posterior. Posiblemente dicho estancamiento no tenga nada de extraño. El nuevo paso que por ahora hacía falta dar era bien grande, y es menester pensar que —incluso después de haber anunciado Leibniz sus proyectos en el siglo XVII—tuvieron que transcurrir dos siglos más hasta que Frege lograse por fin darlo.

A lo largo del período abierto con Abelardo, en el que florecieron y se multiplicaron las universidades, se debatió ininterrumpidamente el problema de los universales. Durante los siglos XII y XIII la disputa no afectó gran cosa a la enseñanza de la lógica formal, pero en la próxima sección hemos de ver cómo la distinción entre *antiqui* y *moderni* se reflejó en la discusión en torno a la doctrina de las *proprietates terminorum*. En los siglos XIV y XV, los *moderni* (o *nominales terministae*, como fueron llamados en ocasiones) se mostraron más activos en la elaboración de sutilezas lógicas, mientras que los *antiqui* (o *reales in metaphysica*) se convirtieron por reacción en el partido que propugnaba un programa educativo basado en la *ars vetus* (especialmente las *Categorías*) y la *philosophia realis* (esto es, la física y la metafísica, tomista o escotista) más bien que sobre los nuevos resultados en el dominio de la lógica, que juzgaban carentes de interés y de provecho. En lo que concierne a la teología, los *moderni* de la época hicieron continuas protestas de ortodoxia, y hay que decir que algunos de los más famosos precursores de la Reforma —en particular, Wycliffe y Savonarola— fueron efectivamente *antiqui*. Se trataba, por tanto, de dos distintas concepciones de la educación básica —las llamadas *via antiqua* y *via moderna*—; y, a finales del siglo XV, algunas de las Universidades alemanas de reciente fundación propenderían a conservar lo mejor de una y otra manteniendo dos facultades rivales de artes, con su propio decano y sus propios maestros cada una [182].

Algunos siglos después de sus triunfos en Oxford, los lógicos mertonianos continuaban siendo estudiados en Italia. Los estatutos de la Universidad de Padua programaban, en 1486, cursos sobre la obra de Strode y Heytesbury y sobre los escritos de Pablo de Venecia y Pablo de Pergola, que la habían comentado con anterioridad en ese mismo siglo [183]. Una generación más tarde, la demanda de información sobre este tipo de lógica era aún lo suficientemente grande como para justificar la publicación en Venecia, el año 1517, de un volumen de repertorio titulado *Consequentiae Strodi cum commento Alexandri Sermonetae, Declarationes Gaetani in easdem consequentias, Dubia magistri Pauli Pergolensis, Obligationes eiusdem Strodi, Consequentiae Ricardi de Ferabrich, Expositio Gaetani super easdem, Consequentiae subtiles Hentisberi, Quaestiones in consequentias*

182 C. Prantl, *Geschichte der Logik*, IV, pp. 38, 148, 187-91, 230.
183 H. Rashdall, *The Universities of Europe in the Middle Ages*, ed. Powicke y Emden, I, p. 247.

Strodi perutiles eximii artis doctoris domini Antonii Frachantiani Vicentini. Pero el despertar del humanismo, junto con el de los nuevos intereses filosóficos orientados hacia la ciencia natural, condujo gradualmente a la preterición de la lógica formal. Las grandes figuras de la filosofía del siglo XVII hablarán poco ya de *consequentiae*, aunque —como veremos en seguida— éstas no estaban olvidadas por completo cuando Leibniz dio inicio al nuevo gran avance.

4. PROPRIETATES TERMINORUM.

La teoría de las *proprietates terminorum*, llamada a ocupar un prominente lugar en la lógica medieval, tomó forma en la segunda mitad del siglo XII y parece haber surgido de las discusiones de Abelardo y sus contemporáneos acerca de la estructura de las proposiciones categóricas. Mas ya que todavía no es posible conocer con detalle las vicisitudes de su desenvolvimiento, tendremos que comenzar nuestro examen de la teoría por su primera versión impresa, a saber, la de Guillermo de Shyreswood en sus *Introductiones in Logicam* [184]. Por la manera como aquélla es presentada, así como por sus ocasionales referencias a otros puntos de vista, podemos presumir que la doctrina era seguramente ya bien conocida en sus rasgos generales por la época en que escribía nuestro autor.

La quinta parte de las *Introductiones* se abre con la siguiente exposición:

«Quattuor sunt proprietates terminorum quas ad praesens intendimus diversificare. Harum enim cognitio valebit ad cognitionem termini et sic ad cognitionem enuntiationis et propositionis. Et sunt hae proprietates significatio, suppositio, copulatio, et appellatio. Est igitur significatio praesentatio alicuius formae ad intellectum. Suppositio autem est ordinatio alicuius intellectus sub alio. Et est copulatio ordinatio alicuius intellectus supra alium. Et notandum quod suppositio et copulatio dicuntur dupliciter, sicut multa huiusmodi nomina, aut secundum actum aut secundum habitum. Et sunt istae definitiones earum secundum quod sunt in actu. Secundum autem quod sunt in habitu, dicitur suppositio significatio alicuius ut subsistentis (quod enim tale est natum est ordinari sub alio) et dicitur copulatio significatio alicuius ut adiacentis (et quod tale est natum est ordinari supra aliud). Appellatio autem est praesens convenientia termini, i.e. proprietas secundum quam significatum termini potest dici de aliquo mediante hoc verbo *est*. Ex his patet quod significatio [non] est in omni parte seu dictione orationis. Suppositio autem in nomine substantivo tantum vel pronomine vel dictione substantiva; haec enim significant rem ut subsistentem et ordinabilem sub alio. Copulatio autem in omnibus adiectivis et participiis et verbis. Appellatio autem in omnibus substantivis et adiectivis et participiis, et non in pronominibus, quia non significant formam aliquam sed solam substantiam, nec in verbis, quia verbum non significat aliquod quod apponitur per verbum substantivum, quia sic esset extra ipsum. Nulla autem istarum trium, scilicet suppositio, copulatio, appellatio, est in partibus indeclinabilibus, quia nulla pars indeclinabilis significat substantiam aut aliquid in substantia» [185].

Como su nombre indica, la teoría de las *proprietates terminorum* pretende ofrecer una caracterización de los cometidos que las palabras o frases pueden desempeñar en tanto que funcionan como términos en el seno de una proposición. Pero es un supuesto de la teoría que las palabras o

---

184 Edición de Grabmann, cit. en la nota 161.

185 Ibid. pp. 74-75. La partícula *non* encerrada aquí entre corchetes destruiría el auténtico sentido del pasaje. En la penúltima frase, Grabmann transcribe *in omnibus substantiis*, leyéndose en la última *substantiam et aliquid in substantia*.

frases capaces de oficiar a título de términos han de poseer *significatio*, en el sentido de expresar o presentar —como dice Guillermo— una determinada forma. Por descontado, hay un sentido no técnico de la *significatio* en que también cabría atribuirla a palabras tales como *et* y *cum;* pero, ya que estas últimas no ofician normalmente como términos, su *significatio* carece de relevancia para nuestros efectos. Algo más sorprendente es, en cambio, la convicción de que todos los términos significan formas, que acaso quepa tomar como un indicio de que la teoría fue originariamente concebida como una doctrina acerca de los términos generales, como *homo*, y sólo luego extendida a los términos singulares como *Socrates* o *ille*. En ella no hay, de hecho, lugar para estos últimos, salvo en conexión con una de las subdivisiones de la *suppositio* de la que dentro de poco nos ocuparemos. Pues, en efecto, Guillermo nos advierte de que la *copulatio* es una propiedad característica de los adjetivos, participios y verbos, que son todos ellos generales, y de que la *appellatio* no puede ser adscrita a los pronombres porque éstos no significan formas sino sólo substancias. Es cierto que la definición de la *appellatio* como la actual aplicabilidad (*praesens convenientia*) de un término a algo podría servir de justificación para otorgar que el nombre propio *Socrates* poseía *appellatio* el año 400 a. de C. Pero si se descalifica al pronombre *ille* por no significar una forma, no parece que haya razones para salvar al nombre propio *Socrates* de una descalificación análoga por idéntico motivo.

La noción de *appellatio* parece derivar del uso de la expresión *nomen appellativum* por parte de Prisciano para designar a un término que se aplica a todas las diversas cosas por él abarcadas, por lo que no es extraño oír de Guillermo de Shyreswood que algunos lógicos consideraban a la *appellatio* como una peculiaridad de los términos que ocupan una posición predicativa. De hecho, cabría alegar que un nombre común, un adjetivo o un participio en aquella posición son realmente aplicados por la cópula *est*, mientras que un término general en posición de sujeto es a lo sumo nada más que aplicable. Pero resulta más bien curioso que se diga que ningún término posee *appellatio* a menos de ser aplicable a algo existente en el momento de hablar; pues —mientras que la distinción entre términos que poseen aplicación a algo pasado, presente, o futuro y términos que carecen de toda posible aplicación es importante desde un punto de vista lógico— la divisoria trazada por Guillermo de Shyreswood y otros lógicos medievales entre términos que poseen *appellatio*, en el sentido a que se acaba de aludir, y términos que no la poseen está lejos de revestir una importancia lógica pareja. Para hacernos cumplido cargo de este aspecto de la teoría tendríamos que considerar más detalladamente el resto de los aspectos de la misma, pero por el momento podemos suponer que los lógicos medievales interpretaban la *appellatio* como una propiedad primariamente envuelta en enunciados tales como «Esto es un hombre», en que nos referimos o *apelamos* a un individuo aquí presente por medio de un término general.

La expresión *copulatio* procede del estudio abelardiano de los términos; y, dado que Guillermo de Shyreswood afirma que la indicada propiedad únicamente corresponde a los adjetivos, participios y verbos, parece claro que el vocablo continúa asociado para él —como lo estaba para Abelardo— a la idea de dependencia gramatical. Pero en la definición antes citada, que extraíamos del comienzo de la discusión por parte de Guillermo,

éste se vale de una metáfora de signo diferente. Nos dice allí que *suppositio* y *copulatio* expresan, respectivamente, la subordinación y supraordinación de un pensamiento (*intellectus*) a otro. Guillermo no afirma explícitamente que el uso técnico de *suppositio* derive de aquella metáfora, pero parece asumir que se introdujo con el sentido de «poner debajo». En cualquier caso, parece que los nombres —y, en general, todas las *dictiones substantivae*— se dice que poseen *suppositio* porque se piensa que representan las substancias que sirven de soporte a los accidentes expresados por medio de adjetivos, participios y verbos [186]. Pero la distinción filosófica de substancia y accidente tiene carácter derivado, históricamente hablando, respecto de la que existe entre sujeto y predicado, de modo que la noción de *suppositio* hay que asociarla primordialmente al papel de los sustantivos como sujetos de las proposiciones. Cuando un substantivo oficie de predicado, como sucede por ejemplo en la proposición *Omnis homo est animal*, se dirá que consiste en una inocua e insignificante reduplicación de la referencia a una sustancia, o más de una, hecha por el sujeto:

«Omne enim nomen significat solam formam, et non absolute sed in quantum informat substantiam deferentem ipsam, et sic aliquo modo dat intelligere substantiam. Nomen ergo in praedicato dat intelligere formam, dico, ut est forma substantiae subiecti. Et ideo cum illa substantia intelligatur in subiecto, non intelligetur iterum in praedicato. Unde praedicatum solam formam dicit» [187].

Ya que, no obstante, los lógicos se interesan con frecuencia por la conversión de las proposiciones categóricas, se consideró oportuno pararse a examinar qué compromisos entraña el uso de un substantivo como predicado, de donde tomó origen la discusión de la *suppositio* de los términos-predicados en los diversos géneros de proposiciones. Esto es lo que probablemente tiene en su mente Guillermo de Shyreswood cuando habla de *suppositio* habitual (esto es, disposicional) en cuanto contrapuesta a *suppositio* efectiva o en acto. Pues más adelante, comentando la *appellatio*, añade:

«Dicunt igitur quidam quod terminus ex parte subiecti supponit et ex parte praedicati appellat. Et sciendum quod ex parte subiecti supponit secundum utramque definitionem suppositionis, ex parte autem praedicati supponit secundum habitualem suam definitionem» [188].

Hasta aquí todo está bastante claro, pero no es fácil determinar cuál sea el sentido exacto del verbo *supponere* en pasajes como el que se acaba de transcribir. En ocasiones, el participio de pasado *suppositum* se usa para aludir al individuo que posee la forma significada por un término, como cuando Guillermo escribe más adelante *Suppositum et appellatum sunt quandoque idem* o se emplea, como leemos en otro lugar, el presente pasivo *supponitur* a propósito de la *res deferens formam significatam per nomen* [189]. Pero éste no es el único uso de aquel verbo, ni tan siquiera parece ser el básico. Guillermo dice a menudo que un término *supponit pro* un individuo semejante, e incluso —cuando extrema las precisiones— considera a la *forma* o al *significatum* como complemento del verbo. La clave de su terminología se halla probablemente en el pasaje en que define el

186 *Introductiones*, p. 82.
187 Ibid. p. 78.
188 Ibid. p. 82.
189 Ibid. p. 76.

tipo más común de *suppositio*, a saber, la llamada *personalis*: «Personalis autem [est suppositio] quando [dictio] supponit significatum sed pro re quae subest, ut *Homo currit*. Cursus enim inest homini gratia alicuius singularis» [190]. En este contexto parece claro que Guillermo adscribe la *suppositio* a un nombre común o un substantivo similar que oficia de sujeto en una proposición, y lo hace así pensando que este último subordina su significado (esto es, la forma que significa) al del predicado. Sin duda esta caracterización de la predicación es insatisfactoria para cualesquiera proposiciones que no sean las proposiciones universales afirmativas del tipo de *Omnis homo est animal*. Pero no debe sorprendernos que un lógico de la primera mitad de la Edad Media se refiera a ella en ocasiones como si fuese universalmente válida, pues ya hemos visto cómo un supuesto de ese género subyace de hecho a la distinción de Aristóteles entre los términos mayor y menor en su teoría del silogismo. Y, en el pasaje que acabamos de citar, Guillermo va al encuentro de posibles objeciones alegando que la forma expresada por el término-sujeto únicamente se podría subordinar por relación a, o por respecto de (*pro*), algún individuo (o más de uno) que la detente. Más aún, de un uso semejante sería fácil pasar a hablar de los individuos que poseen esa forma como sus *supposita*, puesto que cada uno de ellos podría considerarse metafóricamente «subpuesto» o «puesto bajo» ella. Tendríamos, así, los dos usos: *Iste terminus communis 'homo' supponit humanitatem pro Socrate* (o más concisamente, *supponit pro Socrate*) y *Socrates supponitur per istum terminum*.

Contra todo lo que acabamos de ver, hemos de constatar que los sucesores de Guillermo de Shyreswood definen la *suppositio*, de una manera mucho más simplificada, como una *acceptio termini substantivi pro aliquo*, sirviéndose constantemente de la expresión *supponere pro* sin intercalar un acusativo, esto es, como si *supponere* fuese para ellos un verbo intransitivo del estilo de *stare* en la expresión equivalente *stare pro* [191]. Cabría imaginar que dicha práctica derive de la antes reseñada de Guillermo de Shyreswood, pero en tal caso hay que pensar que la construcción *supponit significatum pro re quae subest* debía estar ya pasada de moda cuando aquél se sirvió de ella. Pues el mismo Guillermo omite con frecuencia el acusativo *significatum* tras el verbo *supponere* y, después de él, apenas si hay ya rastro de la construcción primitiva, por más que el tratamiento de la *suppositio* por parte de otros autores (como, por ejemplo, Pedro Hispano) sólo pueda ser pocos años posterior al suyo propio. Por otra parte, el uso exclusivo de *supponere pro* podría tal vez haberse impuesto como un vulgarismo con el sentido de «sustituir», «reemplazar» o «suplir por». La expresión *supponere aliquid pro aliquo* quería decir en latín clásico todo eso, en el sentido de «poner una cosa en lugar de otra», y la transición de este sentido coloquial al uso técnico apuntado más arriba sería una de tantas traslaciones semánticas como tienen normalmente lugar en la historia del lenguaje. De ser así, las explicaciones de Guillermo de Shyreswood vendrían a reducirse a una serie de especulaciones más o menos caprichosas sugeridas por falsas etimologías. En favor de esta hipótesis podría abundar acaso el hecho de que Guillermo encuentre difícil

190 Ibid. p. 75.
191 Pedro Hispano, *Summulae Logicales* (ed. Bochenski), § 6.03. Cf. Ockham, *Summa Totius Logicae*, I, 6 .

aplicar su interpretación a otras variedades de la *suppositio* que la *suppositio personalis* de los términos generales. Pero también se puede replicar que esa dificultad sería, después de todo, natural si la terminología técnica hubiese sido primeramente elaborada con el sentido que Guillermo le daba en aquel caso particular, siendo luego extendida inapropiadamente a los restantes casos. Más aún, Guillermo escribe como si las *dubitationes* a las cuales hace frente hubieran sido suscitadas por otras personas, más bien que por él mismo; y no es impensable que esas *dubitationes* puedan haber servido de ocasión para adoptar el uso simplificado de *supponere* en que el verbo es tratado como intransitivo. En defensa de la autoridad de Guillermo como testigo histórico fidedigno cabe añadir, por lo demás, que no parece dado a fantasear a juzgar por el resto de su obra.

Con todo y con eso, la verdad del caso parece aún más compleja que cualquiera de las hipótesis consideradas hasta aquí. El término *suppositum* aparece ya en la obra de Prisciano, en un pasaje en que parece querer decir lo mismo que «individuo» [192], y a lo largo de la filosofía medieval lo reencontramos a menudo con idéntico sentido. Es muy probable que en un principio se tratase de la traducción latina del griego *ὑποκείμενον*, esto es, que fuese introducido para significar aquella entidad que subyace a cualquier otro tipo de entidad y se halla presupuesta —como diríamos hoy— cuando hablamos de cualidades, posiciones, relaciones y demás. Todavía en 1710 utilizaba Leibniz con tal sentido el derivado francés *suppôt*, al tratar de explicar cómo se dice que el cuerpo y el alma constituyan una persona [193]. Pero en el pasaje de Prisciano a que nos hemos referido, *suppositum* podría asimismo traducirse por «sujeto», y no hay duda de que éste fue el sentido que el vocablo vino a adquirir en la literatura gramatical de la Edad Media, en que es corrientemente contrastado con *appositum* o predicado. En este tipo de contexto, un *suppositum* se define como *id de quo fit sermo*, en tanto que el *appositum* es definido como *illud quod dicitur de supposito*; y, aunque los gramáticos dicen a veces que un nombre en caso de nominativo *supponitur verbo*, tienden por lo común a usar el verbo activo *supponere* en el sentido de «actuar de sujeto gramatical» [194]. Originariamente el verbo pudo haber sido usado en voz activa con un acusativo sobreentendido, esto es, como si su sentido fuese el de «(pro)poner una cosa u otra», mas con el tiempo acabó siendo considerado como intransitivo. Al decir, pues, los lógicos que un término *supponit pro* algo —cualquier cosa que ello pueda ser—, lo más probable es que estuvieran adaptando aquel último uso para sus propios fines. Pero parece claro que, para Guillermo de Shyreswood, la voz *suppositio* no había perdido aún su fuerza metafórica, y sus diversos usos de la misma reflejan en definitiva las diferentes nociones a que podía asociarla un hombre de su tiempo.

Al comienzo de una de las secciones de sus *Summulae Dialectices*, Rogerio Bacon —el joven contemporáneo y admirador de Guillermo— distingue cuatro significados diferentes de *suppositio*, a los que quizá cabría llamar sus significados epistemológico, onomástico, metafísico y gramatical:

---

192 *Institutiones Grammaticae*, XVII, 23.
193 *Theodicée*, § 59.
194 Los testimonios de esta práctica han sido reunidos por Ch. Thurot en *Notices et extraits de divers manuscrits latins pour servir à l'histoire des doctrines grammaticales au moyen âge, Notices et extraits des manuscrits*, XXII, 2 (1868), pp. 217-18.

«Sumitur autem supposito multipliciter. Dicitur in uno modo petitio alicuius vel acceptio sine probatione cum indigeat probari vel possit. Alio modo dicitur suppositio substantiva rei designatio, sicut dicimus quod substantiva nomina supponunt rem suam, id est, substantive designant. Tertio modo dicitur proprietas termini communis per comparationem ad individua quae sunt eius supposita, secundum quod dicimus quod nomen commune, ut *homo*, significat qualitatem cum substantia, sive humanitatem, et supponit individua, scilicet Socratem el Platonem et alia. Quarto modo dicitur suppositio proprietas termini subjecti, sive termini in quantum alii supponit et subicitur in oratione» [195].

Ninguno de esos significados se corresponde exactamente con la definición ofrecida por Guillermo en el largo pasaje antes transcrito, pero de todos ellos —excepción hecha del primero— hay rastros en su obra; y muy pronto veremos un pasaje en que Guillermo se refiere al problema del alcance existencial dando a entender que la *suppositio personalis* de los términos generales envuelve necesariamente la presuposición de la existencia de ejemplificaciones de una forma. Parece imposible encontrar en castellano una traducción de *supponere* que haga justicia a esa riqueza de matices, pero no hay razón para dudar de que el vocablo latino pudiera conseguirlo satisfactoriamente a comienzos del siglo XIII, en cuyo caso la obra de Guillermo tendría el mérito de habernos hecho llegar noticia de todos ellos.

Aparte un par de variedades que se examinarán más adelante, todos los géneros de *suppositio* distinguidos por Guillermo de Shyreswood figuran en el adjunto cuadro acompañados de los ejemplos con que los ilustrara nuestro autor.

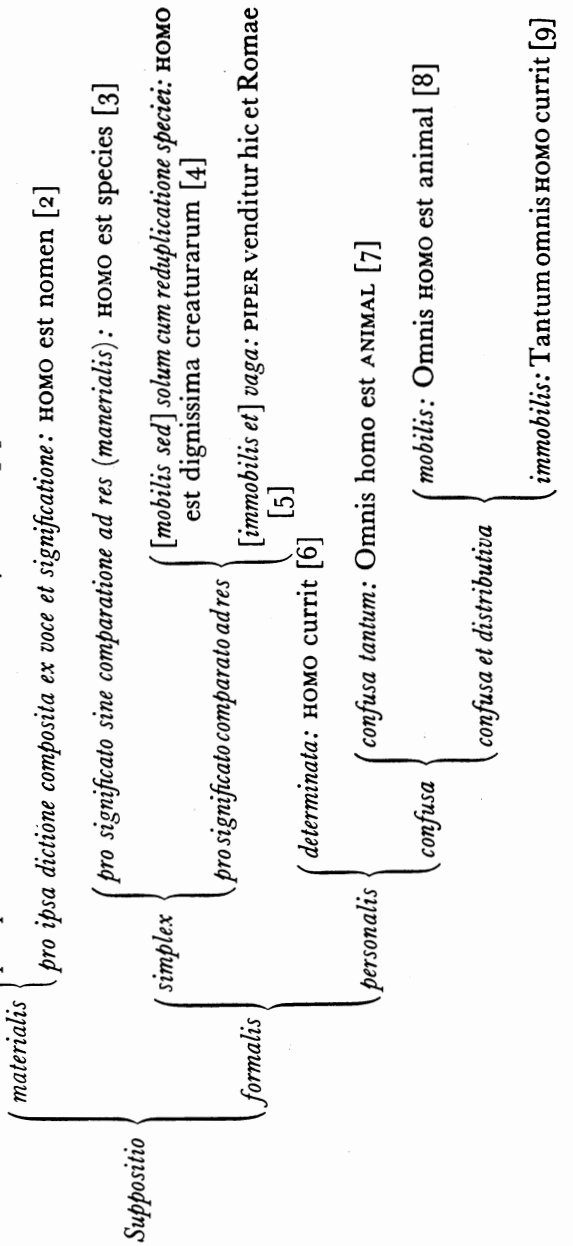
En cada ejemplo nos hemos servido de mayúsculas para indicar el sustantivo de cuya *suppositio* se está hablando, pero se sobrentiende que el vocablo en cuestión únicamente la detenta en el contexto de una proposición como la allí ejemplificada. Las denominaciones de las diferentes variedades proceden todas ellas del texto de Guillermo, pero los calificativos de *mobilis* e *immobilis* no hacen en él aparición hasta su caracterización de (8) y (9). Para preservar la disposición del cuadro general, evitando inoportunos retrocesos, nosotros los introducimos ya al nivel de las descripciones de (4) y (5).

Si traducimos *supponere pro* por «suplir por» —esto es, «hacer las veces de»—, sería fácil hallar algún sentido a las diversas distinciones con ayuda de los ejemplos de Guillermo, pero tropezaremos con dificultades tan pronto procedamos a desentrañar las relaciones que el autor desea indicar en cada caso por medio del vocablo *suppositio*, así como a dilucidar la adecuación de cada una de las clasificaciones incluidas en el cuadro. Por ejemplo, está claro que en (1) y (2) nos las habemos con la presencia de una palabra que actúa como un signo de sí misma o simplemente de su sonido, esto es, con aquel tipo de actuación que en nuestros días vendría indicada mediante el uso de comillas. Guillermo explica así sus rasgos diferenciales respecto de los restantes géneros de *suppositio*:

«Est igitur suppositio quaedam materialis, quaedam formalis. Et dicitur materialis quando ipsa dictio supponit vel pro ipsa voce absolute vel pro ipsa dictione composita ex voce et significatione, ut si dicamus, *Homo est disyllabum, Homo est nomen.* Formalis est quando dictio supponit suum significatum» [196].

---

195 *Opera Hactenus Inedita Rogeri Baconi*, Fac. XV, ed. R. Steele, 1940, p. 268.
196 *Introductiones*, p. 75.



El adjetivo *materialis* trata aquí presumiblemente de advertir que esa clase de *suppositio* tiene que ver con la materia de la palabra (esto es, con su sonido) y no con la subordinación de una forma a otra, pero en tal caso no podría diferir de la *suppositio formalis* de un modo semejante a como lo vendrían a hacer dos diferentes variedades de esta última. En el pa-

saje que acabamos de citar, Guillermo parece reconocerlo así hasta el punto de usar primero el verbo *supponere* con carácter intransitivo y luego con carácter transitivo. Más adelante admite expresamente que la cuestión ha suscitado algunas dudas:

«Dubitatur de prima divisione suppositionis. Videtur enim quod non sit diversus modus supponendi sed potius significandi, quia significatio est praesentatio alicuius formae ad intellectum. Ergo diversa praesentatio diversa significatio. Sed cum dictio supponit materialiter, praesentant aut se aut suam vocem; cum autem formaliter, praesentat suum significatum... Hoc tamen non verum est, quia dictiones semper suum significatum praesentant quantum de se est, et si praesentant suam vocem, hoc non est secundum se sed ex adiunctione cum praedicato» [197].

La objeción está bien concebida, pero la réplica de Guillermo es insatisfactoria. Pues cuando en el habla o la escritura decimos que *homo* es un nombre, no estamos en ningún caso usando esa palabra como lo haríamos de ordinario, sino mencionándola y hablando acerca de ella, valiéndonos a tal efecto de un recurso lingüístico que envuelve su reproducción fónica o gráfica. En lugar, por ejemplo, de escribir —como podríamos hacerlo— «la palabra que deletreada arroja una *h*, una *o*, una *m* y una *o*», transcribimos esas letras en el orden apropiado y luego, según Guillermo observa con acierto, confiamos al resto de la oración la tarea de indicar que nuestro propósito es referirnos a la palabra que cabría haber aludido por medio de la larga descripción antes transcrita. De modo semejante, al mencionar oralmente esa palabra lo que hacemos es producir los sonidos que la constituyen y dejar luego entender por el contexto que el fin que se persigue es referirnos a la palabra así constituida. En cada uno de ambos casos, operamos con un espécimen verbal al que la convención ha asignado significado en ciertos casos, pero, tal como ahora nos servimos de él, dicho espécimen no expresa aquel significado más de lo que las instrucciones del sargento expresarían respeto hacia el recluta cuando éste es enseñado a saludar.

Dificultades similares surgen acerca de (3), esto es, acerca de la *suppositio simplex pro significato sine comparatione ad res* o *suppositio simplex absoluta*, como la denominarían algunos lógicos posteriores. El ejemplo transcrito deja ver con claridad que lo que se ventila aquí es el discutido uso filosófico de un término general, como el término «hombre», a título de nombre de una especie. Y de las precisiones que a continuación siguen se desprende que, hasta entre los propios lógicos tolerantes con ese modo de hablar, no faltaban quienes juzgasen inapropiado diferenciarlo de otros usos de la misma palabra mediante un tipo especial de *suppositio*. Pues, en efecto, Guillermo escribe:

«Similiter dubitatur de hac divisione: *Alia simplex, alia personalis*. Videtur enim quod haec diversitas facit equivocationem, quia cum supponit simpliciter praesentat ad intellectum formam significatam per nomen, cum autem personaliter praesentat rem deferentem formam. Ad hoc potest responderi sicut ad primum, vel potest dici quod semper idem supponit, scilicet significatum suum, sed hoc dupliciter, aut pro significato, et tunc simpliciter, aut pro re significata, et tunc personaliter» [198].

---

[197] Ibid. p. 76. En la cuarta frase del pasaje, Grabmann transcribe *autem se aut suam vocem*.

[198] Ibid. p. 77.

De nuevo ahora es acertada la objeción e inadecuada la réplica de Guillermo. Pues, al usar la palabra *homo* en sustitución de la palabra *humanitas*, estamos dándole un nuevo sentido. Mas Guillermo rehúsa admitirlo así, y esto le lleva a proponer en su lugar una incoherente caracterización de las dos clases de *suppositio*. Cuando nos dice que la *suppositio personalis* es *pro re significata* (donde *re significata* quiere decir algo muy diferente de *significato*) probablemente no se trate de otra cosa que un desafortunado *lapsus linguae;* pero, incluso si acomodamos la expresión a las exigencias del argumento y decimos que la *suppositio personalis* es *pro re deferente forman significatam per nomen*, el resultado seguirá siendo confundente. Pues el sentido en el que acaso quepa decir que la noción de humanidad se subordina por derecho propio a la de especie en la oración *Homo est species* parece ser completamente diferente de aquel en que podría decirse que la noción de humanidad se subordina, respecto de un hombre singular, a la noción de correr en la oración *Homo currit*. Lejos de explicar nada, el empleo de la misma palabra *suppositio* para designar ambas relaciones es una fuente de innecesarias perplejidades. Si la expresión *supponere pro* se usase exclusivamente en el sentido de «suplir por», cabría tal vez decir que el término-sujeto *supponit pro forma* en la oración *Homo est species* mientras *supponit pro re deferente forman* en la oración *Homo currit*. Pero Guillermo parece oscurecer tal posibilidad al tratar de adjuntar un acusativo en cada caso, sobre la base de la interpretación transitiva de *supponere*, lo que le lleva a la extravagante conclusión que veíamos más arriba.

En una observación posterior, Guillermo apunta que el término *homo* del ejemplo *Homo est species* se dice a veces que posee *suppositio manerialis, quia supponit pro ipsa manerie speciei* [199]. El término *maneries* (o más bien *maneria*) aparece en la obra de Abelardo con el sentido de «variedad» o «clase» [200], de suerte que la expresión *ipsa maneries speciei* puede entenderse aquí que significa «la característica específica en sí misma». Los dos géneros de *suppositio simplex pro significato comparato ad res*, numerados como (4) y (5) en nuestro cuadro, constituyen al parecer casos intermedios. Cuando decimos *Homo est dignissima creaturarum* estamos, por lo visto, hablando primariamente de la especie, aunque no de esta última con abstracción de todos sus individuos. La *suppositio* del término *homo* es, así, *mobilis*, ya que lo que decimos de la especie podríamos repetirlo de cada uno de los individuos de la misma, con la única salvedad de que eso que decimos les sea aplicado exclusivamente en virtud de su naturaleza específica. Es así como podemos, pues, decir, a propósito de un hombre singular, *Iste homo, in quantum homo, est dignissima creaturarum*. Por el contrario, cuando decimos *Piper venditur hic et Romae*, la *suppositio* del término *piper* es *immobilis*, ya que nuestro enunciado no implica que cada grano de pimienta pueda venderse a un tiempo aquí y en Roma. La *suppositio* se dice entonces *vaga*, puesto que únicamente afecta a la especie por relación a uno-u-otro de sus individuos más bien que por relación a cada-uno-de-ellos. Ya que no cabe duda de que los usos lingüísticos envueltos en ambos ejemplos son perfectamente normales, su catalogación tam-

199 Ibid. Grabmann transcribe *materialis*. Debemos la corrección a L. Minio-Paluello.
200 *Dialectica*, pp. 93 y 95.

poco carece de interés, aunque ya es más dudoso que su *suppositio* pueda igualmente bien calificarse de *suppositio pro significato.*

El empleo del adjetivo *personalis* como un rótulo bajo el cual agrupar a las restantes variedades de *suppositio* resulta harto curioso, ya que no todas ellas tienen que ver con personas. La más plausible explicación es que el modismo proceda de un contexto teológico, como la consideración de la obra de Boecio *De Persona et Duabus Naturis Contra Eutychen et Nestorium.* Cuando un cristiano afirma *Deus factus est homo,* lo que quiere decir no es que la forma de la deidad se haya identificado con la forma de la humanidad sino que una persona en posesión de la primera viene también a poseer en un momento dado la segunda. Esta última distinción era tan importante para el pensamiento cristiano que bien podría haber dado nombre al segundo gran apartado de la *suppositio formalis.* Es razonable suponer, por consiguiente, que la distinción entre *suppositio simplex* y *suppositio personalis* fuese una de las primeramente establecidas por los lógicos medievales [201].

Al introducirla, Guillermo hace notar que también sería posible subdividir todo el dominio de la *suppositio formalis* en *suppositio communis* y *suppositio discreta* [202], pero no entra en detalles acerca de cómo haya de correlacionarse esta última subdivisión con la anterior. Si, como advierte, la *suppositio communis* es la que corresponde a un término general y la *suppositio discreta* la que corresponde a un término singular, sería posible entonces encontrar ejemplos del segundo tipo que asimismo lo fueran de *suppositio materialis* de acuerdo con sus propios criterios, como ocurriría pongamos por caso con *Socrates* en *Socrates est nomen proprium.* Guillermo no discute esta posibilidad, pero rechaza en cambio expresamente la de que *Homo est species* sea considerada como una proposición singular sobre la base de la interpretación de su sujeto como el nombre propio de una especie [203], dando en cambio a entender en otra parte que un término singular —no menos que uno general— admitiría ser doblemente usado, ya sea con *suppositio personalis,* ya sea con *suppositio simplex*:

«Volunt enim quidam quod haec divisio *Alia simplex alia personalis* sit divisio communis supositionis, quia non cadit haec diversitas in discreta suppositione. Non enim est ibi nisi personalis. Semper enim supponitur individuum in tali, scilicet in discreta, suppositione. Dicendum quod hoc non facit personalem suppositionem, scilicet quod supponitur individuum, sed quod supponitur res deferens formam significatam per nomen, et hoc potest accidere in nomine proprio cum significat substantiam cum qualitate, ut, cum dico *Socrates currit,* respicitur pro sua re, cum dico *Socrates est praedicabile de uno solo,* respicitur pro forma significata per nomen» [204].

De nuevo aquí nos tropezamos con una abusiva aplicación, por extensión, de nociones que únicamente resultan apropiadas en conexión con la *suppositio personalis* de los términos generales. Es cierto que el autor no utiliza aquí la fórmula *supponit formam,* pero insiste extrañamente en que cabe decir de un nombre propio que signifique una cierta forma y en que ello es esencial para que aquél posea *suppositio.* Como Aristóteles puso acer-

---

201 En su *Formale Logik,* § 27.20, I. M. Bochenski llama la atención sobre el empleo de la distinción por parte de Santo Tomás en su *Summa Theologica,* III, XVI, 7.
202 *Introductiones,* p. 75.
203 Ibid. p. 78.
204 Ibid. p. 76. En la tercera parte Grabmann transcribe *Semper enim supponit.*

tadamente de relieve en su doctrina de la substancia primera, Sócrates no es —en tanto que individuo— predicable de cosa alguna. Para que el último ejemplo de Guillermo pueda tener algún sentido, ha de querer decir o bien que el ser-llamado-Sócrates es predicable de una sola cosa, o bien que el ser-idéntico-a-Sócrates es predicable de esa sola cosa, etc., casos éstos en los que para nada vendría a entrar en juego una supuesta forma de la Socraticidad. Por su parte, aquellos contra quienes arguye nuestro autor identifican al parecer la *suppositio* con el hecho de «suplir por», sugiriendo por ello que la *suppositio discreta* no debiera considerarse una subdivisión de la *suppositio personalis*, sino ser estudiada independientemente y con antelación.

Si la caracterización de la *suppositio* que Guillermo trata de aplicar en los diversos epígrafes de su lista no responde a su propia innovación sino al sentido originario de la terminología, la doctrina de la *suppositio* tendría que haber comenzado a ser expuesta a partir de los casos (6) a (9) que restan aún por examinar. Pues, en efecto, no encaja bien en los casos anteriores (1) a (5), y es difícil pensar que haya podido elaborarla nadie que tuviese presentes esos casos desde un principio. En cambio, es fácil ver cómo cabría dar razón de ellos si no se hace hincapié en la noción de subordinación de una forma a otra y se interpreta la expresión *supponere pro* exclusivamente en el sentido de «suplir por». Comoquiera que sea, la doctrina de la *suppositio personalis*, a la que vamos inmediatamente a retornar, constituye el apartado mejor desarrollado de toda la teoría, tal y como ésta ha sido preservada en los textos que hoy nos son conocidos.

En *Homo currit* (que ha de entenderse aquí en el sentido de la oración castellana «Un hombre corre»), la *suppositio* de *homo* se dice *determinata* porque podría ser explicada por referencia a un solo individuo *(potest locutio exponi per aliquod unum)* [205]. Pero, como Guillermo observa, cabría llamarla *indeterminata* desde otra perspectiva, dado que la proposición no determina qué hombre es el que corre. En contraste con ella, la *suppositio confusa* se llama así por referirse a una pluralidad de individuos o a un solo individuo tomado una pluralidad de veces en un contexto donde puedan entrar en consideración distintos individuos. Esta última precisión tiene por finalidad permitir la *suppositio confusa* del término *hominem* en la proposición *Omnis homo videt hominem* aunque sólo haya un hombre, Sócrates por ejemplo, a quien todo el mundo ve [206]. Cuando, además de ello, un sustantivo supla por todas las cosas que detentan la forma por él significada, su *suppositio* no será sólo *confusa*, sino también *distributiva*. Es éste el caso del sujeto de una proposición universal afirmativa, pero no así del predicado. Finalmente, si la proposición que encierra un término con *suppositio confusa et distributiva* permite la inferencia de proposiciones concernientes a todos los diversos individuos abarcados por dicho término, su *suppositio* se dirá también *mobilis*. Cabría tal vez pensar que esta última condición ha de ser satisfecha en cualquier caso, pero en rigor no ocurre así; porque, aunque de *Omnis homo currit* podamos derivar correctamente *Socrates currit*, de *Tantum omnis homo currit* (esto es, «Todo hombre corre, pero ningún otro ser lo hace») no nos es dado derivar *Tantum Socrates currit* (esto es, «Sólo Sócrates corre»).

---

205 Ibid. p. 75.
206 *Introductiones*, p. 80.

Se dice que la *suppositio confusa* se debe siempre a una precedente distribución del término en cuestión, esto es, a la presencia de un signo de universalidad o algún equivalente suyo. Pero la *suppositio confusa tantum* ofrece notables rasgos diferenciales respecto de la *suppositio confusa et distributiva;* y, en orden a aclarar tales extremos, Guillermo propone cinco reglas destinadas a controlar las relaciones entre ambas y las de cada una con la *suppositio determinata.* Algunos de sus ejemplos tienen por cometido subrayar la significación del orden de las palabras en las frases latinas, pero en castellano podrían reproducirse con sentido recurriendo a la voz pasiva en ciertos casos en que el autor se sirve de la activa [207].

(I) Todo signo distributivo (esto es, todo signo del tipo de «todo» o de «ninguno») facilita la *suppositio confusa et distributiva* del término al que se halla directamente acoplado, y un signo negativo hace otro tanto con aquel al que afecta sólo remotamente; pero un signo afirmativo únicamente facilita la *suppositio confusa tantum* del término remoto. Es así como podemos argüir correctamente «Ningún hombre es un asno; luego ningún hombre es este asno», pero no así «Todo hombre es un animal; luego todo hombre es este animal».

(II) No cabe inferir válidamente una *suppositio confusa et distributiva* a partir de una *suppositio confusa tantum.* Pues, cuando cada hombre se ve sólo a sí mismo, no es correcto argüir «Un hombre no es visto por todo hombre; luego ningún hombre ve un hombre» *(Omnis homo hominem non videt; ergo omnis homo non videt hominem).*

(III) No hay inferencia válida posible de una diversidad de casos de *suppositio determinata* a uno de *suppositio determinata,* sino tan sólo a uno de *suppositio confusa.* Pues cuando cada hombre se ve sólo a sí mismo, no es correcto argüir «Un hombre es visto por Sócrates, y un hombre es visto por Platón, etc.; luego un hombre es visto por todo hombre», aunque podemos concluir «Luego todo hombre ve un hombre».

(IV) Tampoco hay posibilidad de inferir válidamente de una *suppositio determinata* una *suppositio confusa et distributiva,* sino sólo una *suppositio confusa tantum.* Pues no es correcto argüir «Un hombre no es visto por Sócrates; luego Sócrates no ve un hombre», aunque lo sea argüir «Un hombre es visto por todo hombre; luego todo hombre ve un hombre».

(V) Es válido inferir una *suppositio determinata* a partir de una *suppositio confusa et distributiva,* pero no a partir de una *suppositio confusa tantum.* Pues mientras es correcto argüir «Sócrates no ve un hombre; luego un hombre no es visto por Sócrates» [208], no lo es en cambio argüir «Todo hombre ve un hombre; luego un hombre es visto por todo hombre».

Esta doctrina presenta un par de particularidades un tanto sorprendentes. En primer lugar, y aparte de la *suppositio confusa et distributiva sed immobilis,* que cabría tal vez dejar a un lado en este punto, el esquema de la clasificación envuelve tres posibles géneros de *suppositio communis,* por

---

207 Ibid. pp. 80-81. La puntuación de los ejemplos en el texto de Grabmann es tan errática que arruina su sentido.

208 La negación de la conclusión se halla omitida en el texto de Grabmann.

más que en la lógica tradicional sólo hay dos géneros de cuantificación —a saber, la universal y la particular (o existencial)— de los términos generales. En segundo lugar, los dos géneros de *suppositio* que Guillermo denomina *determinata y confusa tantum* parecen hallarse ambos asociados con la cuantificación existencial, mas la segunda comparte el calificativo de *confusa* con la tercera, asociada en cambio a la cuantificación universal. La explicación de dichas particularidades debe no poco a los propios lógicos que idearon el esquema. En efecto, estos últimos habían caído ya en la cuenta de la necesidad de una teoría de la cuantificación múltiple y hasta habían comenzado a elaborar ciertos aspectos de la misma, no sólo en la dirección —comparativamente infructuosa— de lo que luego habría de llamarse la cuantificación del predicado, sino en la mucho más prometedora e interesante de la teoría de las relaciones. Así, la cuarta de las reglas antes reproducidas establece que una proposición doblemente general en la que un cuantificador existencial precede al cuantificador universal implica la correspondiente proposición doblemente general con los cuantificadores traspuestos, en tanto que la quinta rechaza oportunamente la implicación conversa. En cambio, los lógicos que pergeñaron la clasificación de las *suppositiones* se dejaron impresionar indebidamente por consideraciones relativas al número de individuos por los que se podría decir que suple un término. Por esta razón asignaron *suppositio confusa* no sólo a todo término provisto de cuantificación universal, sino asimismo a todo término existencialmente cuantificado precedido por un término con cuantificación universal; mientras que, a diferencia que en este último caso, un término provisto de cuantificación existencial y no precedido por un término universalmente cuantificado se decía que posee *suppositio determinata* por poder afirmarse su suplencia por un solo individuo.

Este modo de ver las cosas se halla ligado al supuesto fundamental de que un término general, al igual que un nombre propio o una descripción unívoca, ha de suplir por uno o varios individuos. Al final de su sección sobre las *proprietates terminorum*, Guillermo nos informa de que un término general carente de otras especiales cualificaciones suple por sus *appellata*, es decir, por los individuos que constituyen ejemplificaciones actuales de la forma por él significada; y justifica como sigue tal supuesto: «Et dico quod ille terminus *homo* supponit pro praesentibus de se, quia significat formam in comparatione ad sua res. Haec autem comparatio tantum salvatur in existentibus. Solum enim est suum significatum forma existentium et proprie pro his supponit de se» [209]. Con otras palabras, la *suppositio* depende ante todo de la *significatio*, y lo que el término general *homo* significa es una forma que se ha de realizar en una serie de cosas existentes. Así pues, hay que asumir —a menos de especificarse lo contrario— que *homo* suple por los hombres existentes en el momento de hablar. Pero también podría especificarse lo contrario, como reconoce Guillermo cuando escribe: «Terminus communis non restrictus habens sufficientiam appellatorum et supponens verbo de praesenti non habenti vim ampliandi supponit tantum pro his quae sunt» [210]. Sería interesante considerar ahora, como él lo hace, las diversas cualificaciones que cabría imponer a aquel alcance existencial.

---

209 *Introductiones*, p. 85.

210 Ibid. p. 82. Grabmann transcribe *suppositiones* en lugar de *supponens*. Nuestra restauración del texto se apoya en la cita que el propio Guillermo hace de sí mismo más adelante, p. 84.

En primer lugar, un término general como *homo* podría ser restringido por medio de una cláusula cualificadora del tipo de *qui fuit*, que le haría así suplir por lo inexistente. Es este un caso bien sencillo que no requiere más extensos comentarios.

En segundo lugar, pudiera suceder que un término general no posea bastantes *appellata* para satisfacer los requisitos de la oración en que interviene, en cuyo caso nuevamente vendría a suplir por lo inexistente. Guillermo intenta demostrarlo mediante un argumento harto curioso:

«Hoc membrum *habens sufficientiam appellatorum* apponitur quia, si non habet, potest supponere pro non-enti. Et intellige quod sufficientia appellatorum in tribus consistit ad minus. Unde, si non sint tot appellata, potest terminus supponere pro non-enti, ut, si sint tantum duo homines, haec est falsa, *Omnis homo est*. Probatio: Hoc signum *omnis* imponitur ad distribuendum pro summa multitudine, et hoc signum *uterque* pro minima. Cum ergo minima multitudo sit in binario, hoc signum *uterque* distribuit pro duobus tantum. Maior autem multitudo est in ternario et superioribus numeris. Unde hoc signum *omne* distribuit pro tribus ad minus. Cum igitur in hoc casu sint duo supposita existentia et vult iste sermo quod praedicatum insit tertio, vult quod insit non-existenti, et sic haec falsa est, *Omnis homo est*, et sua contradictoria vera, *Aliquis homo non est*. Ergo homo non est. Sed non esse non dicitur de existenti. Ergo ly *homo* supponit pro non-existenti» [211].

El ejemplo es desafortunado porque *Omnis homo est* y *Aliquis homo non est* carecen igualmente de sentido. Y, aparte de ello, resulta sumamente peregrino sugerir que quienquiera que opere con una proposición universal construida con *omnis* se compromete a creer en la existencia de tres ejemplos de la forma significada por el término-sujeto. Pero de lo que al menos no hay duda es de la adhesión de Guillermo a la doctrina del alcance existencial de las proposiciones universales, lo que le inclina a considerar como falsas aquellas proposiciones universales cuyos términos carecen por entero de aplicación.

En tercer lugar, un término acompañado de un verbo en tiempo de pasado o de futuro podría suplir por algo inexistente en el momento de hablar. Como Guillermo lo expresa:

«Hoc membrum *supponens verbo de praesenti* apponitur quia, si terminus communis verbo de praeterito et futuro supponeret, posset supponere pro non-enti, ut hoc *Homo cucurrit* verum est pro Caesare. Et solet assignari talis regula: Terminus communis supponens verbo de praeterito supponit tam pro praesentibus quam pro praeteritis, et similiter supponens verbo de futuro supponit tam pro praesentibus quam pro futuris» [212].

En cuarto lugar, hay ciertos verbos que se pueden usar correctamente, incluso en tiempo de presente, respecto de cosas que no existen en el momento de hablar, en cuyo caso ejercerán —según Guillermo— una *ampliatio* sobre sus sujetos: «Hoc autem membrum *non habenti vim ampliandi* apponitur quia, si sit verbum amplians, potest subiectum supponere pro non-enti, ut *Homo laudatur* haec est vera pro Caesare. Et est verbum amplians cuius res potest inesse non-enti». [213]. Otros verbos pasivos con poder de *ampliatio* son «ser mencionado», «ser considerado», «ser temido», «ser deseado». Lo

211 Ibid. p. 83. La idea de que "todo(s)" presuponga al menos tres se inspira probablemente en el *De Caelo* aristotélico, I, 1 (268a16).

212 Ibid. p. 84. Grabmann transcribe *Homo currit*, pero el sentido del pasaje requiere el tiempo de pasado.

213 Ibid. p. 84.

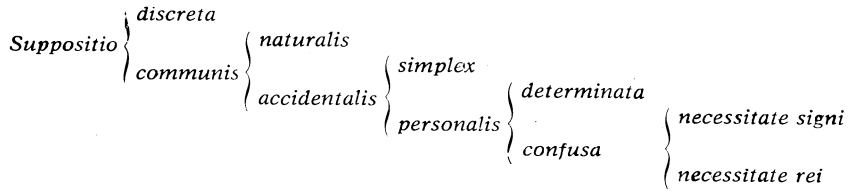
que todos los miembros de este grupo poseen en común como ingrediente de su significado es la noción de ser objeto de un acto de pensamiento. Está claro que no todo cuanto pensamos ha de existir necesariamente en el instante de pensarlo o en cualquier otro instante. Otro grupo de verbos al que también Guillermo adscribe poder de *ampliatio* son los compuestos de *potest* y verbos similares de posibilidad. Cuando decimos, por ejemplo, «Algún día podrá un hombre posarse sobre Marte» no estamos necesariamente refiriéndonos a un hombre ahora viviente.

Cuando Guillermo de Shyreswood se sirve de la fórmula *Potest subiectum supponere pro non-enti,* sus ejemplos revelan que por ahora únicamente tiene *in mente* la posibilidad de un término que supla por algo que no existe en el momento de hablar. Mas su teoría parece comportar asimismo la posibilidad de que los términos suplan por cosas que no existen, han existido ni existirán. Pues, en efecto, da por sentado que el sujeto de una proposición categórica posee siempre *suppositio* por algo, lo que le obligaría a admitir que el término «quimera» *supponit pro non-enti* cuando entre en juego en la proposición «Una quimera es mencionada por Homero». ¿Es esto defendible? Si definimos la expresión «suplir por» de modo tal que aquello por lo que suple un término ha de existir en un instante dado, sería evidentemente absurdo afirmar luego que algunos términos pueden suplir por cosas que no existen en ningún instante. Sin duda, sería posible evitar tal absurdo haciendo ver que nuestro uso de «suplir por» no implica la existencia en el tiempo de las cosas que decimos suplidas por los términos. Cuando en una conversación corriente en castellano alguien sostiene que el término «quimera» suple por cierto monstruo que es en parte un león, en parte un gato y en parte una serpiente, no está obligándose a creer en la existencia de semejante monstruo en este o aquel instante. Pero si reducimos a esto el uso de la expresión «suplir por», no podremos seguir sirviéndonos de ella en un sentido diferente del de «significar». Pues decir, en tal caso, que el término «quimera» suple por un monstruo como el que acaba de describirse equivaldría a decir que dicho término significa lo mismo que lo significado por aquella descripción. Guillermo de Shyreswood insiste, no obstante, en la irreductibilidad de la *suppositio* a la *significatio,* por lo que no podría seguir tal línea de defensa. Algunos filósofos posteriores, en especial Alexius Meinong y Bertrand Russell (en una primera fase de su pensamiento)[214], han sostenido que las expresiones del género de «quimera» o «la montaña de oro» representan o suplen por objetos en posesión de un cierto tipo de entidad aunque carentes de existencia. En las *Introductiones* de Guillermo no hay indicios de ese punto de vista. Mas, si hubiese tratado de aplicar su teoría de la *suppositio* a casos como el que acabamos de considerar, se habría visto forzado a sostener tamaña extravagancia.

En ulteriores tratamientos de las *proprietates terminorum* no encontraremos grandes novedades por lo que se refiere a la *significatio,* la *copulatio* y la *appellatio,* pero no faltan sin embargo abundantes innovaciones de detalle en lo concerniente a la *suppositio.* Pedro Hispano presenta así el siguiente esquema clasificatorio [215]:

---

214 *Principles of Mathematics,* p. 449.
215 *Summulae Logicales* (ed. Bochenski), § 6.04 y ss.



La distinción entre *suppositio materialis* y *suppositio formalis* aparece aquí omitida por completo, en tanto que la distinción entre *suppositio discreta* y *suppositio communis* se halla introducida de un modo que Guillermo de Shyreswood únicamente tomó en cuenta para rechazarlo. Por otra parte, la distinción entre *suppositio naturalis* y *suppositio accidentalis* constituye una novedad. La primera es la que se dice posee un término cuando suple por todas aquellas cosas de las que es predicable, como sería el caso por ejemplo de la *suppositio* del término «hombre» cuando se usa para representar a todos los hombres pasados, presentes o futuros. Pedro no nos ofrece ejemplo alguno de este caso, pero quizá pensase en el uso del término *homo* inserto en la formulación de una ley científica como *Omnis homo est mortalis*, en que el verbo *est* no envuelve restricción alguna respecto del momento de hablar. Dado que Pedro Hispano, a diferencia de Guillermo de Shyreswood, parte del supuesto de que —si el contexto lo permite— un término general vendría a suplir por las ejemplificaciones tanto pasadas o futuras cuanto presentes de la forma por él significada, se ve llevado a conceder que los tiempos verbales restringen más bien que amplían las *suppositiones* de sus sujetos. Ello entraña tal vez algún progreso sobre la doctrina de Guillermo, pero resulta curioso ver incluida a la *suppositio simplex* junto con estos casos bajo el rótulo genérico de *suppositio accidentalis*. La razón de ello es, por lo visto, que un término adquiere del contexto su *suppositio simplex*. En este punto, sin embargo, Pedro Hispano se muestra incierto acerca del alcance de la *suppositio simplex*. Pues nos dice que el término *animal* posee tal género de *suppositio* en la proposición *Omnis homo est animal*, aunque más tarde cita el mismo ejemplo como ilustración de la *suppositio confusa necessitate rei*. En defensa de la tesis de que el predicado posee *suppositio simplex* alega que éste suple únicamente por la naturaleza del género correspondiente *(solummodo supponit pro natura generis)*, lo que indica que acaso esté pensando en la bárbara y vieja paráfrasis *Animal inest omni homini* que vimos ya en una anterior sección. Pero está claro que, en el citado ejemplo, la palabra *animal* no es un sustituto de *animalitas*, por más que la oración en su conjunto equivalga a *Animalitas inest omni homini*.

En una ulterior sección de su obra, en que examina la *appellatio*, Pedro adelanta la interesante sugerencia de que la *significatio*, la *suppositio* y la *appellatio* de los términos singulares, como *Petrus*, y los términos generales como *homo*, cuando éstos revisten *suppositio simplex*, recaen sobre idénticos objetos [216]. Al sugerir tal parece reconocer que el término general con *suppositio simplex* es usado como si se tratara del nombre propio de un género. Y, en la medida en que su sugerencia entraña la admisión de la inaplicabilidad de las distinciones implícitas en la doctrina de las *proprietates*

216 Ibid. §§ 10.02 y 10.03.

terminorum a los casos arriba mencionados, ello demostraría que —cualesquiera que puedan haber sido las causas de su aparición— dicha doctrina vino a resultar primordialmente una teoría de los usos de los términos generales con *suppositio personalis pro suis inferioribus.*

En el apartado *De Distributionibus* de sus *Summulae,* Pedro arguye en contra de la tesis de Guillermo de Shyreswood según la cual la partícula *omnis* requiere al menos la existencia de tres ejemplares del término al que se halla acoplada, concluyendo sensatamente que si se coloca el signo de universalidad ante el término *phoenix,* cuya aplicación habría de constreñirse a una única cosa en cada instante, aquel signo distribuiría a dicho término tan sólo por respecto a ese único individuo («non distribuit ipsum nisi pro unico supposito») [217]. No dice, en cambio, nada sobre lo que ocurriría si el término considerado careciese de toda aplicación. Pero es de presumir que —al igual que Abelardo antes que él— reputase de falsa la proposición *Omnis chimaera est chimaera* por el hecho de no existir quimeras, pues ésta es en efecto la doctrina comúnmente admitida en la Edad Media.

En fecha posterior se llevaron a cabo intentos de formular esta doctrina valiéndose de la distinción entre *suppositio naturalis* y *suppositio personalis.* En su obra *De Suppositionibus Dialecticis* de 1372, el fraile dominico español San Vicente Ferrer (1350-1419) mantiene que una proposición universal cuyo sujeto posea *suppositio naturalis* podría ser verdadera aunque no existan cosas a que aplicar el término-sujeto [218]. Sus ejemplos son *Rosa est odorifera* y *Pluvia est aqua guttatim cadens.* Ya que, no obstante, el primero de ellos constituye una generalización científica basada en la observación de las rosas en el pasado, la finalidad del autor parece reducirse a aclarar que el uso del tiempo de presente con un sujeto en posesión de *suppositio naturalis* no compromete al que habla a asumir que existan ahora cosas a las que tenga aplicación el término-sujeto. En latín medieval, el verbo *existere* no se usa comúnmente en el sentido intemporal (u omnitemporal) que es hoy corriente entre los lógicos; y, del hecho de que San Vicente Ferrer esté dispuesto a considerar verdadera a la proposición *Rosa est odorifera* aun cuando no haya rosas ahora, no nos es dado concluir que estaría dispuesto a hacerlo así si nunca hubieran existido rosas en el pasado ni hubieran nunca de existir en el futuro. En cuanto al segundo de sus ejemplos, no nos ayuda por desgracia a resolver ninguna duda acerca de las intenciones del autor, pues parece tratarse de una definición. En el mejor de los casos, quizás éste estuviese dispuesto a conceder que la proposición es verdadera aun si nunca ha llovido ni tampoco lloverá. Pero, en orden a evaluar el alcance de semejante concesión, sería menester averiguar qué es lo que entiende exactamente que comporta la formulación de una definición. Lo más probable es que ni él ni ningún otro lógico medieval conocido llegara hasta aceptar que «Todo A es B» signifique, sencillamente, «No hay ningún A que no sea B» y haya de ser por ello verdadera si no existen cosas que sean A.

A pesar de sus divergencias, Guillermo de Shyreswood y Pedro Hispano son por igual realistas en el sentido de pensar que los términos generales

---

217 Ibid. §§ 12.17-12.19.

218 *De Suppositionibus Dialecticis,* c. 3, en *Oeuvres de Saint Vincent Ferrier* (ed. Fages, 1909). I. Los pasajes relevantes al respecto se hallan recogidos y estudiados por I. Thomas en "St. Vincent Ferrer's De Suppositionibus", *Dominican Studies,* V (1952), pp. 88-102.

significan universales o características que las cosas podrían poseer en común. Este realismo se evidencia en las explicaciones de Guillermo antes citadas, y en las *Summulae Logicales* tampoco faltan pasajes en que Pedro se expresa en un idioma similar, tal y como sucede por ejemplo con su definición de la *suppositio simplex* como una *acceptio termini communis pro re universali figurata per ipsum* [219]. Mas si tornamos a la caracterización de los términos en la *Summa Totius Logicae* de Guillermo de Ockham, nos encontramos ya ante una teoría bien diferente. Para él, todos los signos —sean naturales o convencionales— únicamente representan cosas singulares, pues en el mundo no hay otras cosas que pudieran aquéllos significar. Es absurdo, sostiene, afirmar que un universal es algo que existe en una pluralidad de individuos a los que aplicamos un nombre común:

"Item, si illa opinio esset vera, nullum individuum posset creari, sed aliquid individui praeexisteret, quia non totum caperet esse de nihilo si universale, quod est in eo prius fuit in alio. Propter idem etiam sequitur quod Deus non posset unum individuum substantiae annihilare nisi cetera individua destrueret, quia si annihilaret aliquod individuum, destrueret totum quod est de essentia individui, et per consequens destrueret illud universale quod est in eo et in aliis et per consequens alia non manerent, cum non possint manere sine parte sua, quale ponitur illud universale... Item. sequitur quod aliquid de essentia Christi esset miserum et damnatum; quia illa natura communis existens realiter in Christo realiter existit in Iuda et est damnata; igitur in Christo et in damnato, quia in Iuda. Hoc autem absurdum est» [220].

Se trata aquí de un modernismo harto más extremoso y considerablemente menos plausible que el de Abelardo.

Según Ockham, al hablar de los universales habremos de identificarlos con aquellos signos que representan una pluralidad de cosas. Esta es, nos dice, la doctrina de Avicena:

«Dicendum est igitur quod quodlibet universale est una res singularis et ideo non est universale nisi per significationem, quia est signum plurium. Et hoc est quod dicit Avicenna quinto *Metaphysicae*: *Una forma apud intellectum est relata ad multitudinem, et secundum hunc respectum est universale quoniam ipsum est intentio in intellectu cuius comparatio non variatur ad quodcumque acceperis.* Et sequitur: *Haec forma quamvis in comparatione individuorum sit universalis, tamen in comparatione animae singularis in qua imprimitur est individua; ipsa enim est una ex formis quae sunt in intellectu.* ...Verumtamen sciendum quod universale duplex est. Quoddam est universale naturaliter, quod scilicet naturaliter est signum praedicabile de pluribus...; et tale universale non est nisi intentio animae. ...Et de tali universali loquar in sequentibus capitulis. Aliud est universale per voluntariam institutionem... quia scilicet est signum voluntarie institutum ad significandum plura. Unde sicut vox dicitur communis, ita potest dici universalis» [221].

Este es el nominalismo de Ockham, o, más exactamente, su conceptualismo; pues para él los signos naturales son los primarios, prefiriendo a este respecto hablar de ellos que no de las palabras.

En un capítulo anterior de la *Summa Totius Logicae*, esos signos naturales del alma se identifican con los estados mentales de que Aristóteles hablaba al comienzo del *De Interpretatione*:

---

219 *Summulae Logicales*, § 6.05.
220 *Summa Totius Logicae*, I. 15.
221 Ibid. I, 14. El pasaje de Avicenna a que Ockham se refiere puede encontrarse en *Avicennae Opera* (Venecia, 1508), fol. 87*r*. B.

«Illud autem existens in anima quod est signum rei, ex quo propositio mentalis componitur ad modum quo propositio vocalis componitur ex vocibus, aliquando vocatur intentio animae, aliquando conceptus animae, aliquando passio animae, aliquando similitudo rei. Et Boethius in commento super libros *Perihermenias* vocat intellectum» [222].

Todo ello presupone, por lo tanto, que, cuando una *intentio* significa una pluralidad de cosas, se asemeja a todas ellas de una cierta manera en que asimismo se asemejan esas cosas entre sí, presuposición ésta que, en efecto, hace suya Ockham con frecuencia. Pero hablar de la posibilidad de que las cosas se asemejan unas a otras de una cierta manera es conceder cuanto un realista pudiera desear, a menos de incurrir en las erróneas exageraciones de Platón. Pues afirmar que muchas cosas poseen una característica común no equivale, contra lo que sugieren las críticas de Ockham que acabamos de transcribir, a afirmar que dichas cosas compartan en común algo acerca de lo cual nos quepa hablar como lo hacemos acerca de los propios individuos. Es más bien afirmar que dichas cosas se asemejan entre sí en algún aspecto. Con lo que la aserción de que existen universales independientes de la mente vendría a reducirse a declarar, en el lenguaje de la metafísica, que hay maneras de parecerse las cosas unas a otras y que seguiría habiéndolas incluso si nadie tuviera ocasión de saber nada acerca de las mismas. La fraseología técnica que sirve de vehículo a esas tesis es útil porque llama la atención sobre obvias facetas de su contenido que de otro modo se darían por sentadas sin reparar gran cosa en ellas. Pero en ocasiones se la interpreta erróneamente como un síntoma de platonismo, lo que desencadena una ferviente oposición digna de mejor causa. Cuando sucede así, los críticos se arriesgan a incurrir en el absurdo de criticar lo que ellos mismos están dando por bueno (como no podría ser de otro modo) desde su propio punto de vista.

El efecto inmediato de semejante modernismo en la lógica y la teoría ockhamista del conocimiento fue un empobrecimiento de la doctrina de las *proprietates terminorum*. Guillermo de Shyreswood y Pedro Hispano, basándose en el supuesto de que un término general significa siempre una determinada forma, habían sostenido que un tal término sólo podría *supponere pro suo significato* en el caso especial de su *suppositio simplex*. Pero Ockham acabaría rechazando todo esto y haciendo de la *suppositio* la noción básica de su teoría de los términos. En efecto, comienza por afirmar que, en el sentido en que se sirve del vocablo, la *suppositio* incluye la *appellatio* como una variedad particular [223]; y pasa luego a declarar que en la *suppositio personalis*, que constituye para él el caso típico, el término suple por las cosas que significa: «Exemplum ... sic dicendo *Omnis homo est animal*, li *homo* supponit pro suis significatis, quia *homo* non imponitur ad significandum nisi istos homines. Non enim significat aliquod commune eis, sed ipsosmet homines, secundum Damascenum» [224]. Por descontado, Ockham tiene razón

222 Ibid. I, 12.
223 Ibid. 62.
224 Ibid. 63. La referencia remite, al parecer, al capítulo 5 de la *Dialectica* de San Juan de Damasco (ed. Migne, 542 B), donde el substantivo "hombre" se dice que significa todos los hombres particulares, si bien para añadir inmediatamente a continuación que los hombres son todos ellos llamados hombres porque no difieren entre sí por su especie o naturaleza. San Juan, famoso por su oposición a los iconoclastas, murió hacia el año 752, y su *Exposición de la Fe Ortodoxa* fue traducida al latín en el siglo XII por Burgundio de Pisa. Su *Dialéctica* (o *Capítulos Filosóficos*) le era asequible a Ockham en una traducción de Roberto Grosseteste. Como otras obras primitivas que responden al título de *Dialectica* (por ejemplo, las de San Agustín y Alcuino) versa principalmente sobre los predicables y las categorías.

al denegar la pretensión de Pedro Hispano de que un término concreto como *albus* en posición de predicado de una proposición *supponit pro forma,* así como al argumentar a estos efectos que sería erróneo decir *Albedo est alba* [225]. Pero, al rechazar que un término general pueda significar nada común a los diversos individuos, incurre por su parte en el error de considerar al término general como un simple sustituto de una lista de nombres propios. La adhesión a esta última tesis resulta evidente en su ulterior despliegue de la teoría, pues —tras haber adoptado las diversas subdivisiones de la *suppositio communis* mencionadas por Guillermo de Shyreswood— Ockham intenta dar razón de éstas mediante una extensión de la noción de «descenso lógico a los individuos». En la obra de Guillermo de Shyreswood, la expresión *descendere ad supposita* se utiliza para describir un argumento del tipo de «Todo hombre corre; luego Sócrates corre», donde se presupone —como es obvio— que Sócrates es hombre [226]. Pero Ockham sostiene que de un término con *suppositio personalis determinata* podemos descender a los individuos por medio de una proposición disyuntiva: «Est igitur regula certa quod, quando sub termino communi contingit descendere ad singularia per propositionem disiunctivam et ex qualibet singulari infertur talis propositio, tunc ille terminus habet suppositionem personalem determinatam». Y caracteriza a la *suppositio confusa tantum* diciendo que, en tal caso, el descenso lógico sólo sería posible por recurso a un predicado disyuntivo (por ejemplo, pasando de *Omnis homo est animal* a *Omnis homo est hoc animal vel illud et sic de singulis*), en tanto que a partir de la *suppositio confusa et distributiva* sería posible *aliquo modo descendere copulative* [227]. Está claro que lo que en cada uno de estos casos entiende Ockham por descenso es la transición a un enunciado equivalente que no contenga al término general originario sino contenga en su lugar una serie de términos singulares conjuntiva o disyuntivamente conectados. Sin embargo, ni siquiera en principio hay posibilidad de realizar ese descenso; pues si el término general se redujese a una mera abreviatura de una lista de nombres propios conectados mediante «y» u «o», todo enunciado vendría a ser necesariamente verdadera o necesariamente falso, lo que evidentemente constituye un absurdo. Cuando decimos «Sócrates es un hombre», no queremos decir «Sócrates es Sócrates o Platón o Aristóteles o...». Por el contrario, lo que queremos decir es que Sócrates posee una determinada característica o conjunto de características; y nuestro uso del término «hombre» con vistas a expresar dicha característica ostenta prioridad lógica sobre nuestro uso del mismo con vistas a representar cualesquiera hombres singulares. Aunque sea digno de atención el hecho de que Ockham analice las proposiciones universales y existenciales como conjunciones y disyunciones, respectivamente, de un número indefinido de miembros, esta interesante novedad no debe hacernos olvidar que lo que nuestro autor persigue en realidad no es ofrecer definición alguna de los cuantificadores, sino más bien mostrar el modo como pueda decirse que los términos generales suplen por los correspondientes individuos.

Ockham entiende, según vimos, la *suppositio personalis* como el caso típico o normal de *suppositio,* llegando incluso a afirmar que cualquier

---

225 *Summa Totius Logicae,* I, 62.
226 *Introductiones,* p. 81.
227 *Summa Totius Logicae,* I, 68.

término posee *suppositio personalis* a menos que sus usuarios especifiquen para él a discreción tal o cual otro género de *suppositio* («nisi ex voluntate utentium arctetur ad aliam») [228]. Así, si lo deseáramos, cabría interpretar *homo* como si revistiera *suppositio personalis* en cada una de las dos proposiciones *Homo est nomen* y *Homo est species*; pero, en tal caso, habría que conceder que ambas proposiciones serían falsas. Lo peculiar de estas proposiciones es poseer predicados que nos permiten interpretarlas de manera diferente según nuestro deseo. En orden a obtener la otra interpretación posible, tendríamos que tomar el término *homo* sin atender a su significación (*non significative*) y dejarlo suplir, en el primer caso, por la palabra hablada o escrita y, en el segundo, por la correspondiente *intentio animae*. El término revestiría, de esta manera, *suppositio materialis* y *suppositio simplex* respectivamente [229]. A diferencia de los *moderni* de un par de siglos antes, Ockham ya no protesta contra el uso del término *homo* en *Homo est species*, pero rechaza la explicación propuesta por Guillermo de Shyreswood y procede a dispensar a la *suppositio simplex* un tratamiento similar al de la *suppositio materialis* en cuanto que ambas recaen sobre el signo mismo más bien que sobre las cosas por él significadas. Cuando nosotros escribimos *Homo est vox disyllaba*, hacemos suplir al signo gráfico *homo* por el signo oral correspondiente, si bien no existe denominación específica para esta clase de *suppositio materialis* en cuanto diferente de la envuelta en *Homo est dictio scripta*, en que el signo gráfico *homo* supliría estrictamente por sí mismo. De modo semejante, al escribir *Homo est species* hacemos suplir al signo gráfico *homo* por el signo mental correspondiente, pero esta vez contamos con la específica denominación de *suppositio simplex* en orden a distinguirla de las anteriores.

Al presentar su caracterización de la proposición *Homo est species*, Ockham podría haber sacado algún partido del hecho de que los filósofos medievales usaran libremente la voz *species* como sinónima de *intentio*, mas su propósito no es demorarse en la teoría aristotélica de la recepción de las formas en el alma. Por el contrario, prefiere concebir las *intentiones* por analogía con los términos orales o escritos, llegando a conceder que las primeras admiten todas y cada una de las distinciones envueltas en la teoría de la *suppositio*: «Sicut autem talis diversitas suppositionis potest competere termino vocali et scripto, ita etiam potest competere termino mentali, quia intentio potest supponere pro illo quod significat et pro seipsa et pro voce et pro voce et scripto» [230]. Si, como muchas de sus declaraciones parecen implicar, la *intentio animæ* correspondiente a la palabra *homo* es una imagen de un hombre, resulta difícil explicarse cómo podría suplir por la palabra escrita *homo* en una proposición mental cuyo objetivo sea expresar que esa palabra escrita posee cuatro letras. Por desgracia, Ockham no facilita aclaración alguna acerca de su curiosa afirmación.

Cuando introduce por vez primera la noción de *suppositio*, Ockham se cuida de apuntar que —a diferencia de la *significatio*, examinada con anterioridad— aquella propiedad únicamente afecta a los términos en el contexto de una proposición [231]. Pero nosotros ya hemos visto que, en los casos nor-

228 Ibid. 64.
229 Ibid. 63.
230 Ibid.
231 *Summa Totius Logicae*, I, 62.

males, la *suppositio* tan sólo se distingue para él de la *significatio* por su carácter conjuntivo o disyuntivo, en tanto que en los anormales concede *suppositio* a términos que funcionan *non significative*. Parece, pues, que la *suppositio* representa para Ockham la noción básica y fundamental, mientras que la *significatio* —tal y como él la entiende— podría ser definida por referencia a la *suppositio* normal o primaria de un término. Más aún, su caracterización de la verdad no deja lugar a dudas acerca de la prioridad de la noción de *suppositio*, pues establece que una proposición categórica singular y afirmativa es verdadera si, y sólo si, el término-sujeto y el término-predicado suplen por la misma cosa:

«Ad veritatem istius *Iste est angelus*... sufficit et requiritur quod subjectum et praedicatum supponant pro eodem... Et ideo non denotatur quod hic habet angelitatem vel quod in isto sit angelitas vel aliquid huiusmodi, sed denotatur quod hic sit vere angelus, non quidem quod sit illud praedicatum, sed quod sit illud pro quo supponit praedicatum» [232].

La renuncia de Ockham a hablar de la *angelitas* y otras formas por el estilo tenía sin duda alguna justificación, mas su prurito adversativo y su circunspección hubieron de conducirle a la absurda posición de sostener que toda la historia, y asimismo quizás la ciencia toda, se reduce a un continuo ensamblaje de signos con idéntica referencia.

Con posterioridad a Guillermo de Ockham se prestaría mucha atención a la formulación de reglas de *distributio*, etc., como las reseñadas en la obra de Guillermo de Shyreswood. La *Perutilis Logica* de Alberto de Sajonia constituye un buen ejemplo de tales intereses. Pero también fueron objeto de debate las cuestiones filosóficas suscitadas por Ockham. La *Summa Totius Logicae* se concluyó probablemente en 1325, y alrededor de 1328 escribió Gualterio Burleigh su *De Puritate Artis Logicae Tractatus Longior*, que encierra una defensa de la concepción tradicional de la *significatio* y la *suppositio simplex* contra los ataques de Ockham:

«Aliqui tamen reprehendunt illud dictum, scilicet quod suppositio simplex est quando terminus supponit pro suo significato; dicunt enim reprehendendo antiquiores quod illud est falsum et impossibile. Immo dicunt quod suppositio personalis est quando terminus supponit pro suo significato vel suis significatis et suppositio simplex est quando supponit pro intentione vel intentionibus animae... Sed sine dubio illud est valde irrationabiliter dictum... Nam certum est, quod secundum Philosophum in *Praedicamentis*, quod *homo* est nomen secundae substantiae; ergo iste terminus *homo* significat secundam substantiam et... speciem; ergo accipiendo *hominem* pro eo quod significat haec erit vera *Homo est species*... Item hoc nomen *homo* significat aliquid primo, et non significat primo Socratem nec Platonem, quia sic audiens hanc vocem et sciens quid per hanc vocem significaretur determinate et distincte intelligeret Socratem, quod est falsum. Ergo hoc nomen *homo* non significat primo aliquid singulare. Ergo significat primo commune, et illud commune est species. Sed sive illud commune sit res extra animam sive sit conceptus in anima, non curo quantum ad praesens» [233].

---

232 Ibid. II, 2.

233 *De Puritate Artis Logicae Tractatus Longior* (ed. Ph. Boehner en *Franciscan Institute Publications*, 1955), pp. 7-8. La información histórica suministrada en el párrafo precedente está tomada del prefacio de Boehner.

Con su referencia a las *Categorías,* Burleigh no prueba más que la respetabilidad histórica de su propio punto de vista. Mas la argumentación con que termina el párrafo precedente constituye una concluyente refutación de la caracterización ockhamista de la *significatio.* Si *homo* significara primariamente Sócrates y otros hombres singulares, nadie podría captar el significado del término latino sin aprender a un tiempo que éste se aplica a Sócrates, lo que obviamente es falso.

Burleigh no sigue a Guillermo de Shyreswood en su propuesta del acusativo *formam,* o *significatum,* como complemento del verbo *supponere,* pero su caracterización de las divisiones de la *suppositio* está más cerca de la de aquél que de ningún otro de los autores enumerados hasta aquí. De hecho, sólo difiere de ella por su mayor prolijidad. Una de las nuevas dicotomías introducidas es la de *suppositio propria,* mediante la que un término suple por algo en virtud de la expresión (*de virtute sermonis*), y *suppositio impropria,* mediante la que un término suple por algo metafóricamente o en virtud de un determinado hábito lingüístico (*ex transsumptione vel ex usu loquendi*) [234]. Es difícil apreciar cómo cabría aplicar con precisión tal distinción. Pero todavía es menos lo que puede decirse en favor del intento de Burleigh por distinguir entre diversos géneros de *suppositio materialis.* En efecto, nos dice que este tipo de *suppositio* se da cuando un término suple o bien por sí mismo o bien por alguna otra expresión de rango no inferior (*pro alia voce quae non est inferior ad illam*), ofreciéndonos como ejemplo del segundo caso *Hominem esse animal est propositio vera* [235]. El ejemplo es interesante por demostrar que Burleigh, realmente erudito en la materia, desconocía o no supo entender la caracterización abelardiana de la frase *hominem esse animal* como un cuasi-nombre de lo expresado por la proposición *Homo est animal.* Por lo que se ve, el recurso al acusativo e infinitivo se empleaba a veces por esta época en lugar del más apropiado de la cita directa.

Burleigh acierta, en cambio, al proponer una específica *suppositio personalis confusa et distributiva singulata* para el término *se* tal y como éste último interviene en *Omnis homo videt se* [236]. Como apunta, lo importante de este caso es que de *Omnis homo videt se* podemos inferir *Socrates videt Socratem.* Asimismo adelanta una interesante sugerencia al observar que *Equus tibi promittitur* puede querer decir o bien «Alguien dice, respecto de un caballo determinado, que te lo dará» o bien «Alguien dice que te dará algún caballo, sin determinar cuál» [237]. Pues en el segundo caso, en el que suponemos que la promesa envuelve la noción expresada por el castellano «algún», el término *equus* ha de suplir al parecer por todos los caballos, aunque indeterminada y disyuntivamente. Tenemos con ello un par de ilustraciones más del modo como los lógicos medievales desarrollaron su doctrina de la *suppositio personalis* en correspondencia con lo que hoy llamaríamos la teoría de la cuantificación. Ambos ejemplos envuelven nociones relacionales, así como lo que en nuestros días se diría un contexto intensional. Aunque los lógicos medievales nunca pusieron en duda la primordial importancia del esquema sujeto-predicativo vigente en la lógica aristotélica, trataron

234 Ibid. p. 2.
235 Ibid.
236 Ibid. p. 31.
237 Ibid. p. 15.

con frecuencia de abordar problemas lógicos no tomados en consideración por los autores antiguos, de suerte que su obra sería interesante aunque no fuera más que por mostrar la dificultad de progresar en esos nuevos dominios sin el concurso de un adecuado simbolismo especialmente programado a tal efecto.

Por complicada que parezca la clasificación de Burleigh, las distinciones que incluye son sólo una pequeña muestra de las que, por lo visto, podría haber ofrecido nuestro autor, que confiesa al comienzo de su tratado: «Plurimas divisiones suppositionis in iuventute mea memini me scripsisse, sed in praesenti opusculo nolo tot membra ponere, quia ad praesens propositum sufficiunt pauciora» [238].

De todo este complejo y elaborado edificio erigido por los lógicos medievales sólo logró sobrevivir hasta los tiempos modernos la doctrina de la *distributio terminorum*, cuya utilidad se halla confinada a la presentación de las reglas de la silogística. Originariamente, la expresión *distributio* parecía querer dar a entender para los lógicos la prefijación de un cuantificador universal. Así, Pedro Hispano escribe: «Distributio est multiplicatio termini communis per signum universale facta, ut, cum dicitur *Omnis homo currit*, iste terminus *homo* distribuitur seu confunditur pro quolibet suo inferiori per hoc signum *omnis* et sic est ibi multiplicatio» [239]. Pero más tarde vino a indicar la propiedad que se supone posee un término general cuando es usado para suplir por todos los individuos a los que es aplicable. Así es como la caracteriza el Pseudo-Escoto al escribir: «Distributio est acceptio alicuius communis pro quolibet eius supposito quorum quodlibet est ipsum» [240]. Sobre la base de este uso de la expresión, cree poder dar razón de los principios *dici de omni* y *dici de nullo* (considerados comúnmente como principios básicos del razonamiento silogístico) diciendo que la característica del silogismo es la *sumptio sub termino distributo*, esto es, la subordinación del término-sujeto de la conclusión al término medio distribuido en por lo menos una de las premisas [241]. Y en el mismo sentido apunta en otro lugar: «Ex non distributo numquam sequitur distributum *gratia formae*» [242]. A partir de aquí se desarrollarían, andando el tiempo, las dos reglas de la silogística que los lógicos llegaron a considerar fundamentales. Al final de las *Modernorum Summulae Logicales*, compiladas de autores medievales tardíos por los maestros rectores de la Universidad de Maguncia e impresas en 1489, encontramos una miscelánea de reglas *ad discernendos sillogismos a fallaciarum paralogismis* entre las que se incluyen las siguientes:

«Prima: In quolibet syllogismo non expositorio oportet medium complete distribui in praemissis, aut in ambabus teneri collective. Et si sint partes aeque principales, sic oportet medium complete distribui in altera praemissarum... Octava: In nullo syllogismo debet argui a non distributo ad distributum... Nona: In nullo syllogismo debet committi peccatum... contra aliquam regulam logicam.»

Silogismo expositorio es aquél cuyo término medio no es susceptible de distribución por su condición de singular (como sucede, por ejemplo, en «Sócra-

238 Ibid. p. 2.
239 *Summulae Logicales*, ed. Bochenski, § 12.01.
240 *Super Libros Elenchorum*, quaestio XIV (3).
241 *Super Librum I Analyticorum* Priorum, quaestio VII (5).
242 Ibid., quaestio XI (9).

tes murió por beber la cicuta; Sócrates era filósofo; luego un filósofo murió por beber la cicuta»); mas, para simplificar la formulación de las reglas, los lógicos medievales obviaban con frecuencia esta excepción anteponiendo la cláusula *omne quod est* al término singular [243]. Por lo demás, el silogismo cuyo término medio se tome con carácter colectivo será igualmente un silogismo con término medio singular. La segunda parte de la primera regla es algo oscura, pero parece referirse a la segunda figura, en que el término medio oficia de predicado en ambas premisas y no podría por tanto ser distribuido más de una vez. Un siglo más tarde, los jesuítas de Coimbra darían a estas reglas forma definitiva:

«Ad haec [i.e., las reglas más antiguas de la silogística] duo quaedam documenta adiungunt recentiores. Alterum est medium terminum in altera saltem praemissarum complete distribuiendum esse, hoc est accipiendum pro omni re pro qua accipi potest... Alterum documentum est nullum terminum qui non fuerit distributus in antecedente distribuendum esse in consequente» [244].

¿Cómo explicar la casi completa desaparición de un género de investigaciones que un día parecieron importantes a un número ingente de personas intelectualmente competentes y serias? Tres eran los intereses fundamentales a que servía este apartado de la lógica medieval. En primer lugar, interesaba elaborar una teoría general del lenguaje, así como dilucidar nociones tales como las de significado, aplicación y referencia. En segundo lugar, interesaba asimismo conseguir una precisa descripción de un cierto número de locuciones del lenguaje natural que eran objeto de uso con propósitos filosóficos. En tercer lugar, finalmente, interesaba formular una serie de reglas de la inferencia válida con destino a la lógica general o teoría de la cuantificación, como a veces se la denomina. Se trata en todos estos casos de finalidades sumamente respetables, ninguna de las cuales ha dejado de perseguirse en nuestros días. Pero hoy no juzgamos provechoso tratar de cultivar toda esa temática en el seno de una única teoría, porque no estamos ya bajo el influjo de ciertas predisposiciones decisivamente vigentes entre los lógicos medievales.

La distinción entre *significatio* y *suppositio*, sugerida tal vez por alguna de las reflexiones de Abelardo sobre el uso de los términos generales, constituyó sin duda un buen comienzo. Pero lo cierto es que la noción de *suppositio* no llegó nunca a ser esclarecida de manera terminante. La expresión se usaba por igual para dar a entender la designación de un individuo mediante un nombre propio o una descripción definida y el uso de un término general en relación con una serie de individuos. Idéntica ambigüedad afecta a la expresión castellana «suplir por» o sus equivalentes, pues lo mismo cabe decir que «el filósofo que bebió la cicuta» suple por Sócrates como que el término «hombre» en «Todo hombre es mortal» suple por Sócrates entre otros individuos. Esta falta de claridad hubiera resultado inofensiva de no ser por el énfasis depositado en la expresión *suppositio*. Pero las cosas acabaron de complicarse al rechazar Ockham la vieja noción de *significatio*, pues toda la teoría del lenguaje vino entonces a hacerse descansar sobre

---

243 Ibid. (5).

244 *Commentarii Collegii Conimbricensis e Societate Jesu in Universam Dialecticam Aristotelis* (Colonia, 1607), *In Lib. de Priori Resolutione*, I, 7 (p. 355).

una metáfora imperfectamente concebida. Para colmo, la doctrina de la *suppositio* abarcaba aspectos tan diversos como el tratamiento de *Homo est nomen* u *Homo est species*, por un lado, y el de la cuantificación universal y existencial, por otro. Por lo demás, cada una de las extensiones de la teoría venía sugerida por alguna determinada peculiaridad de la lengua latina que servía de vehículo al pensamiento filosófico de la época. Si Aristóteles no hubiese impuesto un uso extravagante de los términos generales, el problema de la *suppositio simplex* no se habría suscitado. Y, de manera semejante, la teoría de la *suppositio determinata* no habría surgido si el latín hubiese poseído un artículo indefinido. Pues, en efecto, al tener que entenderse *Homo currit* en un sentido existencial, no es de extrañar que toda la problemática de la aserción existencial viniera a concentrarse de algún modo en un uso específico del término *homo*, ni que —en el contexto de la teoría de la *suppositio*— se dijera de nuestro término que había de suplir disyuntivamente por todos los hombres. Mas para quienes no estén obsesionados por la noción de *suppositio* y las peculiaridades de la lengua latina, tales explicaciones no explican mucho que digamos.

5. Consequentiae.

La doctrina básicamente sostenida en los numerosos tratados del siglo XIV sobre las *consequentiae* deriva de manera obvia de la de Abelardo en su *Dialectica*, pero ignoramos si el influjo abelardiano se transmitió directamente o a través de algún intermediario. Tampoco sabemos a quién se debe la introducción de las innovaciones que caracterizan a dichos tratados. Parece natural conjeturar que semejante reformulación fue obra de algún lógico considerablemente capaz, pues las principales novedades doctrinales y terminológicas se remontan unas y otras a los más primitivos de entre esos tratados y la recurrencia de ciertos ejemplos más o menos caprichosos sugiere con insistencia una y la misma paternidad. A diferencia, sin embargo, de la *Dialéctica* de Abelardo o el *Metalogicon* de Juan de Salisbury, tales tratados —que se cuentan, técnicamente hablando, entre los logros más interesantes de la lógica medieval— se hallan escritos en el estilo impersonal y ahistórico de un texto escolar de matemáticas. Es de presumir que algunos por lo menos de los autores que han llegado hasta nosotros tuviesen una idea del proceso de desenvolvimiento de la lógica desde la época de Abelardo a la suya propia, pero ninguno de ellos por lo visto pensó nunca que merecía la pena perpetuarla.

Nosotros ya hemos visto cómo el vocablo *consequentia* era usado por Santo Tomás, en un pasaje de su *Summa Contra Gentiles*, con el probable sentido de «proposición condicional» que revestía para Abelardo. Un uso semejante se encuentra asimismo en la obra de su contemporáneo y hermano de Orden Roberto Kilwardby, elevado a arzobispo de Canterbury en 1272 y muerto en 1277. Comentando el pasaje de los *Primeros Analíticos* II, 4, en que Aristóteles sostiene la imposibilidad de que de una proposición y de su negación se siga a un tiempo la misma conclusión, Kilwardby escribe:

«Dubitatur de maiore propositione suae rationis. Videtur enim ad idem esse et non esse sequi idem, quia si tu sedes deus est et si tu non sedes deus est, quia ne-

cessarium sequitur ad quodlibet. Adhuc si tu sedes, alterum istorum est verum, te sedere, te non sedere; et si tu non sedes, alterum eorum est verum. Adhuc disiunctiva sequitur ad utramque suae partem, et hoc naturali consequentia, quia sequitur *Si tu sedes tu sedes vel tu non sedes* et *Si tu non sedes tu sedes vel tu non sedes*, et ita naturali consequentia sequitur idem ad idem esse et non esse, et ita ex necessitate. Ad primum dicendum quod duplex est consequentia, scilicet essentialis vel naturalis, sicut quando consequens naturaliter intelligitur in suo antecedente, et consequentia accidentalis. Talis autem est consequentia secundum quam dicimus necessarium sequi ad quodlibet et de tali non intelligendum est sermo Aristotelis. Ad secundum dicendum quod idem potest sequi ad idem dupliciter: scilicet aut gratia eiusdem in ipso, et sic non sequitur idem ad idem affirmatum et negatum, et hoc intendit Aristoteles; aut gratia diversorum in ipso, et sic potest sequi idem ad idem affirmatum et negatum, et sic non intendit Aristoteles. Sic autem procedit oppositio. Per hoc etiam solvitur tertium, quia disiunctiva sequitur ad utramque suae partem non gratia eiusdem in ea sed gratia diversorum. Intendit Aristoteles quod ad idem esse et non esse non sequitur aliquid ex necessitate naturali consequentia et gratia eiusdem» [245].

Kilwardby sugiere aquí que *Si tu sedes, deus est* y *Si tu non sedes, deus est* son ambos verdaderos, ya que lo necesario se sigue de cualquier cosa. Esta tesis de paradójica apariencia, que el autor presenta como bien conocida, es la contrapartida de la tesis abelardiana (aludida por Kilwardby pocas líneas después, aunque sin mencionar a Abelardo) según la cual de lo imposible se sigue cualquier cosa, pudiendo ser demostrada de manera semejante que esta última. Si, por ejemplo, es necesario que Dios exista, entonces no es posible que no exista, de suerte que tampoco lo sería que tú estés sentado y Dios no exista ni que no estés sentado y Dios no exista. Más aún, así como Abelardo tomaba pie de su paradoja para insistir en la necesidad de distinguir entre un sentido estricto y otro laxo de la *necessitas consecutionis*, de análoga manera Kilwardby trata de responder a la objeción al aserto aristotélico poniendo de relieve que lo necesario no se sigue de cualquier cosa con *consequentia essentialis vel naturalis* sino sólo con *consequentia accidentalis*, donde el requisito que establece para la *consequentia naturalis* (a saber, que el consecuente se halle comprendido en el antecedente) coincide con el impuesto por Abelardo para la conexión necesaria en su sentido más estricto. A continuación Kilwardby expone, bajo dos variantes ligeramente diferentes, la objeción de que —incluso de acuerdo con las exigencias de la *consequentia naturalis*— sería posible que una proposición y su negación implicasen la misma proposición, ya que así es ciertamente como ambas implican cada una su mutua disyunción. A lo que replica que Aristóteles no pensaba en este tipo de casos, ya que lo único que pretendía era excluir la posibilidad de que una misma conclusión (por ejemplo, uno de los miembros de aquella disyunción) se siga a un tiempo de una cierta proposición (por ejemplo, de sí propio) y de su negación (por ejemplo, el otro miembro disyunto). El pasaje en su conjunto acredita una notable continuidad en el análisis de la noción de implicación, y la tercera objeción (la que comienza con *Adhuc disiunctiva sequitur*) revela que por lo menos había habido ocasión de formular una nueva regla consecuencial desde la época de la teoría abelardiana de las *consequentiae* formalmente vá-

---

245 Ivo Thomas, "Maxims in Kilwardby", *Dominican Studies*, VII (1954), pp. 129-46. El pasaje citado comprende sus extractos (28)-(33) de un manuscrito del Merton College, en cuyo texto impreso no figuran las itálicas del nuestro.

lidas. Pues el principio de que una proposición disyuntiva se sigue de cualquiera de sus disyuntas no se encuentra en las obras de Abelardo, y quienquiera que lo acepte tendrá no sólo que abandonar —como Abelardo— la tesis de que la verdad de una disyunción requiere la falsedad de una de sus disyuntas, sino asimismo rechazar —a diferencia de Abelardo— la vieja interpretación de la disyunción como una noción modal que habría que explicar por referencia a la conexión necesaria expresable en los enunciados condicionales.

Aunque Kilwardby se sirva del vocablo *consequentia*, como lo hizo Abelardo, en el sentido de «enunciado condicional», está claro que dicha expresión sugiere para él la validez de un argumento. Esta es la razón de que, al formular la tercera objeción, incurra en la extraña construcción de aplicar la forma verbal *sequitur* a una *consequentia*: sin duda tenía presente el giro habitual en que *Sequitur* y *Non sequitur* se emplean para indicar, respectivamente, la aprobación o desaprobación de un argumento. Con posterioridad, el vocablo *consequentia* acabaría por aplicarse comúnmente en tal sentido para indicar una pieza argumental del tipo de «Tu sedes, ergo tu sedes vel tu non sedes». Pero el peso de la tradición era aún tan fuerte que un argumento de este género se caracterizaba todavía con frecuencia como una proposición hipotética (esto es, compleja), siendo tratado como si sólo difiriese de un enunciado condicional por la presencia de una nueva conectiva. Así, el Pseudo-Escoto escribe en la *quaestio* X sobre el primer libro de los *Primeros Analíticos*: «Consequentia est propositio hypothetica composita ex antecedente et consequente mediante coniunctione conditionali vel rationali quae denotat quod impossibile est ipsis, scilicet antecedente et consequente, simul formatis quod antecedens sit verum et consequens falsum». Donde de lo que sigue a continuación se desprende con claridad que por *coniunctio rationalis* entiende una partícula inferencial del tipo de *ergo* o *igitur*. Se trata sin duda de un modo confundente de expresarse, por lo demás difícilmente defendible, aunque resulte comprensible y hasta excusable como una concesión a la tradición.

Aunque el Pseudo-Escoto se refiera a la *consequentia* como si se tratase de una proposición y hable así a veces de su verdad, como Abelardo lo hubiera hecho, lo más frecuente es que la trate como un razonamiento de cuya validez quepa dar fe —si ha lugar— diciendo de ella que es *bona* (esto es, correcta). Autores posteriores expresarían esto mismo por medio de la fórmula *Valet consequentia* (esto es, «El argumento es válido»). El cambio de práctica guarda algún parecido con la sustitución de la presentación aristotélica de la silogística en términos de enunciados condicionales por la presentación boeciana de la misma en términos de esquemas de inferencia. Pero tuvo lugar sin ir acompañado de una precisa modificación de la terminología técnica, lo que originó equívocos frecuentes. Incluso cuando los lógicos cesaron de concebir las *consequentiae* como proposiciones hipotéticas, continuaban aún hablando por regla general de antecedente y consecuente de las mismas, más bien que de sus premisas y su conclusión. Se trata de un detalle relativamente nimio, pero que no carece por entero de importancia. Veremos en seguida, por ejemplo, que el Pseudo-Escoto y otros autores posteriores trataron de aplicar la denominación de *consequentiae* a argumentos con más de una premisa; mas, ya que continuaban hablando de *consequentiae* en el contexto de los enunciados condicionales, formularon

a veces sus reglas generales acerca de la transitividad y la posibilidad de contraposición de modo tal que sólo resultaban aplicables a *consequentiae* con una única premisa. Gualterio Burleigh denuncia semejante deficiencia cuando escribe:

«Et dixi quod haec regula, videlicet ex opposito consequentis debet inferri oppositum antecedentis, est intelligenda in consequentia enthymematica et universaliter in consequentia non-syllogistica, quia in consequentia syllogistica, videlicet in syllogismo, antecedens non habet oppositum, quia antecedens syllogisticum est propositiones plures inconiunctae et tale antecedens non habet oppositum, cum nec sit propositio simpliciter nec propositio coniunctione una. Sed in consequentia syllogistica ex opposito conclusionis, scilicet ex contradictorio conclusionis, cum utraque praemissarum sequitur oppositum alterius praemissae. Et... isto modo probat Aristoteles suos syllogismos» [246].

Pero incluso en su explicación de la necesidad de restringir la regla de contraposición propuesta por sus predecesores, el propio Burleigh se sirve de la terminología que indujo a errar a éstos. De ahí su excéntrica formulación *Antecedens syllogisticum est propositiones plures inconiunctae*. Más adelante, en cambio, al proseguir haciendo ver cómo el procedimiento aristotélico de la reducción indirecta descansa en el principio de que las premisas y la negación de la conclusión de un silogismo componen una tríada inconsistente (o antilogismo, como se la ha llamado a veces), abandona oportunamente tal modo de expresarse en términos de antecedente y consecuente.

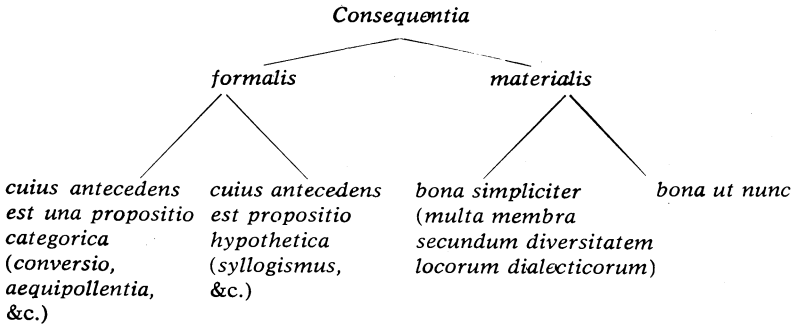
Tras de ofrecernos la definición de *consequentia* reproducida más arriba, el Pseudo-Escoto pasa a distinguir diversos géneros de *consequentiae*. El pasaje merece ser citado en su integridad por constituir la más nítida exposición de la cuestión que conocemos de un autor medieval:

«Consequentia sic dividitur: quaedam est materialis, quaedam formalis. Consequentia formalis est illa quae tenet in omnibus terminis stante consimili dispositione et forma terminorum. Et vocantur termini in proposito subiecta et praedicata propositionum, vel partes subiecti et praedicati. Sed ad formam consequentiae pertinent omnia syncategoremata posita in consequentia, ut conjunctiones, signa universalia, particularia, et huiusmodi. Secundo ad formam consequentiae pertinet copula propositionis, et ideo non est eadem forma consequentiae ex propositionibus quarum copula est de inesse et quarum est de modo. Tertio ad formam pertinet multitudo praemissarum, affirmatio et negatio propositionum, et huiusmodi, et ideo non est eadem forma arguendi ex affirmativis et negativis, et ita de aliis. Consequentia formalis subdividitur, quia quaedam est cuius antecedens est una propositio categorica, ut conversio, aequipollentia, et huiusmodi, alia est cuius antecedens est propositio hypothetica; et quilibet istorum modorum potest subdividi in plures alios modos. Consequentia materialis est illa quae non tenet in omnibus terminis retenta consimili dispositione et forma ita quod non fiat variatio nisi terminorum. Et talis est duplex, quia quaedam est vera simpliciter et alia est vera ut nunc. Consequentia vera simpliciter est illa quae potest reduci ad formalem per assumptionem unius propositionis necessariae. Et sic est ista consequentia materialis bona simpliciter, *Homo currit, igitur animal currit;* et reducitur ad formalem per istam necessariam, *Omnis homo est animal.* Et ista subdivitur in multa membra secundum diversitatem locorum dialecticorum. Consequentia materialis bona ut nunc est illa quae potest reduci ad formalem per assumptionem alicuius propositionis contingentis verae. Et sic, posito quod Socrates est albus, illa consequentia est bona ut nunc, *Socrates currit, igitur album currit,* quia reducitur ad formalem per istam contingentem *Socrates est albus.*»

---

246 *De Puritate Artis Logicae*, ed. cit., p. 65.

La clasificación del Pseudo-Escoto podría esquematizarse por medio del siguiente cuadro:



Si dejamos a un lado por ahora las *consequentiae materiales bonae ut nunc*, la precedente división recuerda la de Abelardo. Pues una *consequentia formalis* es lo que éste llamaría un argumento perfecto, o la correspondiente proposición condicional verdadera *secundum complexionem* (esto es, en virtud de su estructura, determinada por las partículas sincategoremáticas que contiene y el número y la ordenación de sus restantes elementos); en tanto que una *consequentia materialis bona simpliciter* es lo que llamaría un argumento imperfecto, o la correspondiente proposición condicional verdadera *gratia terminorum* (esto es, en virtud de los significados específicos de sus términos). El Pseudo-Escoto no habla, ciertamente, de argumentos perfectos ni imperfectos, pero parece estar pensando en esta distinción cuando define la *consequentia materialis* como aquélla que podría gozar de validez formal con el concurso de una premisa adicional. Incluso llega a afirmar que las *consequentiae bonae simpliciter* han de subdividirse de acuerdo con las diferentes variedades de lugares comunes dialécticos, como si desease conectar expresamente este apartado de su doctrina con lo que Abelardo había escrito acerca de las *consequentiae* en su estudio de los tópicos.

En contraste con los otros epígrafes de la clasificación, la noción de *consequentia materialis bona ut nunc* constituye una novedad, pero de nuevo en este punto cabría empalmar con la obra de Abelardo y hasta quizás la de Boecio. Una vez admitido que un argumento pueda ser entimemático, o imperfecto en el sentido de requerir para su validez una premisa inexpresada, no hay ninguna razón para excluir la posibilidad de que un argumento sea imperfecto por faltarle una premisa contingente. Siendo del dominio público que Sócrates es blanco, resulta natural decir con el Pseudo-Escoto «Sócrates corre; luego una cosa blanca corre». De acuerdo con sus principios, Abelardo habría rehusado admitir la verdad de la correspondiente proposición condicional «Si Sócrates corre, entonces una cosa blanca corre», puesto que no se trata del enunciado de una conexión necesaria; pero su posición a este respecto estaría en claro desacuerdo con el sentido común. Si, no obstante, se le hubiera podido convencer de que aquella proposición condicional era una auténtica *consequentia* en su sentido, habría dicho sin duda que a lo sumo es *vera ut nunc*, esto es, verdadera en este instante o siendo las cosas como son, puesto que para él la distinción entre verdad necesaria y verdad contingente se reduce a la distinción entre verdad en todo instante

y verdad en un instante dado. Así pues, incluso aquel apartado del esquema del Pseudo-Escoto que Abelardo habría rechazado se halla descrito con fraseología que hubiera merecido su aprobación. Si, por nuestra parte, no vemos con agrado esa fraseología y nos resistimos a hablar en castellano de verdad-en-un-instante-dado o validez-en-un-instante-dado, tampoco traicionaríamos el pensamiento del Pseudo-Escoto apellidando de «contingentemente válida» su *consequentia bona ut nunc*. Pues, si bien su terminología recuerda la teoría de Abelardo, el caso es que su explicación no encierra connotación alguna temporal, apareciendo en ella dicha *consequentia* contrastada con la *bona simpliciter*, que podríamos apellidar de «absolutamente válida». Probablemente el Pseudo-Escoto (o el lógico, si no fue él, que introdujo por vez primera aquella innovación) se atrevió a dar tal paso respaldado por lo que había escrito Boecio acerca de las proposiciones condicionales verdaderas sólo *secundum accidens*.

Veremos dentro de un momento cómo, según la definición del Pseudo-Escoto, una *consequentia materialis vera ut nunc* habría de equivaler, en términos proposicionales, a un condicional filónico. Al tropezar una vez más con este último en el contexto de un debate medieval acerca de los requisitos de la inferencia válida, no podemos por menos de preguntarnos si los autores medievales que trataban el tema de las *consequentiae* recibieron de hecho alguna inspiración de sus predecesores megáricos y estoicos; pero hoy por hoy no hay posibilidad de dar una respuesta a esa pregunta. En las obras de Cicerón y de Boecio tenían a su disposición un cierto número de fragmentos megáricos y estoicos, pero mucho más importante —como posible fuente de información sobre la lógica antigua no aristotélica— fue la circulación de una traducción latina de los *Bosquejos pirrónicos* de Sexto Empírico. Estos últimos resultaban asequibles ya en el siglo XIII, pues uno de los manuscritos en que han llegado hasta nosotros es una colección de tratados filosóficos copiados hacia el 1300; y, dado que los restantes escritos recogidos en la colección datan del siglo XII, es incluso posible que los *Bosquejos* hubieran sido traducidos antes de aquella fecha [247]. El modo, sin embargo, como el Pseudo-Escoto introduce su caracterización de las *consequentiae materiales verae ut nunc* no envuelve la menor ostentación de una posible influencia clásica. El autor las define en unos términos que resultan completamente naturales tras de su tratamiento de las *consequentiae materiales verae simpliciter*. Al pasar luego revista a sus propiedades paradójicas, las hace aparecer como un corolario inevitable de su definición originaria, de modo que cabría decir de él (o del promotor de la doctrina, si se trata de una persona diferente) que fue el primero en poner de manifiesto cuál sea la relación entre la conexión filónica y la implicación, así como en apuntar por qué merece aquélla la atención de los lógicos. La importancia de la tarea que aguarda a los historiadores de la filosofía que estudien el influjo de Sexto Empírico en la Edad Media no radica en el carácter más o menos extraordinario de las doctrinas extraídas de la lectura de su obra, ni mucho menos en la imposibilidad de los autores medievales para llegar a descubrirlas por cuenta propia, sino sencillamente en el intrínseco interés de averiguar qué es lo que en realidad aconteció.

---

247 El manuscrito es el *Cod. Paris. Bibl. Nat. Lat.* 14700. Cf. H. Mutschmann, *Sexti Empirici Opera*, vol. I, p. x, y L. Minio Paluello, *Adam Balsamiensis Parvipontani Ars Disserendi (Twelfth Century Logic: Texts and Studies*, I), p. xv.

Inmediatamente a continuación de su clasificación de las *consequentiae*, que acaba de reproducirse, el Pseudo-Escoto pasa a enunciar y demostrar las cinco reglas siguientes:

1(*a*) *Ad quamlibet propositionem implicantem contradictionem sequitur quaelibet alia propositio in consequentia formali.*

2(*a*) *Ad quamlibet propositionem impossibilem sequitur quaelibet alia propositio non consequentia formali sed consequentia materiali bona simpliciter.*

2(*b*) *Ad quamlibet propositionem sequitur propositio necessaria bona consequentia simplici.*

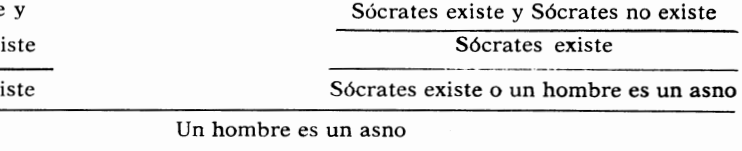
3(*a*) *Ad quamlibet propositionem falsam sequitur quaelibet alia propositio in bona consequentia materiali ut nunc.*

3(*b*) *Omnis propositio vera sequitur ad quamcumque aliam propositionem in bona consequentia materiali ut nunc.*

La demostración de 1(*a*) reza como sigue:

«Ad istam *Socrates est et Socrates non est*, quae implicat contradictionem de forma, sequitur *Homo est asinus* vel *Baculus stat in angulo* et sic de quocumque. Probatur, quia sequitur *Socrates est et Socrates non est, igitur Socrates non est*, quia a copulativa ad alteram eius partem est consequentia formalis. Tunc reservetur illud consequens. Postea sequitur *Socrates est et Socrates non est, igitur Socrates est* per eamdem regulam. Et ad istam *Socrates est* sequitur *Igitur Socrates est vel homo est asinus*, quia quaelibet propositio infert se ipsam formaliter cum quacumque alia in una disiunctiva. Tunc arguitur ex consequente: *Socrates est vel homo est asinus, sed Socrates non est* (ut reservatum fuit prius), *igitur homo est asinus*. Et sicut arguitur de ista, ita potest argui de quocumque alia; omnes enim consequentiae sunt formales.»

Sirviéndonos de una raya horizontal para indicar la transición representada por la partícula latina *igitur*, podemos reproducir toda la prueba por medio del siguiente árbol de derivación:



Como advierte el Pseudo-Escoto, cada una de las *consequentiae* que intervienen en la derivación es formalmente válida, de suerte que —por paradójico que pueda parecer— no cabe rechazar ninguna de ellas sin rechazar a un tiempo principios esenciales de la lógica primaria.

Para una primera demostración de 2(*a*), el Pseudo-Escoto se sirve de este resultado. Es decir, comienza por asumir la validez formal de la *consequentia* «Un hombre es un asno y un hombre no es un asno, luego tú estás en Roma». A continuación, y ya que es imposible que un hombre sea un asno, apunta que es necesario que un hombre no sea un asno, y concluye que la *consequentia materialis* «Un hombre es un asno, luego tú estás en Roma» es *bona simpliciter*, siendo así reducible a una *consequentia* formalmente válida mediante la adición de una premisa necesariamente verdadera.

Pero observa asimismo que su tesis podría ser demostrada sin recurrir a 1(*a*) mediante una derivación como la que ahora sigue, donde la proposición «Un hombre no es un asno» se consideraría necesariamente verdadera:

Un hombre es un asno

Un hombre es un asno o tú estás en Roma — Un hombre no es un asno

Tú estás en Roma

Con respecto a 3(*a*), el Pseudo-Escoto nos ofrece una demostración dependiente de 1(*a*) a la manera como lo era la primera de las demostraciones de 2(*a*), pero es obvio que asimismo podemos construir una demostración del tipo de la segunda de 2(*a*) con sólo insertar una proposición contingentemente falsa en lugar de «Un hombre es un asno» y su contradictoria en lugar de «Un hombre no es un asno».

Para la demostración de 2(*b*), el Pseudo-Escoto aplica el principio de contraposición «In omni bona consequentiä oppositum consequentis infert oppositum antecedentis». Si de una proposición imposible se sigue con *consequentia simplex* cualquier proposición que deseemos, entonces de la negación de cualquier proposición que deseemos —y por ende de cualquier proposición que deseemos— se seguirá del mismo modo una proposición necesaria que sea la negación de la proposición imposible originaria. *Mutatis mutandis*, 3(*b*) vendría a derivarse por un procedimiento análogo a partir de 3(*a*). Para una demostración del principio de contraposición, que nominalmente es el protagonista de toda la *quaestio*, el Pseudo-Escoto se apoya en sus definiciones de los diversos géneros de *consequentiae*.

No deja de ser curioso que el autor de estas demostraciones, que era indudablemente un lógico sumamente hábil, no haya hecho en su *quaestio* intento alguno de demostrar, o por lo menos formular, la tesis a la que habría correspondido la numeración 1(*b*) de nuestra relación, a saber, la tesis «Cualquier proposición que sea ella misma formalmente necesaria por ser la disyunción de dos contradictorias se sigue formalmente de cualquier proposición». Pues, aunque numera consecutivamente sus cinco tesis en el orden en que han sido transcritas más arriba, es difícil pensar que se le pasara por alto la posibilidad de una tesis relacionada con la primera suya de modo semejante a como su tercera se relaciona con su segunda y su quinta con su cuarta. Hemos de suponer, por consiguiente, que la consideró en algún sentido menos clara y satisfactoria que las restantes. Pero se acercó mucho a su formulación en la *quaestio* III al segundo libro de los *Primeros Analíticos*.

El problema que esta última *quaestio* se plantea es «Utrum ad utrumque contradictoriorum possit sequi idem», y se abre con un argumento parecido al de Kilwardby tendente a demostrar que la negativa de Aristóteles era excesivamente terminante, puesto que por lo menos hay una proposición que se sigue de otra y su contradictoria, a saber, la disyunción de estas dos últimas. Pero no es esto todo. En relación con sus cinco tesis consecuenciales paradójicas (que reproduce y vuelve a probar en este punto sin modificaciones apreciables), el Pseudo-Escoto emprende la tarea de mostrar con mayor detalle dónde reside el fallo de la negativa aristotélica. Está claro que cualquier proposición se sigue de sí misma en una *consequentia* válida de

cada uno de los tres géneros distinguidos por el Pseudo-Escoto. Pero, si una proposición es verdadera, se seguirá *ut nunc* de su propia negación, puesto que por 3(*b*) se sigue *ut nunc* de cualquier cosa; de donde se desprende que una proposición verdadera puede seguirse *ut nunc* de cada una de dos contradictorias. De modo semejante, si una proposición es necesaria, se seguirá también *simpliciter* de su propia negación, puesto que por 2(*b*) se sigue *simpliciter* de cualquier cosa; de donde se desprende que una proposición necesaria puede seguirse *simpliciter* de cada una de dos contradictorias. Finalmente, una proposición tal que su negación encierre una contradicción se seguirá *formaliter* por 1(*a*) de dicha negación; por tanto, una proposición de aquel género podrá seguirse *formaliter* de cada una de dos contradictorias. Lo más que cabe decir, pues, en favor de la doctrina de Aristóteles es que una proposición categórica simple no se puede seguir *formaliter* a un tiempo de una proposición y de la negación de esta última. Hasta aquí no se ha introducido añadido ninguno al repertorio primitivo de las cinco tesis paradójicas; pero, al abordar el último de los tres casos reseñados, el Pseudo-Escoto parece entrever la posibilidad de una extensión de su doctrina. Pues no sólo se pronuncia por la objeción a Aristóteles que acabamos de reproducir, sino también por el principio de bastante mayor alcance que establece: «Ad utrumque contradictoriorum sequitur idem formaliter ubi consequens est disiunctiva facta ex duobus contradictoriis ut ista *Socrates currit vel Socrates non currit*». El principio se demuestra haciendo ver que la contradictoria de una disyunción semejante, por encerrar ella misma una contradicción, implicaría cualquier cosa *gratia formae* y por lo tanto implicaría incidentalmente cualquier par de contradictorias, lo que —de acuerdo con el principio de contraposición para las *consequentiae*— sería tanto como decir que la disyunción se sigue *formaliter* de cada uno de los miembros de la pareja de contradictorias. En rigor, le habría bastado a estos efectos con afirmar que una disyunción de contradictorias se sigue *formaliter* de cualquier cosa que deseemos, ya que su negación implica formalmente la negación de cualquier cosa que deseemos. Pero el Pseudo-Escoto no siguió este camino.

Para que el argumento que se acaba de exponer funcione como es debido, es esencial que la negación de una disyunción de contradictorias equivalga a su vez a la conjunción de ambas contradictorias, siendo posible que el Pseudo-Escoto se dejara extraviar por un momento al no haberlo sabido reconocer así. Pero, cualquiera que haya podido ser la razón de su rodeo, es interesante reparar en que el procedimiento adoptado por fin en su argumentación, como el utilizado en las demostraciones de 2(*b*) y 3(*b*), envuelve un principio de contraposición de segundo orden para toda suerte de *consequentiae*, que formula en este punto como sigue: «Quando ad antecedens sequitur consequens, ad oppositum consequentis sequitur oppositum antedentis». Pues no es una casualidad que actuase a este respecto como lo hizo, según podría comprobarlo quienquiera que desee demostrar 1(*b*) sirviéndose exclusivamente de *consequentiae* de primer orden, esto es, por un procedimiento afín al empleado por el Pseudo-Escoto para la demostración de 1(*a*). El hecho de que 1(*a*) se pueda demostrar directamente mediante simples *consequentiae* de primer orden, pero no así en cambio 1(*b*), se relaciona con el hecho de que cualquier argumento puede tener varias premisas, pero tan sólo una conclusión.

En tratamientos más primitivos de las *consequentiae*, las tesis 2(*a*) y 2(*b*) se derivaban partiendo del supuesto de que un enunciado condicional es verdadero si, y sólo si, es imposible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, arguyéndose que su naturaleza paradójica mostraba la necesidad de una definición más estricta de la dependencia condicional. El Pseudo-Escoto, por el contrario, presenta la totalidad de sus cinco tesis paradójicas como enunciados verdaderos cuyo único motivo de curiosidad es la escasamente familiar aplicación que en ellas se hace de la noción de consecuencia, o «seguimiento» (*following*), como cuando decimos que una proposición «se sigue de» otra. Por lo que 1(*a*) concierne, este enfoque posee una clara justificación. Pues, en efecto, la demostración de la primera paradoja descansa íntegramente sobre tres reglas de la implicación formal que nadie podría plausiblemente cuestionar, a saber, (I) la regla según la cual una proposición conjuntiva implica cada uno sus miembros, (II) la regla según la cual una proposición disyuntiva es implicada por cada uno de sus miembros y (III) la regla según la cual una proposición disyuntiva y la negación de uno de sus miembros implican conjuntamente el otro miembro. Es cierto, desde luego, que de una proposición que envuelve una contradicción nada podría inferirse si por «inferencia» entendemos transición de lo conocido a lo previamente desconocido, razón por la cual resulta un tanto absurdo el empleo de *igitur* en la fórmula: «Sócrates est et Socrates non est, igitur baculo stat in angulo». Pero si la teoría de las *consequentiae* se interpreta como una caracterización de la derivabilidad de unas proposiciones a partir de otras, nada hay de absurdo entonces en 1(*a*). Por el contrario, parece de buen sentido afirmar que quienquiera que acepte algo formalmente contradictorio no estará ya en situación de rechazar ninguna otra cosa. Más todavía, 1(*b*) —que el Pseudo-Escoto no llegó a formular expresamente— escapa asimismo a toda crítica, puesto que cabe derivarla de 1(*a*) con la ayuda del inobjetable principio de contraposición. ¿Pero qué hay de las otras tesis paradójicas? La demostración de estas últimas que el Pseudo-Escoto nos ofrece descansa en las definiciones de sus dos clases de *consequentiae materiales*, y aquí tal vez cabría alegar que esas definiciones se hallan desacreditadas por los resultados extraídos de las mismas.

El hecho de que, en el sistema del Pseudo-Escoto, aparezcan las *consequentiae materiales* tratadas todas ellas como argumentos imperfectos es más bien desafortunado. Pues, en el sentido corriente del adjetivo «perfecto», una *consequentia materialis bona simpliciter* sería sin más perfectamente válida; y ni siquiera desde un punto de vista psicológico habría nada que ganar con reducirla a *consequentia formalis*, ya que quien dude de su validez podría también dudar de la verdad de la premisa suplementaria requerida para llevar a cabo aquella reducción. Pero una *consequentia materialis bona ut nunc* constituye, en cambio, un argumento imperfecto en el sentido usual de la expresión, ya que la conclusión estaría lejos de seguirse de las solas premisas, o premisa, declaradas. Se trataría, por así decirlo, de una *consequentia* por cortesía, esto es, en tanto que embrión de la genuina *consequentia* que habría de resultar de la adición de una premisa o en tanto que vástago resultante de la supresión de esta última. Ahora bien, en el primer caso, la definición del Pseudo-Escoto —aunque confundente por la razón antes expuesta— no llega a invalidar sus demostraciones de las tesis paradójicas 2(*a*) y 2(*b*). Pues ciertamente es el caso que una *conse-*

quentia materialis es *bona simpliciter* si, y sólo si, es posible reducirla a *consequentia formalis* del modo indicado por el Pseudo-Escoto. Mas la definición de *consequentia materialis bona ut nunc* de que se sirve aquél en sus demostraciones de las tesis paradójicas 3(*a*) y 3(*b*) comporta una forzada extensión del significado de la palabra *consequentia*, lo que hace de 3(*a*) y 3(*b*) no solamente tesis sorprendentes (que esto es, después de todo, lo que por lo común quiere decirse al llamarlas «paradójicas»), sino también inaceptables para cuantos deseen atenerse al uso ordinario de dicha expresión. Al acordar que «Sócrates corre, luego una cosa blanca corre» sería un argumento satisfactorio en determinadas circunstancias, no estamos, en efecto, comprometiéndonos por ello a conceder que se pueda calificar de contingentemente válido a cualquier argumento con sólo que haya posibilidad de reducirlo a validez formal por la adición de una premisa contingentemente verdadera, sin importar que sea la contradictoria de la premisa originaria. Suponer tal sería interpretar torcidamente el modo como nuestro uso corriente de las palabras se relaciona con su contexto. De manera semejante, cuando decimos que el complejo verbal «Si Sócrates corre, entonces una cosa blanca corre» se podría usar en ciertas circunstancias de forma que constituya un enunciado verdadero, no pretendemos incluir entre esas circunstancias la que de Sócrates no corra o la de que lo haga una cosa blanca distinta de Sócrates. Esto es, en rigor, lo que distingue al condicional ordinario del filónico.

Aunque el Pseudo-Escoto no se sirva de sus paradojas para desacreditar concepciones rivales de las *consequentiae* (como, por lo demás, hubiera estado perfectamente autorizado a hacer), el caso es que discute diversas otras alternativas antes de ofrecernos su definición general más arriba citada. No está claro si lo que dice a este respecto constituye la relación de un debate sostenido entre sus predecesores o se trata de un planteamiento dialéctico de su cosecha destinado a facilitar la exposición. Comoquiera que sea, apunta que hay tres diferentes caracterizaciones posibles (*triplex est modus dicendi*), contra cada una de las cuales se puede argumentar (*arguitur*) mediante un contraejemplo.

Según la primera de dichas caracterizaciones, para la validez de una *consequentia* es necesaria y suficiente la imposibilidad de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Mas en su contra obra el ejemplo «Toda proposición (esto es, todo signo proposicional u oración enunciativa) es afirmativa, luego ninguna proposición es negativa». La *consequentia* en su conjunto sería en este caso evidentemente válida y, sin embargo, cabe al menos pensar que el antecedente fuese verdadero en tanto el consecuente habría de ser falso, ya que su propia existencia lo refutaría.

Según la segunda caracterización, la condición necesaria y suficiente de validez de una *consequentia* es la imposibilidad de que las cosas se acomoden a lo significado por el antecedente sin que asimismo se acomoden a lo significado por el consecuente. Posiblemente esta formulación trate de eludir la dificultad planteada por el caso de oraciones que se refutan a sí mismas, como la que acabamos de considerar. Mas contra ella se levanta el ejemplo «Ninguna quimera es un macho cabrío, luego un hombre es un asno». Aquí, la *consequentia* en su conjunto se diría inválida por ser el antecedente verdadero (en virtud del principio de que para la verdad de una proposición negativa basta que no se dé el estado de cosas significado por la correspon-

diente afirmativa contradictoria) y el consecuente falso. Sin embargo, y contrariamente a lo que acaba de sugerirse, se dice que es imposible que las cosas se acomoden a lo significado por el antecedente sin que asimismo se acomoden a lo significado por el consecuente, lo que es tanto como reconocer la imposibilidad de que las cosas se acomoden en ningún caso a lo significado por el antecedente. Todo esto suena ciertamente un tanto extraño. Tal vez la clave del asunto resida en la circunstancia de que el estado de cosas significado por el antecedente envolvería la existencia de quimeras. Pero, de ser así, la existencia de por lo menos una quimera también parecería requerirse para la verdad del antecedente, ya que —en la acepción usual de esta noción— su verdad equivale a la realización del estado de cosas significado por dicho antecedente, al que no sería razonable negar alcance existencial en un contexto y otorgárselo en el otro. El Pseudo-Escoto no hace comentarios sobre esta argumentación; y su silencio indica muy posiblemente que la argumentación es suya o, por lo menos, merecedora de su aprobación.

Según la tercera caracterización, una *consequentia* es válida si, y sólo si, es imposible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso cuando ambos se formulan al unísono (*antecedente et consequente simul formatis*). El añadido de esta cualificación parece obedecer también al intento de escapar a la objeción esgrimida frente a la primera caracterización. Si «Toda proposición es afirmativa» se formulara al mismo tiempo que «Ninguna proposición es negativa», ambas proposiciones serían contingentemente falsas y, por ende, podrían respectivamente oficiar como antecedente y consecuente de una *consequentia* válida. Mas contra esta nueva sugerencia tendríamos el ejemplo «Dios existe, luego esta *consequentia* es inválida». Si el antecedente se supone necesariamente verdadero, cabría concluir que la *consequentia* en su conjunto ha de ser inválida, ya que la hipótesis de que fuera válida conduciría a una contradicción. Mas esto es tanto como decir que el consecuente es necesariamente verdadero, con lo que tendríamos una *consequentia* inválida que satisface la condición de validez antes estipulada. Tampoco aquí añade el Pseudo-Escoto comentario ninguno detallado, contentándose con añadir a la tercera caracterización la cláusula «excepto en aquel caso en que el sentido del consecuente sea inconsistente con el sentido de la partícula inferencial (*igitur*) que indica la existencia de una *consequentia*». E incluso así hace escaso uso ulteriormente de semejante cualificación. En efecto, la omite en su definición de *consequentia* del parágrafo siguiente (esto es, la ya citada por nosotros) y únicamente vuelve a mencionarla por una sola vez, a saber, en su primera versión de la tesis paradójica 2(*b*), en que parece considerarla especialmente relevante.

Ya que la noción de implicación es por lo menos tan simple y clara como la de imposibilidad lo pueda ser, no parece que ganemos gran cosa con ninguna de las caracterizaciones de la validez de un argumento reseñadas por el Pseudo-Escoto. Pero de todas las que toma en cuenta, incluyendo la finalmente adoptada por él mismo, la segunda parece ser la más satisfactoria, puesto que hace consistir la validez de un argumento en una cierta relación entre contenidos proposicionales más bien que entre valores de verdad de signos proposicionales (esto es, meras expresiones verbales más bien que auténticas proposiciones). No es sorprendente, pues,

que la crítica opuesta a dicha sugerencia resulte sumamente endeble. Pero es interesante reparar en que los lógicos que favorecían esta tesis creyeron necesario hacer frente a una objeción un tanto parecida a la esgrimida contra la primera de las caracterizaciones enumeradas en la lista del Pseudo-Escoto. Como Buridan apuntara, es un error suponer que una *consequentia* ha de ser válida si es imposible que, al formularla, tenga lugar el estado de cosas significado por el antecedente sin que ocurra otro tanto con el significado por el consecuente [248]. Pues la *consequentia* «Ninguna proposición es negativa, luego alguna proposición es negativa» es obviamente inválida; y, sin embargo, es ciertamente imposible que el estado de cosas significado por el antecedente tenga lugar una vez formulada dicha *consequentia*. Lo que habría que decir sería más bien que una *consequentia* es válida si, para el estado de cosas significado por el antecedente y el estado de cosas significado por el consecuente, es imposible que el primero tenga lugar sin el segundo. Esta última condición diferiría de la antes rechazada por constituir una fórmula de imposibilidad *in sensu diviso*. Es decir, la imposibilidad requerida no es simplemente imposibilidad por relación al hecho contingente de que los estados de cosas mencionados se hallen significados en la *consequentia*.

Si tornamos ahora al tratamiento de las *consequentiae* en la *Summa Totius Logicae* de Guillermo de Ockharm, encontraremos la misma terminología acompañada de explicaciones diferentes. En diversos aspectos, su versión de la teoría es menos satisfactoria que la del Pseudo-Escoto y hasta podría pensársela anterior a la de éste, pues no hay en ella indicio alguno de cómo puedan hallarse relacionadas entre sí la una y la otra. Ockham comienza diciéndonos que las *consequentiae* difieren de los silogismos por ser entimemas (esto es, argumentos elípticos) y enumera a continuación un cierto número de distinciones que cabría establecer entre las mismas [249]. Su modo de representar en una lista las citadas distinciones parece sugerir que, en su mayoría, las considera independientes unas de otras; pero veremos enseguida que este último no puede ser el caso.

En primer lugar, distingue entre *consequentiae simplices* y *consequentiae ut nunc* por exclusiva referencia a las circunstancias temporales de su validez. Si el antecedente no puede ser verdadero en ningún instante sin que lo sea el consecuente, la *consequentia* será *simplex;* pero si en un instante dado, aunque no en el momento de hablar, puede el antecedente ser verdadero sin que lo sea el consecuente, la *consequentia* será sólo *ut nunc*. Este hincapié en la verdad-en-un-instante-dado es poco afortunado por las razones que ya vimos en nuestra discusión del argumento aristotélico acerca de la batalla naval. En cambio, la primacía que la presentación de Ockham otorga a la distinción entre validez absoluta y contingente constituye un mérito de la misma. Pues, comoquiera que podamos definir las *consequentiae ut nunc*, está claro que sólo son *consequentiae* por cortesía, que conviene por tanto distinguir desde un principio de las *consequentiae* absolutas.

A continuación Ockham prosigue distinguiendo entre *consequentiae* que se hacen valer *per media intrinseca* y aquellas que se hacen valer *per media*

---

248 *Sophismata*, c. 8, soph. 2; citado por I. M. Bochenski en *Formale Logik*, § 30.18, siguiendo a E. Moody.

249 *Summa Totius Logicae*, III (III), 1.

extrinseca. El vocablo *medium* parece introducirse por vez primera en este contexto, pero los adjetivos «intrínseco» y «extrínseco» provienen de la teoría de los tópicos. Ockham explica que por *medium intrinsecum* entiende una proposición integrada por términos contenidos en la propia *consequentia*, en tanto que por *medium extrinsecum* entiende una regla de carácter general que no tiene más que ver con los términos de la *consequentia* que con cualesquiera otros. Como ejemplo del primer tipo de *consequentia* nos ofrece el argumento «Sócrates no corre, luego un hombre no corre», que debe su validez al *medium* «Sócrates es un hombre»; y, como ejemplo del segundo tipo, el argumento «Sólo un hombre es un asno, luego todo asno es un hombre», que debe su validez a la regla «Una proposición afirmativa excluyente equivale a una proposición afirmativa universal con los términos traspuestos» y no necesita apoyarse en ninguna proposición que incluya los términos «hombre» ni «asno». Los silogismos —nos dice— son hechos valer *per media extrinseca*, y toda *consequentia* hecha valer *per medium intrinsecum* podría ser asimismo hecha valer, aunque menos directamente, *per medium extrinsecum*. De todo ello parece desprenderse que la distinción coincide con la de Abelardo entre argumentos llamados imperfectos y argumentos llamados perfectos. Los últimos son válidos en virtud de su estructura y se subsumen por lo tanto bajo reglas generales del tipo de las descritas por Ockham, mas los primeros necesitan de premisas suplementarias en orden a adquirir una perfecta formulación. Al admitir a los argumentos perfectos entre las *consequentiae*, Ockham se aparta de su originaria descripción de estas últimas como entimemas; pero, en lugar de reconocerlo así, procede a agrupar conjuntamente como *media* lo mismo reglas de carácter general que premisas suplementarias, confundiendo por tanto a unas con otras.

En tercer lugar, Ockham distingue entre *consequentiae formales* y *consequentiae materiales*, pero confiriendo nuevos sentidos a ambas expresiones. En lugar de decir (como habría hecho el Pseudo-Escoto si hubiese hablado de *media*) que sólo son formales aquellas *consequentiae* cuya validez se halla asegurada por la acción de *media extrinseca* relativas a la forma o estructura de sus proposiciones, incluye también entre las *consequentiae* formales aquellas cuya validez se halla directamente asegurada *per medium intrinsecum* o indirectamente asegurada *per medium extrinsecum* [*non*] *respiciens conditiones generales propositionum, scilicet veritatem, falsitatem, necessitatem, impossibilitatem;* y cita como ejemplo de los dos géneros de *consequentiae* por él reconocidos los mismos argumentos empleados para ilustrar la distinción del párrafo anterior. Una *consequentia materialis*, dirá entonces, es aquella cuya validez se halla asegurada *praecise ratione terminorum et non ratione alicuius medii extrinseci* [*non*] *respicientis praecise generales conditiones propositionum*. Los únicos especímenes exhibidos bajo dicho encabezamiento son los dos argumentos evidentemente paradójicos «Un hombre corre, luego Dios existe» (donde el consecuente se supone necesario) y «Un hombre es un asno, luego Dios no existe» (donde el antecedente se supone imposible). De los ejemplos que ilustran su distinción se desprende con claridad que Ockham únicamente llama formal a una *consequentia* si, y sólo si, ésta envuelve una conexión necesaria en el sentido estricto de que hablaba Abelardo, en tanto que una *consequentia* material es siempre para él un argumento paradójico. Pero si, como

Ockham, pasamos por alto las tesis 1(*a*) y 1(*b*) del cuadro más arriba citado, podríamos decir que las *consequentiae* paradójicas difieren de las vulgares o trilladas en que no envuelven para nada *media extrinseca*, salvo aquellos que se refieren al *status* genérico de sus proposiciones, como por ejemplo la regla de que una proposición imposible implica cualquier cosa. Y esto es, al parecer, lo que trata Ockham de expresar cuando habla de las *conditiones generales propositionum* en las dos definiciones que hace un momento transcribimos [250].

Tras estas distinciones generales, Ockham pasa a la consideración de las *consequentiae* de acuerdo con las características lógicas de sus consecuentes (esto es, de acuerdo con la universalidad o particularidad de las proposiciones en que estos últimos consisten), formulando al efecto una serie de reglas especiales. Pero en el último capítulo dedicado a la cuestión retorna a ocuparse de los principios básicos de la teoría, formulando once reglas [251] que con algunas modificaciones y adiciones reaparecen en muchas obras posteriores:

(1) *Lo falso nunca se sigue de lo verdadero.*
(2) *Lo verdadero puede seguirse de lo falso.*
(3) *Si una consecuencia es válida, la negación de su antecedente se sigue de la negación de su consecuente.*
(4) *Cualquier cosa que se siga del consecuente se sigue del antecedente.*
(5) *Si el antecedente se sigue de cualquier proposición, el consecuente se sigue de lo mismo.*
(6) *Lo consistente con el antecedente es consistente con el consecuente.*
(7) *Lo inconsistente con el consecuente es inconsistente con el antecedente.*
(8) *Lo contingente no se sigue de lo necesario.*
(9) *Lo imposible no se sigue de lo posible.*
(10) *De lo imposible se sigue cualquier cosa.*
(11) *Lo necesario se sigue de cualquier cosa.*

De todas estas reglas, la (7), la (8) y la (9) se dice con razón que únicamente rigen para las *consequentiae* absolutas. Pero idéntica restricción se aplica a (6) también. Y merece destacarse que (3), (4) y (5) rigen sólo para las *consequentiae* contingentemente válidas si la segunda intervención de la forma verbal «se sigue de» se toma como indicación de la clase de nexo secuencial que conviene a tales *consequentiae*. Pues una proposición que se siga absolutamente del consecuente de una *consequentia* contin-

250 El texto de este pasaje que reproducen las ediciones antiguas —sin la inserción de la partícula *non* delante de *respiciens* y *respicientis*— resulta ininteligible. En un artículo primeramente publicado en los *Przeglad Filozoficzny*, XXXVIII (1935), y traducido tras su muerte bajo el título de "Die Aussagenlogik bei Wilhelm Ockham", *Franziskaniche Studien*, XXXII (1950), pp. 97-134, J. Salamucha ha sugerido la conveniencia de leer *non veritatem vel falsitatem, necessitatem vel impossibilitatem* tras *conditiones generales propositionum*. Dicha versión no carece de algún apoyo manuscrito, pero es todavía insatisfactoria, pues parece estar claro que las *conditiones generales propositionum* de que habla Ockham han de entenderse por contraste con las formas internas de esas proposiciones, debiendo consistir en la verdad, la falsedad, la necesidad y la imposibilidad, tal y como del texto comúnmente recibido se desprende. La introducción de *non* en los lugares precitados restablece el sentido requerido, justifica la segunda intervención del adverbio *praecise* (que Salamucha omite) y da lugar a un texto lo suficientemente complicado como para quedar expuesto con facilidad a la corrupción.

251 *Summa Totius Logicae*, III (III), 37.

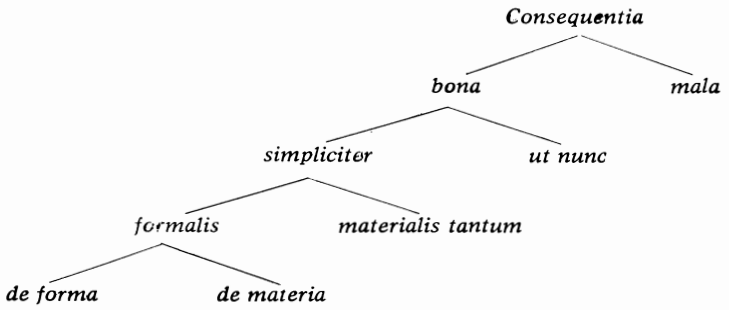
gentemente válida únicamente necesita seguirse contingentemente del antecedente. Las cinco primeras reglas, así como la novena, podrían haberse extraído todas ellas de las obras de Aristóteles, en tanto que la sexta, la séptima y la octava hubieran por lo menos merecido su aprobación. Mas las dos últimas corresponden a una tradición diferente. De ellas dice Ockham, un tanto extrañamente: «Pero tales *consequentiae* no son formales, por lo que dichas reglas no son de uso común». Es cierto, desde luego, que no son formales en el específico sentido que le da él al calificativo, pero nosotros ya hemos visto cómo el Pseudo-Escoto logró probar mediante una serie de irreprochables reglas de primer orden que —de acuerdo con el sentido usual del término «formal»— cualquier cosa se sigue formalmente de lo formalmente imposible. Y si, por lo demás, las reglas (10) y (11) nos resultan chocantes, ello se debe únicamente a su inutilidad para los propósitos a los que se enderezan nuestras inferencias cotidianas, lo que no empece a su extraordinario interés para la teoría general de la implicación.

A diferencia de Ockham, Rodolfo Strode y Ricardo Ferrybridge se contentan con una sola gran dicotomía, a saber, la distinción entre *consequentiae* formales y materiales. Pero Strode al menos la interpreta de manera muy semejante a la de Ockham. Según él, toda *consequentia* material que sea válida autoriza la inferencia (*illatio*) del consecuente a partir del antecedente, pero una *consequentia* formal comporta además de esto una conexión de sentido o comprensión (*intellectio*) entre antecedente y consecuente. Así ocurre en «Si alguien sabe que eres hombre, sabe que eres animal», donde el consecuente se sigue de la compresión formal (*de formali intellectu*) del antecedente. De estas definiciones extrae la interesante conclusión de que toda *consequentia* formal es material pero no viceversa. Como ejemplo de *consequentia* meramente material (*materialis tantum*) cita «Un hombre es un asno, luego en la esquina hay un bastón», dando como únicas reglas para las *consequentiae* materiales la (10) y la (11) de la lista de Ockham [252]. La novedad más llamativa de su caracterización es la completa ignorancia por parte de Strode de la noción de forma en su sentido puramente lógico, que sustituye por la noción de comprensión. Pero un enfoque semejante estaba ya al menos implícito en la interpretación abelardiana de la conexión estricta. El tratamiento de la cuestión por parte de Ferrybridge se le asemeja en algunos aspectos, pero el autor parece deseoso de combinar la doctrina ockhamista de la formalidad con un punto de vista afín al del Pseudo-Escoto. Al comienzo de su breve tratado, escribe que las *consequentiae* no formales son o bien (1) argumentos que discurren de lo imposible a algo no especialmente relevante, o bien (2) argumentos que concluyen en lo necesario a partir de algo no especialmente relevante, o bien (3) argumentos que dejarían de ser válidos si cambiasen sus términos. Y tras el apartado (2) de su lista añade la observación: «Mas por mi parte no considero válido este tipo de argumento» [253].

252 *Consequentiae Strodi cum Commento Alexandri Sermonete*, etc. (Venecia, 1517), pp. 1*r*. y *v*., 4*v*.

253 Ibid. p. 93*v*.

La causa ocasional de estas curiosas desviaciones de la doctrina del Pseudo-Escoto, comparativamente más simple que cualquiera de ellas, fue probablemente el debate en torno a las paradojas. Quizás Ockham y Strode trataban de encontrar algún sentido de «formal» que fuera a un tiempo más estricto, por un lado, y más comprensivo, por otro, que el del Pseudo-Escoto. Pudiera sorprendernos que deseasen continuar sirviéndose de la misma palabra puesto que su finalidad era distinta, pero hay que tener en cuenta que *formalis* gozaba en latín medieval de las mismas asociaciones que «idóneo» o «genuino» en nuestro castellano de hoy. Comoquiera que sea, el resultado de sus innovaciones fue la introducción de una considerable confusión terminológica en el lenguaje de la teoría de las *consequentiae*. En los primeros años del siglo XV, Pablo de Pergola intentó estructurar en el siguiente cuadro las diversas distinciones elaboradas hasta él [254]:



El adjetivo *formalis* ha de entenderse aquí en el sentido de Strode, sobre cuya obra versa el comentario de Pablo de Pergola; y el adverbio *tantum* que sigue a *materialis* expresa una limitación exigida por la doctrina de Strode, según la cual las *consequentiae* formales son asimismo materiales. Con esta interpretación de la cuarta línea del cuadro se torna inteligible la siguiente subdivisión del mismo, que de otro modo no podría tener sentido. En efecto, se trata de la distinción del Pseudo-Escoto entre *consequentia* formal y material, pero expresada ahora con una nueva terminología ya que la suya propia ha sido empleada para servir a un cometido diferente.

Aunque el vocablo *consequentia* sería comúnmente reservado por los escritores tardíos para los argumentos formulados con ayuda de *igitur* o *ergo*, se seguía suponiendo que hay una estrecha conexión entre la validez de una *consequentia* y la verdad de un enunciado condicional. No es de extrañar, por consiguiente, que algunas de las fórmulas elaboradas para estipular la validez de una *consequentia* reaparezcan en la obra de Pablo de Pergola como estipulaciones de la verdad de un enunciado condicional [255]. En una lista de diez sentencias de otros lógicos que Pablo reproduce sin citar a los autores, la primera de ellas corresponde a la primera de las caracterizaciones consideradas por el Pseudo-Escoto y la octava coincide con la doctrina de Strode, en tanto la segunda parece haber sido concebida como réplica directa a la de Buridan antes mentada. No es posible por

254 Ibid. p. 48*v*.
255 *Logica Magna*, II, 9; 134*r*. A-135*r*. A.

ahora dilucidar la paternidad de las restantes sentencias y, en ocasiones, ni siquiera captar con claridad el auténtico sentido de todas ellas; pero parece razonable suponer que, en su mayor parte, cobraron vida en el curso de un debate en torno a la validez de las *consequentiae*.

Puesto que surgió del examen de los tópicos, la teoría de las *consequentiae* continuó siendo asociada a esta vieja rama de la lógica. Pero la mayor parte de los lógicos que se ocuparon de ellas, incluido Ockham, prestaron gran atención al género de *consequentiae* que el Pseudo-Escoto llamara formales. A diferencia de Aristóteles y los estoicos, los medievales no se sirvieron de ordinario de variables en orden a esquematizar las formas lógicas por las cuales se interesaban, sino procedieron a la formulación de reglas mediante descripciones generales. Así, cada una de estas reglas especiales acostumbraba a ser un enunciado en que se establecía que de cualquier antecedente de una determinada forma lógica a cualquier consecuente de otra determinada forma lógica relacionada con la anterior *valet consequentia* o *est bona consequentia formalis*. Las reglas generales que citábamos de Ockham no eran de este tipo, sino que algunas de ellas constituían principios de segundo orden de acuerdo con los cuales se hace posible derivar determinadas *consequentiae* válidas a partir de otras *consequentiae* asimismo válidas. En contraste con ellas, las reglas especiales de primer orden de que hemos hablado se ocupan de *consequentiae* cuya validez se halla asegurada en virtud de las partículas sincategoremáticas que intervienen en el antecedente o el consecuente, o en ambos.

En teoría, el estudio de las *consequentiae* cubría a veces todo el ámbito de la lógica deductiva, incluidas la doctrina de la conversión de las proposiciones categóricas y la del silogismo. De semejante concepción comprehensiva es una muestra, por ejemplo, el tratamiento de las *consequentiae* por parte del Pseudo-Escoto y Gualterio Burleigh, así como la *Perutilis Logica* de Alberto de Sajonia. Pero, en la práctica, los tratados sobre las *consequentiae* se consideraban usualmente como suplementos de la tradición aristotélica. Tras de haberse ocupado de argumentaciones tópicas tales como la *a superiori distributo ad inferius distributum* (esto es, la que discurre por ejemplo de «Todos los animales son mortales» a «Todos los hombres son mortales») [256], así como de las reglas de la conversión, los medievales presentaban una serie de reglas encargadas de gobernar variadas *consequentiae* como las que ahora siguen:

(1) *De una proposición conjuntiva a cada uno de sus miembros.*
(2) *De uno u otro miembro de una proposición disyuntiva a la totalidad de la que aquéllas forman parte.*
(3) *De la negación de una proposición conjuntiva a la disyunción de las negaciones de sus miembros y viceversa.*
(4) *De la negación de una proposición disyuntiva a la conjunción de las negaciones de sus miembros y viceversa.*
(5) *De una proposición disyuntiva y la negación de uno de sus miembros al otro miembro.*
(6) *De una proposición condicional y su antecedente a su consecuente.*

256 Ockham, *Summa Totius Logicae*, III (III), 2.

(7) *De una proposición condicional y la negación de su consecuente a la negación de su antecedente.*
(8) *De una proposición condicional a la proposición condicional que tiene por antecedente la negación del consecuente originario y por consecuente la negación del antecedente originario.*
(9) *De una proposición singular a la correspondiente proposición indeterminada.*
(10) *De cualquier proposición con una determinación añadida a la misma proposición desprovista de dicha determinación.*
(11) *De la necesidad a la actualidad.*
(12) *De la actualidad a la posibilidad.*
(13) *De la negación de la necesidad a la posibilidad de la negación y viceversa.*
(14) *De la negación de la posibilidad a la necesidad de la negación y viceversa.*

De esta lista de reglas consecuenciales, que no constituyen sino una selección del material disponible, las reglas comprendidas de la (1) a la (8) corresponden a lo que hemos llamado la lógica primaria. La mayor parte de ellas nos son ya conocidas, pero la (3) y la (4) —hoy comúnmente conocidas como reglas de De Morgan en honor del lógico que las redescubrió en el siglo XIX— son a un tiempo nuevas e interesantes. Se hallan presupuestas en la teoría del Pseudo-Escoto y aparecen expresamente formuladas en la obra de Ockham, aunque no en su tratamiento de las *consequentiae* [257]. Para un tratamiento sistemático de la lógica general, la regla (9) reviste gran importancia, pero en los tratados medievales impresos hasta la fecha no se encuentra rastro de una extensión de la lógica general más allá de los límites de la silogística, como la que entrañaría su aplicación. La regla es casualmente mencionada por Ockham, en el primero de sus capítulos sobre las *consequentiae*, como aquella por medio de la cual sería posible construir argumentos tales como «Sócrates corre, luego algo corre» [258]. En cuanto a la regla (10), su papel en la lógica general es análogo al de (1). Pero —como lo supo ver la mayor parte de los lógicos medievales— la versión de Ockham que acabamos de citar resulta defectuosa para su aplicación a las proposiciones del lenguaje ordinario [259], pues mientras es correcto argumentar «Un hombre blanco corre, luego un hombre corre» no lo sería en cambio argumentar «Tengo una perla de imitación, luego tengo una perla». Las reglas (11) y (12) constituyen principios básicos de la lógica modal que fueron formulados ya por Abelardo, pero la (13) y la (14) son reglas más complicadas propuestas por Pedro Hispano y parafraseadas por nosotros inspirándonos en la *Summa* de Ockham [260]. Guardan una interesante correspondencia con las reglas (3) y (4) antes citadas, así como con aquellas reglas de Guillermo de Shyreswood en que *non omnis* se hacía equivaler a *quidam non* y *non aliquis* a *omnis non*.

Como ocurría con la doctrina de la *suppositio terminorum*, también algunas de las más sutiles tesis de este otro apartado de la lógica medieval

257 Ibid. II, 32.
258 Ibid. III (III), 1.
259 Ibid. 6.
260 Ibid. 13.

se dejan insertar en lo que hoy día se conoce como teoría de la cuantificación. Así, Burleigh deriva del principio «Quod sequitur ad consequens sequitur ad antecedens» el teorema:

«In conditionali cuius antecedens est propositio particularis vel indefinita subiectum antecedentis supponit confuse et distributive respectu consequentis, ita quod ad talem conditionalem cuius antecedens est propositio particularis vel indefinita sequitur conditionalis in cuius antecedente subicitur aliquod inferius ad subiectum primae conditionalis. Verbi gratia sequitur enim: *Si animal currit, substantia currit; ergo si homo currit, substantia currit*» [261].

En otro lugar, el mismo autor propone la tesis «Quando aliqua consequentia est bona terminis acceptis sine distributione, e converso est bona terminis acceptis cum distributione» [262]. El contenido de la misma no queda del todo claro en la presente formulación; pero, a juzgar por las explicaciones de que Burleigh la acompaña, parece que lo que trató de formular es un principio un tanto complicado de argumentación *κατὰ πρόσληψιν* que podría expresarse de esta suerte: «Si lo que es predicable de algún A es predicable de algún B, entonces lo que es predicable de todo B es predicable de todo A». Y, en un tercer lugar, observa con acierto que del hecho de que cualquier cosa que se halle en posesión de todas las cualidades de un cierto repertorio (*qualelibet*) posea una determinada característica no es apropiado concluir que cualquier cosa que posea alguna cualidad de dicho repertorio (*aliquale*) haya de poseer dicha característica, ya que *qualelibet* es *inferius* por relación a *aliquale* [263]. Lo que quiere decir que *qualelibet*, aunque signo de universalidad, restringe la clase de las cosas sometidas a discusión, ya que su fuerza distributiva no se aplica a estas últimas sino más bien a las cualidades que nos sirven para seleccionarlas. Estos pasajes son reveladores y encierran un interés histórico considerable, ya que permiten hacernos una idea de las dificultades de expresión con que los lógicos habían de luchar antes de la invención de una sencilla pero adecuada notación simbólica para la teoría de la cuantificación.

En su demostración de la tesis paradójica 1(*a*), el Pseudo-Escoto había acreditado saber cómo validar una *consequentia* por referencia a otras a la manera seguida por Crisipo en la derivación de teoremos a partir de sus indemostrables. Y, en sus demostraciones de las tesis paradójicas 2(*b*) y 3(*b*), había también acreditado que sabía cómo llevar a cabo derivaciones consecuenciales mediante la aplicación de una regla de segundo orden como el principio de contraposición para las *consequentiae*. Ambos procedimientos demostrativos se encuentran en las obras de autores posteriores, en especial las de Gualterio Burleigh y Juan Buridan. No parece, no obstante, que se haya elaborado en la Edad Media ningún sistema de reglas derivadas como el atribuido a Crisipo ni parece tampoco, por lo tanto, que los lógicos de la época trabajasen intensamente en este género de empresa. Lo que más se esforzaron por sistematizar fue la presentación de los principios de la lógica primaria o proposicional presupuesta por la teoría silogística, tarea ésta en la que cosecharon buenos éxitos.

---

[261] *De Puritate Artis Logicae*, ed. cit., p. 68.
[262] Ibid. p. 211. El pasaje procede del *Tractatus Brevior*, impreso por Boehner como apéndice.
[263] Ibid. p. 258. Procedente asimismo del *Tractatus Brevior*.

Pero ninguna obra de lógica medieval ha podido erigirse en clásica por separado, y es significativo que los autores contemporáneos que tratan de ofrecernos una visión ordenada y de conjunto de la contribución medieval se hayan visto en la necesidad de acudir a una diversidad de fuentes para coleccionar las piezas de la misma [264].

264 A E. Moody se debe un interesante intento en este sentido en su *Truth and Consequence in Mediaeval Logic*, § 15.

V. LA LOGICA POSTRENACENTISTA

1. EL HUMANISMO Y EL NACIMIENTO DE LA CIENCIA NATURAL.

Cuando pasamos a considerar lo que los hombres hicieron de la lógica tradicional en el Renacimiento y luego de éste, la historia de las ideas se torna tan compleja que deja de resultarnos provechoso mencionar en un orden estrictamente cronológico los diversos jalones del proceso.

En primer lugar, es importante no olvidar que no hubo un brusco hiato entre la Edad Media y el período subsiguiente. Las *Summulae Logicales* de Pedro Hispano seguirían estudiándose en el siglo XVII. Se hallan incluidas, por ejemplo, en una crestomatía de textos filosóficos para uso escolar impresa en París en 1605 bajo el título de *Gymnasium Speculantium*. Y Robert Sanderson, de Oxford, dedicó en 1618 un capítulo de su *Logicae Artis Compendium* a la explicación de la *suppositio terminorum*. Su presentación de esta última es sumaria y no muy bien articulada, pero recoge las distinciones capitales y reviste alguna importancia por haberse continuado utilizando el *Compendium* en las universidades inglesas hasta el siglo XIX (existe reimpresión del mismo del año 1841). Salvo por lo que se refiere a su papel en la teoría de la distribución de los términos, la doctrina de la *suppositio* acabó desapareciendo de los manuales de la época antes de concluir el siglo XVII, pero en el *Artis Logicae Compendium* de H. Aldrich, de 1691, sobrevive en cambio todavía la distinción entre *consequentiae formales* y *consequentiae materiales*, así como una breve caracterización de los *sophismata* y los *insolubilia*. Y este último libro se seguiría usando aún en la segunda mitad del siglo XIX, en que fue reeditado en 1862 con notas de Mansel. Mas la tradición medieval, y hasta la propia lógica, venían siendo objeto de enconados ataques desde mucho antes de la fecha en que escribiera Sanderson su texto. Por más que nuestra disciplina sobreviviese en la instrucción elemental de las universidades, ya no atraía por más tiempo la atención de muchas de las mejores mentes de la época. A lo largo de los cuatrocientos años que discurren entre la mitad del siglo XV y la del XIX, contamos, pues, con abundancia de manuales pero muy pocas obras que destaquen por sus nuevas aportaciones ni por su calidad.

Entre los manuales del siglo XVII, *The Rule of Reason* de Thomas Wilson (1551), *The Arte of Reason, rightly termed Witcraft* de Raphe Lever (1573) y *The Arte of Logicke* de Thomas Blundeville (1599) merecen interés por constituir los primeros intentos de presentar esta materia en lengua inglesa. Wilson dedicó su obra a Eduardo VI y podemos suponer que escribía en inglés por juzgar importante que la cultura secular, no menos que la teológica, estuviese al alcance de sus compatriotas en su propio idioma; pero se contentaba a estos efectos con la simple britanización de la terminología técnica latina, como en el caso por ejemplo del término *proposition*. Lever estaba, por su parte, decididamente dispuesto a mostrarse tan anglosajón como le fuera posible, dando lugar a formulaciones tan novedosas como ésta: «Gaynsaying shewsayes are two shewsayes, the *one* a yeasaye and the other a naysaye, changing neither foreset, backset

nor verbe». Tres siglos más tarde, el poeta William Barnes, que escribía en el dialecto de Dorsethsire, realizaría un esfuerzo similar en *An Outline of Redecraft* (1880), que tampoco ejerció mayor influjo sobre la práctica de los lógicos de habla inglesa. Ni Wilson ni Lever pretendían ser profundos y, en cuanto al libro de Blundeville, no era según su propia confesión sino una obra de vulgarización, publicada para utilidad de los ministros de la religión que no habían recibido una educación universitaria. Pero el nivel científico no era, por lo demás, mucho más alto en la *Dialectica* latina de John Seton (1545) o en el manual de John Argall publicado en 1605 bajo el título de *Ad Artem Dialecticam Introductio brevis et perspicua, salibus et facetiis undique aspersa, pro tyronibus et novitiis elaborata.* Seton tomó partido por Roma en las contiendas eclesiásticas de la época, pese a lo cual su obra continuó siendo empleada en las universidades inglesas y alcanzó numerosas ediciones. Argall, por el contrario, era un protestante a quien nada placía tanto como lanzar alguna pulla contra los papistas, y se preciaba de haber librado a la lógica de las inútiles sutilezas medievales de los Hispano, Escoto, etc., al tiempo que la hacía expresarse en un latín más elegante. Se ha sugerido que la voz «argal», puesta en lugar de «ergo» (que a la sazón se pronunciaba como «argo») en boca del primer bufón de *Hamlet,* acto V, escena I, podría hacer donaire de su nombre [1]. Ya que esta última obra se imprimió en 1604 insertando en el pasaje las palabras «or all», que constituyen obviamente una corrupción de «argal», dicha expresión no puede tener nada que ver con el texto de Argall, publicado un año más tarde; pero el uso de la misma, no obstante, acaso sea un retruécano. En el prefacio de su libro, Argall dice haber profesado lógica en Christ Church bastantes años antes, y su texto parece basarse en el guión de sus antiguas clases, ya que contiene algunas chanzas expresamente dirigidas a los estudiantes de Oxford, como un detallado pasaje acerca de la prisión de Bocardo *apud nos Oxonienses* [2]. No sería sorprendente, por lo tanto, que hubiera ganado alguna reputación como ingenio universitario, de suerte que «argal» —tal y como lo emplea el bufón de Shakespeare— se convirtiese en remoquete entre los jóvenes mordaces algunos años antes de la composición del *Hamlet.*

Formalmente al menos, el *curriculum* de enseñanzas en la mayor parte de las universidades continuaba siendo el mismo a fines del siglo XVII que dos y hasta tres siglos antes; y, al igual que en la Edad Media, se seguían requiriendo disputaciones para la graduación. Para muchos estudiantes de lógica, las disputaciones constituían, a no dudarlo, la principal ocasión de lucir su pericia. No es extraño, por ello, que la jerga de las disputaciones se convirtiera en moneda corriente del latín académico. Uno de los ejemplos más interesantes es el empleo del verbo *implicat* como abreviatura de *implicat contradictionem.* En la discusión filosófica, cada uno de los participantes ambicionaba demostrar que la tesis de su adversario podía ser reducida al absurdo, y el procedimiento a seguir a estos efectos era tan sumamente familiar que, al concluirlo, en lugar de decir —como diríamos en castellano— «Lo cual es absurdo», bastaba con decir *quod implicat* para que todo el mundo sobrentendiese que el punto de vista

1 La sugerencia procede del señor A. F. E. Shields, discípulo del Profesor G. Ryle, a quien debemos la información.

2 P. 148. La copia de la Bodleian Library contiene una dedicatoria escrita, dirigida a Sir Thomas Bodley, en la que Argall se describe a sí mismo como *plus quam sexagenarius.*

opuesto conducía a una contradicción. Hasta Spinoza, que, como judío, no poseía la formación universitaria convencional, estaba familiarizado con aquella práctica y se sirvió de *implicat* en el sentido de *implicat contradictionem* en su *De Intellectus Emendatione* [3] de 1662 y sus *Cogitata Metaphysica* [4] de 1663. Hay también algunos pasajes de este período de su producción en que se sirve de *implicantia* para dar a entender «contradicción» o «imposibilidad» [5].

Los primeros embates al prestigio de la lógica provinieron de los humanistas, o estudiosos de la cultura clásica, del Renacimiento y datan, pues, del siglo XV. Su objeción a la escolástica, y a la lógica medieval en particular, no era que fuese falsa en sus detalles, sino bárbara en cuanto a su estudio y carente de atractivo por su contenido, en contraste con la recién redescubierta literatura de la antigüedad. ¿Quién sino un lerdo dedicaría su vida a las *proprietates terminorum* pudiendo ocupar su tiempo en la lectura del poema de Lucrecio *De Rerum Natura*, acabado de encontrar, o en el aprendizaje del griego para leer a Platón? Para algunos espíritus representativos de la época, como Rabelais, las pretensiones de los filósofos eran sencillamente ridículas. Y, a juzgar por el testimonio de las obras cultivadas del momento, está bien claro que la lógica había dejado especialmente de interesar a las inteligencias más preclaras. El dominio de un latín elegante había pasado a convertirse en el objetivo más importante de la educación básica, y Cicerón y Quintiliano eran en tal sentido la autoridad indiscutible. De ellos heredaron los hombres del Renacimiento la actitud romana ante el mundo de la cultura, con el resultado de que la auténtica lógica se viera desplazada por la retórica y de que Cicerón fuera citado en los libros supuestamente dedicados a nuestra disciplina con tanta asiduidad como Aristóteles. Lorenzo Valla, que denunció la falsa donación de Constantino, y Rodolfo Agrippa fueron dos de los escritores con los que comenzó el proceso de corrupción de la lógica. Pero el lógico más famoso dentro de esta tendencia fue Petrus Ramus o Pierre de la Ramée (1515-72).

Se ha dicho de Ramus que, al doctorarse en 1536, escogió para su defensa la tesis de que todo cuanto Aristóteles había enseñado era falso. Probablemente esto no es más que una deformación caricaturesca de los hechos. Pero lo cierto es que sus *Aristotelicae Animadversiones* de 1543 acusaron a Aristóteles de oscuridad y confusión, y no parecen caber dudas de que se granjeó muchas enemistades por el brío de sus ataques al aristotelismo y la altanera suficiencia con que expuso sus propios puntos de vista en las *Dialecticae Partitiones* (más tarde llamadas *Institutiones Dialecticae*) del mismo año. Tan enconada fue la oposición que suscitaron ambas obras que sus enemigos obtendrían en 1544 un real decreto de Francisco I en que se le tachaba de «temerario, presuntuoso e insolente», prohibiéndosele la docencia filosófica. Al año siguiente, sin embargo, recibía una invitación del Colegio de Presle de la Universidad de París; y en 1547 Enrique II cancelaba el decreto condenatorio a instancia del Cardenal de Lorena, a la sazón protector de Ramus. A lo largo de esos años trabajó con tanto ahínco que su reputación como hombre de polifacética cultura había quedado consolidada, recibiendo en 1551 una cátedra de elo-

3 *Opera*, ed. van Vloten y Land, I, p. 6.
4 Ibid. IV, p. 205.
5 Ibid. III, p. 39, y IV, p. 196.

cuencia y filosofía en el Colegio Real. Allí tuvo ocasión de acreditar su eficacia en la confección de planes destinados a la mejora de la enseñanza de las artes liberales y escribió obras sobre todas y cada una de las materias de este vasto dominio, incluidas la gramática griega, la retórica y las matemáticas. Donde mejor cabe apreciar la amplitud de sus conocimientos es en la colección de sus *Scholae in Liberales Artes* de 1569, que incluyen veinte libros de *Animadversiones Aristotelicae,* publicados ya en 1556 y que no deben confundirse con el opúsculo de 1543. Su mayor fama, sin embargo, la debe a su *Dialectique* de 1555, primera obra de lógica en lengua francesa, y a su *Dialectica* latina en 1556. Numerosas ediciones de sus obras en vida testimonian su popularidad, y su éxito como figura pública se vio consagrado en 1559 con su nombramiento para la comisión de reforma de la Universidad de París. El proyecto, no obstante, fue abandonado a la muerte de Enrique II, tornándose incierto el futuro de Ramus con su conversión al protestantismo en 1561. Al final de su vida tenía que pasar fuera de París la mitad de su tiempo por causa de las guerras de religión, y acabó siendo asesinado en la matanza de la Noche de San Bartolomé de 1572. Se dice que el asesinato fue instigado por un rival profesional llamado Charpentier, y sus asesinos arrojaron su cuerpo cosido a puñaladas por la ventana de su estudio del quinto piso del Colegio de Presle.

A la larga, Francia y la Iglesia Católica Romana serían las principales perjudicadas por los terribles crímenes de la Noche de San Bartolomé. Pero una infortunada consecuencia derivada de esos acontecimientos fue, para Inglaterra y otros países del Norte de Europa, el hecho de que Ramus alcanzase la gloria de un mártir protestante, pasando así a gozar en esos países de un prestigio muy superior a sus auténticos merecimientos. Ya en 1574, Rober MacIlmaine, de la Universidad de St. Andrews, publicó una traducción inglesa bajo el título de *The Logike of the moste Excellent Philosopher P. Ramus Martyr.* Y en 1592, Christopher Marlowe incluiría la muerte de Ramus (junto con algunos parlamentos acerca de las peculiaridades de la lógica ramista) en su evocación teatral *The Massacre at Paris.* Ya que no cabe encontrar mucho de valor ni en las críticas de Ramus a Aristóteles ni en su producción original, es difícil para nosotros comprender las razones del entusiasmo de sus admiradores; pero, a juzgar por las referencias de Marlowe y otros escritores de la época, lo que más atraía su admiración era su pasión por el orden y la simplicidad.

En su reforma de las artes liberales, Ramus tomó por guía tres principios extraídos de los *Segundos Analíticos,* I, 4 de Aristóteles, a saber, (1) que un enunciado científico ha de ser verdadero sin excepción o verdadero en todos los casos, (2) que ha de ser esencialmente verdadero o verdadero en virtud de una conexión necesaria del predicado con el sujeto, (3) que ha de ser recíproco, esto es, que el predicado ha de resultar conmensurable con el sujeto. De estas proposiciones (que sus seguidores llamaban fantasiosamente las leyes de la verdad, la justicia y la sabiduría), Ramus concluía de una manera poco clara que lo meramente probable ha de ser desterrado de la ciencia, que toda ciencia ha de gozar de un dominio precisamente delimitado y que el método de exposición ha de consistir siempre en un descenso de lo más general a lo menos general. Nada hay de nuevo en tales aserciones, como tampoco lo hay en el recurso a los epítomes

o la práctica de divisiones dicotómicas que por lo visto le habían hecho famoso por la época en que Marlowe escribiera su obra. Pero el esquema, sin embargo, se hallaba presentado con un vigor capaz de hacer adeptos y puede haber contribuido a preparar la mente de sus contemporáneos para los cambios harto más revolucionarios que el pensamiento humano había de experimentar. Por lo que hace a la lógica, no obstante, comporta una aparente reorganización del viejo material con la que no hay realmente ningún provecho que ganar.

Según Ramus, la lógica es el *ars bene disserendi* y debería incluir todo lo relativo a la invención y ordenación de los argumentos, en tanto la retórica se limitaría —contra lo que sostuvo Cicerón— a ocuparse del estilo y la dicción. La distinción entre invención y ordenación se halla asumida en los *Tópicos* de Aristóteles, donde los siete primeros libros se ocupan de la una y el octavo de la otra; también la encontramos formulada en los *Tópicos* de Cicerón y en el *De Differentiis Topicis* de Boecio, donde *dispositio* u ordenación se identifica con *iudicium;* pero Ramus parece haberla extraído, sin necesidad de ir más lejos, de Rodolfo Agrippa. En su *Dialectica* dedica un libro a cada uno de ambos temas. Pasando por alto como puntos inútiles o confusos las categorías aristotélicas, los predicables y los tópicos, presenta en primer término nueve *loci* o lugares en los cuales cabe hallar argumentos por recursos artificiales, esto es, mediante reglas técnicas. Se trata de los *loci* de la causa, el efecto, el sujeto, el atributo o adjunción, la oposición, la comparación, el nombre, la definición y la división, cuya discusión y la de sus correspondientes subdivisiones (por ejemplo, las causas eficiente, material, formal y final) ocupan casi la mitad de su lógica. Como se verá, muchos de los epígrafes de esa lista proceden de Aristóteles, y los resultados de la pesquisa ni tan siquiera son más sistemáticos que los capítulos de la lógica aristotélica a los que se supone habrían de reemplazar. Tras ellos, al final del primer libro, viene una breve consideración de la argumentación no artificial, cuyo principal ejemplo es el del testimonio directo prestado por un testigo en un juicio. Parece que esta distinción llamó la atención de sus lectores, pues en la obra de Marlowe se reproduce el aserto *Argumentum testimonii est inartificiale.*

En el segundo libro de su *Dialectica,* Ramus apiña todo cuanto tiene que decir acerca del resto de la lógica. En su caracterización preliminar de los diversos géneros de enunciados, introduce el *axioma* como término técnico en sustitución de *propositio,* sin duda porque desea usar éste en el sentido ciceroniano de «premisa mayor». Para la premisa menor se sirve del término *assumptio,* utilizando por fin *quaestio* para la conclusión. Su terminología revela la naturaleza de sus lecturas, y de cuanto nos dice en sus obras mayores —por ejemplo, en el libro primero de sus extensas *Animadversiones Aristotelicae*— se desprende que poseía amplios conocimientos de historia de la lógica. Estaba familiarizado, pongamos por caso, con lo que en la antigüedad pudo decirse acerca de la cuestión de si los enunciados condicionales y disyuntivos envuelven la noción de necesidad, arguyendo por su parte, con referencias a Diodoro y Crisipo, en favor de la tesis

de que así lo hacen. Pero en su caracterización de los enunciados categóricos, que llama *axiomata simplicia,* se aparta de la tradición introduciendo la división siguiente:

$$\textit{Axioma simplex} \begin{cases} \textit{generale} \\ \textit{speciale} \begin{cases} \textit{particulare} \\ \textit{proprium} \end{cases} \end{cases}$$

Un *axioma generale* es aquí lo que ordinariamente llamamos un enunciado universal, en tanto que un *axioma particulare* es aquel cuyo predicado no se adscribe a la totalidad del sujeto o —como nuestro autor lo expresa mediante una curiosa adaptación de terminología procedente de otro apartado de la lógica— *consequens non omni antecedenti attribuitur.* Finalmente, un *axioma proprium* es el que tiene por *antecedens* o sujeto un nombre propio u otro término singular. La expresa introducción de estos últimos enunciados, que Aristóteles ignoró casi por completo en sus *Analíticos,* constituye una de las pretensiones de novedad más importantes y justificadas de Ramus; pero se observará que una torpe aplicación de su principio dicotómico le lleva a agrupar juntas las proposiciones particular y singular bajo el insípido encabezamiento de «especiales», en lugar de adoptar este otro esquema mucho más razonable:

$$\textit{Enunciados categóricos} \begin{cases} \textit{singulares} \\ \textit{generales} \begin{cases} \textit{universales} \\ \textit{particulares,} \end{cases} \end{cases}$$

que podría haber derivado del *De Interpretatione* de Aristóteles.

En sus primeras presentaciones de la silogística, Ramus se contentaba con incluir modos con términos singulares en cada una de las figuras de Aristóteles, pero en la edición de la *Dialectica* aparecida el año de su muerte radicaliza su ruptura con la tradición y nos ofrece la siguiente división dicotómica de los silogismos categóricos, o *syllogismi simplices* como los denomina por contraste con los argumentos condicionales y disyuntivos:

$$\textit{Syllogismus simplex} \begin{cases} \textit{contractus} \\ \textit{explicatus} \begin{cases} \textit{speciei primae} \\ \textit{speciei secundae} \end{cases} \end{cases}$$

Los *syllogismi contracti* son argumentos a partir de ejemplos que Aristóteles habría presentado en su tercera figura. Según Ramus, el propio Aristóteles reconocía en su práctica la conveniencia de presentarlos en la forma concisa o bajo contracción de *Quaedam confidentia est virtus, ut constantia* o *Quaedam confidentia non est virtus, ut audacia.* Sus *syllogismi explicati,* por otra parte, son argumentos completamente articulados como los que Aristóteles habría incluido en su primera y segunda figuras, aunque objeto ahora de una subdivisión de nuevo cuño. Ramus procede de entrada, sin razón aparente, a convertir a la segunda figura de Aristóteles en primera figura y viceversa. Pero es posible que su uso de los términos *antecedens* y *consequens* en los sentidos antes explicitados, así como su separación de

las dos primeras figuras silogísticas respecto de la tercera, tuvieran por cometido dar idea de una cierta correspondencia entre ciertos silogismos categóricos y ciertos argumentos condicionales. De ser así, la sugerencia habría sido realmente interesante, pero nada hay en el contexto que aclare el pormenor. Por el contrario, su alteración de las dos primeras figuras tiende más bien a oscurecerlo. A continuación, da por supuesto que todos los enunciados envueltos en silogismos de estas dos figuras han de ser universales o singulares, omitiendo así toda suerte de silogismos con premisas o conclusión particulares. Reiterando luego los cambios de figuras a la hora de enumerar las diversas combinaciones permisibles de premisas, construye en su primera figura tres variantes de cada uno de los dos modos *Cesare* y *Camestres* y, en su segunda figura, otras tantas variantes de cada uno de los dos modos *Barbara* y *Celarent*. Cuando ambas premisas son universales, el silogismo en su conjunto se dice *generalis*; y cuando ambos son singulares, el silogismo en su conjunto se dice *proprius;* mas cuando una de las premisas es universal y la otra singular, el silogismo en su conjunto se dice —un tanto confundentemente— *specialis*. Hay, así pues, seis variedades de silogismos por figura, pero no los seis modos que podrían obtenerse mediante la adición de modos subalternos a los aristotélicos. Como ejemplo de *syllogismus specialis* de su primera figura, que en la clasificación tradicional hubiese sido una versión de *Camestres,* Ramus propone: «Saltator est luxuriosus; Muraena non est luxuriosus; Muraena igitur non est saltator». Y como ejemplo de *syllogismus proprius affirmativus* de su segunda figura propone este otro: «Octavius est haeres Caesaris; ego sum Octavius; sum igitur haeres Caesaris». Aquí y a todo lo largo de su libro los ejemplos proceden de autores antiguos, en especial Terencio, Cicerón, Horacio y Ovidio.

En su caracterización de los *syllogismi compositi* Ramus sigue más de cerca la tradición, pero confina su atención a los cuatro modos de Crisipo convertidos en un lugar común y hace caso omiso del extraordinario desarrollo de la lógica primaria en la Edad Media. Finalmente, asegura que el método de exposición ha de proceder normalmente de lo más a lo menos general, buscando apoyo en Aristóteles para dicho principio y añadiendo que, en determinados contextos, podría ser oportuno recurrir a una *methodus prudentiae* que autorice digresiones aceptables para el auditorio.

La discusión de los méritos de las reformas de Ramus hubo de prolongarse largo tiempo. En sus *Institutiones Logicae* de 1626, Franco Burgersdyck dividiría a los lógicos en aristotélicos, ramistas y semi-ramistas (llamados en ocasiones filipo-ramistas por intentar un compromiso entre las enseñanzas de Ramus y las de Philipp Melanchthon, el humanista amigo de Lutero que había escrito un manual basado en las obras de Aristóteles). El debate proseguía en Inglaterra a fines del siglo XVII [6]. En 1672, John Milton, el poeta, publicó un pequeño volumen que había compuesto hacía cuarenta años bajo el título de *Artis Logicae Plenior Institutio ad Petri Rami methodum concinnata;* y en 1687, John Wallis, el matemático, publicó un texto bajo el título de *Institutio Logicae* con un apéndice, fechado en 1631, en que trataba de demostrar que la autoridad de Aristóteles nos da pie a interpretar los términos singulares como si se tratara de términos

6 Cf. W. S. Howell, *Logic and Rhetoric in England, 1500-1700.*

generales considerados por respecto a la totalidad de su posible aplicación. Esta explicación gozó de una amplia aceptación, y en muchas obras posteriores (por ejemplo, en las *Lettres à une Princesse d'Allemagne* de Euler en 1761) se acepta como algo bien establecido. La obra de Wallis que se acaba de mencionar reviste interés por incluir un intento de inserción de los enunciados condicionales en el esquema aristotélico, tratándolos a esos efectos como universales. De acuerdo con Wallis, «*Si* universaliter sumendum est, quasi tantumdem valens atque *omni caso quo*» [7].

Hasta el País de Gales acusó la huella del influjo de Ramus el Mártir, cuyos principios fueron expuestos ya en 1595 por Henry Perry en su *Egluryn Phraethineb* («Elucidación del Ingenio»). Y parece que los predicadores puritanos galeses continuaron aplicándolos en la confección de sus sermones hasta que la renovación metodista del siglo XVIII impuso nuevas concepciones de la oratoria sagrada [8].

No todos los humanistas del Renacimiento desdeñaron a Aristóteles. Algunos de ellos, como Pomponazzi, juzgaban que su pensamiento había sido en buena parte adulterado por los escolásticos y enfocaban su obra bajo el prisma de lo que llamaríamos hoy la crítica histórica. El más famoso de los autores que adoptaron en lógica este enfoque fue Zabarella (1538-89), profesor de la Universidad de Padua. En su comentario a los *Segundos Analíticos* y otras obras lógicas como sus tratados *De Quarta Syllogismorum Figura* y *De Methodis* demuestra conocer a los autores medievales (en particular a Averrores, a quien profesa un gran respeto), pero no se detiene a examinar aquellos apartados de la lógica medieval que hoy nos parecen más interesantes. Su obra es la de un erudito que no espera encontrar gran cosa de valor tras del período clásico y cuya temática podría haber sido casi íntegramente sugerida por una lectura atenta de Aristóteles. A diferencia de Ramus, Zabarella puede todavía hoy ser estudiado con algún provecho, mas sus escritos producen la impresión de que el cultivo de la lógica formal no gozaba de mucha vitalidad por esa época.

Quizá la más importante contribución de Zabarella haya sido su discusión de la distinción entre el método compositivo (o sintético) y el resolutivo (o analítico). Tal y como él lo entiende, un método es un modo de adquisición de conocimiento, que no hay que confundir con un orden de exposición. En un cierto sentido, cabría también hablar de órdenes compositivo y resolutivo. Como Aristóteles y otros distinguidos autores —tales como Galeno, Avicena y Averroes— han puesto de relieve, la exposición de una ciencia teórica ha de avanzar compositivamente a partir de los primeros principios, que son relativamente simples y más fácilmente cognoscibles, hasta llegar a sus consecuencias, que serán más complejas y difíciles de captar; un arte o disciplina práctica, por el contrario, ha de partir de la consideración de una finalidad para a continuación retroceder hasta los medios con los que haya de ser posible conseguirla. Así, Aristóteles nos dice en su *Metafísica* que la actividad de un arquitecto ha de ir precedida por un estudio regresivo de los actos a realizar con vistas a la construcción

---

7 *Institutio Logicae*, II, 10.

8 R. Tudor Jones, "Rhesymeg y Piwritaniaid", *Efrydiau Athronyddol*, 1950, pp. 19-37. Estamos en deuda con el Profesor R. I. Aaron por la información prestada acerca de este artículo.

del edificio deseado [9]. Pero la distinción entre los métodos compositivo y resolutivo difiere algo de la anterior [10]. El método compositivo es el de la demostración propiamente dicha y se halla expuesto en los *Segundos Analíticos* de Aristóteles según el orden resolutivo, como en rigor tiene que hacerse toda vez que una demostración es una actividad práctica guiada por la idea de un fin a conseguir [11]. El método resolutivo, por su parte, es aquel género de razonamiento en que argüimos *a posterioribus ad priora*, esto es, de lo que es ulterior y derivado en el orden de la naturaleza a lo anterior y más originario, pudiendo revestir estas dos formas: (*a*) razonamiento que nos lleva de los efectos o los signos a las causas, y (*b*) inducción o razonamiento que nos lleva de los singulares a los universales [12]. Ambos tipos de razonamiento fueron reconocidos por Aristóteles en diversos lugares, quedando demostrada la posibilidad de presentarlos en forma silogística. El primero de ellos es el más potente de los dos, ya que puede llevarnos al conocimiento de algo radicalmente nuevo, en tanto que el segundo sólo nos proporciona confirmación de lo ya implícito en nuestro conocimiento de los casos individuales. Zabarella no alberga la pretensión de añadir nada a la doctrina aristotélica, y por ello no se pregunta cómo habríamos de procurarnos la premisa mayor de un argumento que discurra del efecto a la causa. Sería difícil, pues, atribuirle la acuñación de un nuevo procedimiento para hacer avanzar el conocimiento científico. Pero su terminología parece haber inspirado el procedimiento seguido por Galileo en sus análisis de problemas mecánicos, y por esta sola razón merecería ser recordada [13].

Aunque el cultivo de la lógica se empobreció por esta época con el olvido de un cierto número de aportaciones medievales, la causa de ello no cabe atribuirla por entero a un recrudecimiento del purismo aristotélico, cuya área de influencia no alcanzó por otra parte vastas proporciones. Tampoco la excesiva atención prestada por los educadores a Cicerón u Ovidio basta en sí misma para explicar la acentuada decadencia del interés hacia la lógica formal experimentada a lo largo de los siglos XVII y XVIII. Otra concausa de semejante situación puede encontrarse en el nacimiento de la física moderna (esto es, la física de Galileo) y el reconocimiento de que la lógica no es un instrumento de descubrimiento científico como se había a veces supuesto. Tres cosas eran necesarias para el surgimiento de la física moderna: en primer lugar, un suficiente desarrollo de la matemática; en segundo lugar, una teoría de la percepción que delimitase un campo de estudio aprovechable para el físico; en tercer lugar, una buena disposición para aprender de la experiencia. Las dos primeras de ellas habían sido indirectamente suministradas por el renacimiento humanístico. Ya en el siglo XV se había impuesto la moda de estudiar a Platón entre los hombres cultos e ilustrados de Italia. Fundáronse Academias a imitación de la platónica, y hasta Gemisthos Plethon lanzó una vez la idea descabellada de fundar una nueva religión a base de ingredientes extraídos del platonismo. Todo este entusiasmo obedecía sin duda a los encantos del estilo de Platón y a las calidades poéticas de su obra. Pero Platón había dicho

9 *Metaphysica, Z*, 7 (1032a32-1032b31).
10 *De Methodis*, III, I.
11 Ibid. IV, 19.
12 Ibid. III, 4 y 19.
13 J. H. Randall, "The Development of Scientific Method in the School Padua", *The Journal of the History of Ideas*, I (1940), pp. 177-206.

que el estudio de la matemática constituía una necesaria propedéutica para la iluminación intelectual, lo que llevó a algunos miembros de aquellas academias a estudiar geometría. Otro antiguo sistema filosófico que interesó a los estudiosos renacentistas fue el epicureísmo. También en este caso es muy probable que el impulso inicial para su estudio fuese de tipo estético más bien que científico, pues el poema de Lucrecio *De Rerum Natura* había sido redescubierto en 1417 y publicado en 1473. Pero el sistema de Epicuro descansa en el atomismo de Demócrito, que envuelve por su parte la distinción entre cualidades primarias y secundarias, pieza esencial hoy día de nuestra concepción científica del mundo. El tercer requisito para el desarrollo de la física, a saber, el enfoque empírico de la naturaleza, había sido objeto de recomendación por no pocos filósofos de la Antigüedad y la Edad Media; únicamente se necesitaba comenzar a tomar en serio sus preceptos.

Acaso pueda resultar sorprendente que la lógica se hallase divorciada en esta época de la matemática, a la que se había visto asociada en sus orígenes. Pero la explicación quizá pueda encontrarse en los nuevos derroteros seguidos por el desarrollo de la matemática. El legado matemático de Grecia era principalmente geométrico; y hasta cuestiones relativas a los números primos —que hoy día se asignarían proverbialmente a la teoría numérica— habían sido tratadas en los *Elementos* de Euclides en un contexto de problemas geométricos. Mas los descubrimientos de los matemáticos del siglo XVII no consistían meramente en corolarios de los teoremas griegos. Es cierto que el calificativo de «geómetras» era aún sinónimo de «matemáticos» en aquella época, pero las novedades que ocuparon su atención correspondían a aquellos apartados de la matemática que hoy llamaríamos álgebra y análisis. La noción fundamental del nuevo pensamiento matemático resultó ser la de dependencia funcional, aunque en un primer momento no eran capaces de expresarla con toda su abstracta generalidad; y se dejaron inspirar a estos efectos por el deseo de resolver una serie de problemas en el dominio de la mecánica, como lo muestra el término «variable» que hemos heredado de ellos.

Ahora bien, existe una importante diferencia en cuanto a sus respectivos modos de proceder entre la geometría y estas otras nuevas ramas de la matemática. La geometría fue concebida desde sus comienzos como una ciencia cuyos teoremas se deducían a partir de axiomas de acuerdo con los principios de la inferencia lógica. Se suponía que los axiomas eran verdades conocidas por medio de una intuición extralógica, pero que —una vez aceptados esos axiomas— no había necesidad de usar de otra intuición que la requerida para captar una implicación lógica. El álgebra y el análisis, por su parte, no acostumbraban a ser presentados axiomáticamente ni siquiera en la enseñanza elemental. Se trataba de investigaciones surgidas de la aritmética y originariamente concebidas como técnicas para la manipulación de símbolos de acuerdo con ciertas reglas específicas, como las relativas por ejemplo a los paréntesis, signos e índices. Sería posible, por supuesto, reformular una argumentación algebraica de manera que todos los principios algebraicos requeridos aparezcan como premisas o definiciones previas; pero este no era el modo como los matemáticos de la época concebían su trabajo. Ellos consideraban a sus nuevas creaciones como ingenios calculatorios, y el lenguaje de los matemáticos modernos retiene

todavía de aquel tiempo palabras que, como «cálculo» (*calculus* —piedrecilla, cuenta o pieza de juego— en latín) y «operación», sugieren una analogía con el uso del ábaco. Sin duda los matemáticos de los siglos XVI y XVII habrían mantenido que sus procedimientos se basaban en la compresión intuitiva de las nociones por ellos manejadas; pero, en realidad, se permitían extender con frecuencia la aplicación de esas nociones sin una conciencia demasiado clara de que lo hacían así (como cuando hablaban, por ejemplo, de la suma de una serie infinita). Es incluso posible que, de haber actuado de otro modo, no hubiesen realizado las conquistas a que deben su gloria. Pero el resultado de su modo de proceder fue la creciente convicción de que sus nuevos métodos eran independientes de la lógica tradicional. El viejo estilo geométrico de presentación —o método sintético, como se le llamaba a veces —era considerado como el ideal expositorio, pero se creía que las nuevas ramas de la matemática encerraban una técnica heurística. Descartes escribió acerca de un misterioso método de análisis conocido por Pappus y Diofanto pero no expresamente formulado hasta su propio siglo [14]. Y Newton parece haber considerado su cálculo infinitesimal como un útil artificio más bien que como un nuevo capítulo de la matemática en el sentido tradicional. Prueba de ello es que en sus *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* se tomó la molestia de presentar sus resultados al estilo geométrico sin referencia alguna a los recursos utilizados para llegar a ellos.

El primer intento moderno de formular una doctrina del método científico fue el *Novum Organum* de Bacon de 1620. Como advierte su título, la obra fue escrita en oposición a Aristóteles. Bacon se daba cuenta de que la lógica tradicional no era, contra lo que algunos habían supuesto, un instrumento de descubrimiento científico, y trató de sentar las nuevas reglas que hubieran de facilitar ese descubrimiento. Pero no aportó nada al desarrollo de la lógica en el sentido que aquí nos interesa; y, para nuestros fines, no necesitamos entrar en su teoría de la inducción o cualquier otra de las propuestas por sus seguidores. En su *Discurso del Método* (1637), así como en sus inacabadas *Regulae ad Directionem Ingenii*, Descartes se propuso igualmente sentar reglas para la investigación científica, aunque de tipo muy distinto de las anteriores. Se hallaba tan impresionado por el desarrollo de la matemática que concebía a toda ciencia como una suerte de matemática, tratando de generalizar a estos efectos la noción de método analítico a que antes nos hemos referido. Tampoco entra en nuestras intenciones examinar los méritos de su doctrina. Para nuestros propósitos basta con indicar que su influencia, lo mismo que la de Bacon, tendió a hacer descuidar a los filósofos la lógica formal en beneficio del estudio de la nueva metodología heurística.

La concepción cartesiana de las ideas se considera comúnmente como una de las novedades más destacables del siglo XVII, y así lo es en realidad. Pero no hay que olvidar que dicha novedad es más de terminología que de fondo. En la Edad Media, el término *idea* se reservaba todavía para designar una forma tal y como ésta era entendida en el platonismo cristiano de San Agustín, esto es, como un concepto arquetípico en la mente divina. Así, Sto. Tomás se pregunta en su *Summa theologica*, I, XV, 1,

[14] *Regulae ad Directionem Ingenii*. 4.

Utrum ideae sint, a lo que replica *Necesse est ponere in mente divina ideas*. Por aquella época, las formas que se supone existen en la mente humana se describían como *species* o *intentiones*, originándose copiosos debates entre los filósofos que seguían a Aristóteles en su tesis de que las *species intelligibiles* procedían todas ellas por abstracción de las *species sensibiles* y los que se apoyaban en San Agustín para sostener que las *species intelligibiles* podían adquirirse únicamente por iluminación divina. Durante el renacimiento humanista, el término *idea* adquirió una gran boga a causa de su origen griego, siendo a veces usado en un sentido lato que lo hacía equivalente a *imago* [15]. Cuando Descartes y Locke se sirvieron de él en sustitución de *species* e *intentio*, su principal objetivo era sin duda liberarse de enredos y complicaciones medievales, pero Descartes tenía asimismo presente el precedente agustiniano. Pues en respuesta a una crítica de Hobbes declaraba: «Empleo este término por ser de uso común entre los filósofos para designar las formas de la percepción de la mente divina» [16]. De suerte que con su doctrina de las ideas innatas asimilaba deliberadamente la mente humana a la mente divina, tal y como venían describiéndola los teólogos de tradición agustiniana.

Thomas Hobbes es principalmente recordado por su filosofía política, pero de entre los grandes filósofos contemporáneos era —aparte de Leibniz— el que más cosas de interés tenía que decir en materia de lógica. En su juventud ofició como amanuense de Bacon, pero no descubrió su vocación por la filosofía, ni por la lógica en particular, hasta que a los cuarenta años aceptó una invitación para viajar por el Continente como preceptor del hijo de un noble. El primer estímulo le vino entonces de la geometría. Según su amigo John Aubrey, encontró un día casualmente, en la biblioteca de un caballero, un ejemplar de Euclides abierto por la página del teorema de Pitágoras:

«Leyó la proposición. 'Voto a Dios', dijo, 'esto es imposible'. A continuación, leyó su demostración, que le remitía a una proposición semejante a la leída, la cual leyó a su vez. Esta le remitía por su parte a una nueva proposición, que asimismo leyó. *Et sic deinceps* hasta quedar al fin demostrativamente convencido de la verdad de la primera proposición. Esto despertó en él el gusto por la geometría» [17].

Hobbes llegó a considerarse una autoridad en la materia, sosteniendo en contra de Wallis la temeraria pretensión de haber descubierto un procedimiento para «cuadrar el círculo». Cabría esperar que alguien que había cobrado tan vivo aprecio por la matemática se sintiera tentado de hablar de ella como si fuese el pórtico de los cielos platónicos; pero una vez que hubo dominado, según pensaba, la ciencia de la geometría, Hobbes dio en proponer una teoría muy diferente de la demostración. Ya en las *Objections* impresas en 1641, con la primera edición de las *Meditations* de Descartes, escribía:

«¿Mas qué diremos ahora, si el razonamiento no resulta ser más que la religación y el encadenamiento de nombres o designaciones mediante la palabra 'es'? Una consecuencia de ello será que la razón no nos ofrece ninguna conclusión acerca de la auténtica naturaleza de las cosas, sino tan sólo acerca de los términos que

15 C. C. J. Webb, "Idea" in *Hasting's Dictionary of Religion and Ethics*.
16 *Replies to Objections*, III, 5.
17 *Brief Lives*, ed. Clark, vol. I, pp. 332 y 396.

las designan, esto es, acerca de si hay o no hay una convención (arbitrariamente estipulada en relación con sus significados) en virtud de la cual nosotros ensamblamos esos nombres» [18].

En la primera parte de su *De Corpore* de 1655, que lleva por título independiente el de *Computatio sive Logica* y está concebida como una introducción a todo el sistema, se muestra más explícito y escribe como sigue:

«Las primeras verdades fueron arbitrariamente creadas por aquellos que por primera vez impusieron Nombres a las Cosas o recibieron esos Nombres de las imposiciones de otros. Pues es verdad (pongamos por caso) que *El hombre es una criatura viviente;* pero lo es por esta razón, a saber, que plugo a los hombres imponer conjuntamente dichos nombres a una y la misma cosa... Ahora bien, las *Proposiciones Primarias* no son sino *Definiciones,* o partes de *Definiciones,* y sólo ellas son principios de la Demostración, por ser Verdades arbitrariamente estatuidas por los Inventores del Lenguaje que por tanto no necesitan ser demostradas» [19].

Los axiomas de Euclides, como por ejemplo «El Todo es mayor que su Parte», no son —nos dice— principios demostrativos, esto es, verdades que haya que aceptar sin más pruebas, sino proposiciones ellas mismas demostrables a partir de definiciones [20]. Han de ser distinguidas por lo tanto de las leyes de la física, que no dependen de definiciones arbitrarias [21].

Tenemos aquí el origen de la teoría convencionalista de la verdad necesaria. En el contexto de la filosofía de Hobbes, esta teoría se halla conectada con su doctrina de que nuestro pensamiento no es sino manipulación de signos, y el mismo título de *Computatio sive Logica* sugiere que concebía al razonamiento como algo reducible a una especie de cálculo. Sus escritos no contienen en realidad ningún intento de elaborar dicho programa, pero su sugerencia —junto con la teoría de que la demostración procede a partir de definiciones— fue retomada por Leibniz. En tanto que matemático al que se deben importantes descubrimientos, Leibniz no podía aceptar la teoría convencionalista de la necesidad, pero su más joven contemporáneo Berkeley concebiría a ésta última como una consecuencia de su propia filosofía empirista, lo que le hizo escribir en su cuaderno de notas:

«La razón de que nos sea tan fácil efectuar demostraciones a base de signos es que éstos son completamente arbitrarios y dependen por entero de nuestra voluntad, como creados por ella. El oscuro y ambiguo término *relación,* del que se dice constituye el más vasto dominio de nuestro conocimiento, nos confunde y engaña. Que alguien me presente una demostración que no sea puramente verbal y no dependa o bien de algún principio falso o bien de algún principio de la naturaleza que sea efecto de la Voluntad divina y no sepamos cuándo podría cambiarlo Esta. *Preg.*: ¿Y qué hay de las *aeternae veritates? Resp.*: Se desvanecen por entero» [22].

A lo que poco después añade:

«Prescindamos de los signos de la Aritmética y el Algebra y preguntémonos: ¿Qué nos queda? Estas ciencias son puramente verbales y enteramente inútiles para

---

18 *Objections,* III, 4.
19 *Elements of Philosophy Concerning Body* (Traducción inglesa, publicada en 1656), c. III, §§ 8 y 9.
20 Ibid., c. VII, § 25.
21 Ibid., c. XXVI, § 1.
22 *Philosophical Commentaries* (en *Works,* ed. Luce and Jessop, vol. I), 732-5. El término "relación" es de Locke.

la Práctica en las sociedades humanas. Nada hay en ellas de conocimiento especulativo ni de comparación de ideas» [23].

Pero estas sugerencias no llegaron a publicarse hasta finales del siglo diecinueve, de suerte que la estrecha conexión existente entre convencionalismo y empirismo no pudo establecerse sino en nuestros días.

Locke sentía escaso o ningún interés por la lógica formal, de modo que —en tanto dominó su influencia— pocos filósofos juzgaron a la lógica digna de un estudio serio. Locke estaba ciertamente dispuesto a admitir que todo razonamiento deductivo podía ser reconducido a los principios y reglas de Aristóteles, pero opinaba que lo realmente importante de estos últimos era evidente en cualquier caso para una mente normalmente constituida, pues «Dios no iba a haber sido tan mezquino con los hombres que se hubiese limitado a hacerlos bípedos, dejando a Aristóteles la tarea de hacerlos racionales» [24]. Una mujer de pueblo que nunca haya oído mencionar a Aristóteles podrá, no obstante, razonar muy aceptablemente acerca de sus propios asuntos. Los silogismos no nos hacen descubrir nada nuevo y únicamente sirven para ejercitarnos en la esgrima verbal. En cuanto a los enunciados idénticos de la forma «A es A», o aquellos otros en que la parte de una idea compleja se predica del todo, son sólo bagatelas [25]. El conocimiento realmente instructivo, como el que las matemáticas nos proporcionan, no se puede obtener de la simple explicitación de definiciones previas, sino que ha de venirnos dado por la intuición de las relaciones entre ideas.

Cuando tiene ocasión de aludir a la filosofía escolástica, Locke se muestra siempre despectivo. Mas lo que por su parte tenía que decir acerca de la generalidad de las ideas, y en rigor toda su doctrina de las ideas como signos, se asemeja grandemente a la caracterización ockhamista de las *intentiones* que examinábamos en el capítulo anterior. Ya que la *Summa Totius Logicae* de Ockham se reimprimió en Oxford en 1675, época en la que Locke gestaba las opiniones que luego expresaría en su *Essay*, se hace difícil creer que aquella semejanza pueda deberse a mera coincidencia. Un detallado escrutinio de los numerosos apuntes y borradores de Locke podría tal vez contribuir a zanjar la cuestión fuera de toda duda.

Aunque los filósofos de primera fila del siglo XVII no redactaron detalladas exposiciones de la lógica formal, y hasta a veces renegaron de su estudio, hubo en la época gran copia de manuales disponibles para su lectura, por lo que sería útil concluir esta sección con el repaso de algunos de los mejores. Para hacernos cargo de la vida intelectual de un determinado período de la historia no basta conocer a los autores que pasaron por ella como innovadores, sino que es menester también tener en cuenta a los que en ella fueron influyentes, ya sea como representantes de la tradición, ya sea como divulgadores de las nuevas ideas.

A este respecto hemos de tomar nota en primer término de la *Logica Hamburgensis* publicada por Joachim Junge en 1638. El libro alcanzó varias ediciones, y su autor mereció los elogios de Leibniz en diversas ocasiones. Aparte las materias acostumbradas, contiene algunas novedades que parecen anticipar ulteriores desarrollos, especialmente la investigación

23 Ibid. 767-8.
24 *Essay Concerning Human Understanding*, IV, XVII, 4.
25 Ibid. VIII.

de algunas propiedades de las relaciones. Más aún, bajo el rótulo de *consequentiae* se mencionan el argumento por inversión de una relación y el argumento *a recto ad obliquum* (como, por ejemplo, «Un círculo es una figura; luego quien traza un círculo traza una figura»). En un pasaje relativo a los *entia per aggregationem*, Junge distingue entre *ens aggregativum per ordinem* y *ens mere aggregativum*. Pero, con todo, no hay mucho en su libro que permita aventurar la inspiración de la obra por la que Leibniz es famoso.

Tenemos a continuación la *Logica Fundamentis Suis a quibus hactenus collapsa fuerat Restituta*, publicada por Arnold Geulincx en 1662. Como su título sugiere, el libro pretende la restauración de la lógica, rescatándola del estado de decadencia en que parecía hallarse sumida, y contiene algunos competentes compendios de doctrinas medievales que habían desaparecido de la escena filosófica contemporánea. Así, nos encontramos al comienzo con una distinción entre diversos géneros de *suppositio* o *acceptio terminorum* de acuerdo con el siguiente esquema [26]:

Suppositio
- *ordinaria*
  - *singularis*: PETRUS est doctus.
  - *communis*: MUS rodit caseum.
- *extraordinaria*
  - *logica*: MUS subalternatur animali.
  - *grammatica*: MUS est syllaba.

Las divisiones son, por descontado, medievales, pero las denominaciones con que ahora son introducidas parecen ser de nuevo cuño. Geulincx pasa a continuación a distinguir al modo usual algunas variedades de *suppositio ordinaria communis*, y explica la *distributio* como una *acceptio copulativa cum enumeratione laxa subiectorum* (esto es, la antigua *suppositio confusa et distributiva*) [27] con vistas a servirse de ella más adelante en la formulación de las reglas de la silogística [28]. En relación con este punto, aparece una nueva noción de antilogismo con el ejemplo: «Petrus non est animal, ergo non et Petrus est homo et omnis homo est animal» [29]. En su teoría de las *consequentiae* Geulincx preserva las distinciones de costumbre y enumera algunos de los principios más conocidos, incluidas las reglas paradójicas de que lo imposible implica cualquier cosa y lo necesario se sigue de cualquier cosa [30]. En su distinción entre argumentos formales y materiales, nos dice que estos últimos —a los que también llama *argumenta physica* y *argumenta topica*— no dependen de las *affectiones logicae* [31]. Especialmente interesante es su clara distinción entre *argumenta in enuntiationibus* y *argumenta in terminis*, así como el hecho de que en su caracterización de los *argumenta formalia in enuntiationibus* (esto es, correspondientes al dominio de la lógica proposicional) sostenga que para la verdad de una proposición disyuntiva es suficiente y necesaria la verdad de uno de sus miembros. De esta última tesis procede a derivar con impecable corrección los dos principios que conocemos hoy como las reglas de De Morgan,

26 *Logica*, etc. (en *Opera Philosophica*, ed. J. P. N. Land, 1891), I, II, 4.
27 Ibid. 6.
28 Ibid. III, II, 5.
29 Ibid. 6.
30 Ibid. II, II, 6 y 7.
31 Ibid. I, 9 y 11.

así como la necesidad de rechazar el argumento *ponendo tollens*, que descansa en la interpretación excluyente de la disyunción [32]. Por último, en un capítulo titulado «De ratione a priori et a posteriori» discute estas dos expresiones en términos que sugieren que todavía por esa época retenían el viejo sentido que vimos les acordaba Zabarella en su *De Methodis* [33].

El mismo año que la *Logica* de Geulincx aparecía una obra harto más conocida y popular, *La Logique ou l'Art de penser*, a menudo llamada *Lógica de Port Royal* por haberla compuesto Antoine Arnauld y Pierre Nicole, figuras destacadas del movimiento portroyalense, y manifestar el característico aire de sincera piedad que hizo famoso a dicho movimiento. Como cabría haber esperado, los autores muestran escasa paciencia para con las sutilidades medievales. Hablar de segundas intenciones constituye según ellos una inútil pérdida de tiempo, y las autoridades medievales pueden —en su opinión— ser tranquilamente arrinconadas. Por otra parte, no hacen tampoco gala de ningún respeto hacia Ramus. No sólo ridiculizan sus intentos por fijar límites exactos entre las diversas ciencias, así como su pasión por las dicotomías, sino que rechazan su concepción de la lógica como la *ars bene disserendi*. De acuerdo con la definición que de ella ofrecen al comienzo del libro, la lógica es el arte de conducir rectamente nuestra razón en el conocimiento de las cosas, tanto para la instrucción de uno mismo cuanto para la de los demás. Les interesa ciertamente la claridad de la exposición, pero no están en cambio interesados en la destreza dialéctica ni el prestigio académico. San Agustín y Pascal son sus modelos en cuanto a estilo; y Montaigne representa, con su egocentrismo y su afectación de escepticismo, su principal abominación [34]. Tampoco son puristas aristotélicos, aunque juzgan que los *Primeros Analíticos* son la fuente más importante de la lógica formal. La lista aristotélica de las categorías, así como su clasificación de los tópicos, son también mencionadas, pero sólo para hacerlas a un lado declarándolas inservibles. En la polémica entre el aristotelismo y la nueva ciencia sus simpatías van todas hacia esta última; y en el primero de sus discursos preliminares explican que algunos de sus ejemplos han sido deliberadamente escogidos con el fin de introducir al lector a la correcta filosofía de la naturaleza y el espíritu, tal y como otros lo han sido con el fin de ilustrarle acerca de la correcta doctrina en materia de moral y religión. En cambio no parecen haber comprendido el papel de la experimentación en el progreso de la ciencia natural y sólo se refieren a la inducción para decirnos que no podemos confiar en ella [35]. Sus ideas acerca del método parecen proceder enteramente de su consideración de la geometría, y están tan lejos de una auténtica actitud científica en cualquiera de los dominios de la investigación que llegan a afirmar que la investigación científica no sirve para nada si no ayuda a perfeccionar nuestra razón. El buen sentido y el sano juicio («le bon sens et la justesse de l'esprit dans le discernement du vrai et du faux») son, afirman, infinitamente más estimables e importantes que cualquier conocimiento teórico que podamos lograr por el cultivo de la más genuina y sólida de las ciencias [36]. En pocas palabras, son seguidores de Descartes,

32 Ibid. II, 1; III, III, 1, 2 y 4.
33 Ibid. IV, II, 7.
34 *Logique*, III, 9.
35 Ibid. 18, IV, 6.
36 Ibid., Premier Discours.

pero seguidores interesados en su filosofía principalmente porque en ella ven una revivificación del pensamiento agustiniano y, por lo tanto, una aliada de su propia concepción de la teología. Tras de haber apuntado todo esto, tenemos que decir que, sin embargo, su libro es acreedor de la reputación de que gozó. Está escrito con un vigor y lozanía que lo hacen distinguirse de los manuales al uso, y —aunque es el punto de partida de una lamentable tendencia a confundir la lógica y la epistemología— contiene alguna que otra novedad digna de estudio.

Los intereses epistemológicos de sus autores se reflejan en la cuádruple división de su obra en apartados que respectivamente versan sobre el concepto, el juicio, el raciocinio y el método. En su discusión del concepto siguen de cerca la teoría cartesiana de las ideas (esto es, su doctrina de las ideas innatas), pero tratando de incluir en ella alguno de los temas comúnmente abordados a propósito de los términos. Ello les lleva de manera natural a hablar de las ideas como signos, considerándolas como lo que los lógicos medievales llamaban *termini mentales*. Nos dicen, así, que hay ideas singulares, cada una de las cuales representa un individuo, e ideas generales o comunes que representan muchas cosas. Y, tras de conectar estos dos géneros con los de nombres propios y comunes, declaran que la expresión «término general» podría aplicarse por igual a las ideas universales y a los nombres comunes [37]. Añaden, sin embargo, que una de las ocasiones más frecuentes de confusión en nuestro pensamiento es la incertidumbre acerca de las relaciones entre las palabras e ideas. El remedio apropiado a estos efectos está en determinar a discreción la conexión entre unas y otras. Tal determinación corre a cargo de la definición nominal (*definitio nominis*), que hay que distinguir cuidadosamente de la definición real (*definitio rei*), la cual en modo alguno es ya arbitraria sino que explicita la idea asignada a la palabra, desentrañando qué otras ideas se contienen en ella [38]. El lector tal vez piense que por «*definición real*» hay que entender sencillamente la explicación del significado atribuido a la palabra en nuestra uso acostumbrado de la misma, pero al parecer no se trata de esto. Pues, en efecto, nuestros autores hablan a continuación de este último como de un tercer tipo de definición por separado, introduciendo en este punto algunas interesantes observaciones sobre la distinción entre ideas principales y accesorias asignadas a la palabra. Por ideas accesorias entienden aquellas connotaciones sugestivas que dan a las palabras su tonalidad emocional, convirtiéndolas en corteses u ofensivas, reverentes u obscenas. En la segunda y la tercera parte del libro no abundan, por el contrario, las consideraciones psicológicas acerca del juicio y el raciocinio, contentándose en ellas los autores con tratar de ordinario a las proposiciones y argumentos como piezas del discurso hablado o escrito. La palabra *iudicium* no se usaba comúnmente en la Edad Media para designar la contrapartida mental de la aserción, pero Ockham sí se había servido a estos efectos de la expresión *actus iudicativus* [39]; y hasta es posible que *jugement* resultara menos extraña que *idée* en un libro de lógica del siglo XVII. En su caracterización de las proposiciones complejas, los autores apuntan

37 Ibid. I, 6.
38 Ibid. 12-13.
39 *Super Quattuor Libros Sententiarum, Prolog.*, quaestio I, O. Cf. Prantl, *Geschichte der Logik*, III, p. 333.

la interesante observación de que cláusulas tales como «Sostengo que» y «Es verdad que» no siempre han de tomarse como signos de aserciones independientes [40].

A pesar de sus títulos, las tres primeras partes de la *Lógica de Port Royal* se corresponden con las subdivisiones usuales de los tratados de lógica, pero la cuarta parte del libro constituye una innovación. Se presta en ella atención a una serie de cuestiones relativas a la claridad y distinción de pensamiento, a las que debe su principal interés. Los autores comienzan en verdad con una mención de la vieja distinción entre razonamiento *a priori* y *a posteriori*, pero hacen ver que es menester extenderla algo (a saber, más allá de los sentidos consuetudinarios de «razonamiento a partir de causas» y «razonamiento a partir de efectos») si se desea incluir bajo ella a toda suerte de demostración [41]. Tras de lo cual pasan a discutir por extenso las instrucciones dadas por Descartes en su *Discours de la méthode* y por Pascal en su *Esprit geométrique*. Lo que entienden por «método» queda bien expresado en las siguientes ocho reglas que resumen sus conclusiones:

«1. No dejar que absolutamente ningún término resulte oscuro o equívoco por falta de definición.

2. Emplear en las definiciones únicamente términos perfectamente conocidos o explicados con anterioridad.

3. No considerar como axiomas sino aquellas cosas que resulten perfectamente evidentes.

4. Aceptar como evidente lo que sólo requiera de un poco de atención para ser reconocido como verdadero.

5. Demostrar todas las proposiciones afectadas de alguna oscuridad, empleando en su demostración únicamente definiciones precedentes, axiomas previamente acordados y proposiciones ya demostradas.

6. No dejarse nunca extraviar por la ambigüedad de los términos, cuidando de efectuar la sustitución mental de las definiciones que los restrinjan o los explayen.

7. Tratar las cosas, en la medida de lo posible, de acuerdo con su orden natural, partiendo para ello de lo más general y más simple y dando cuenta de lo que pertenece a la naturaleza del género antes de pasar a las diversas especies.

8. Dividir, hasta donde sea posible, cada género en todas sus especies, cada complejo en todas sus partes, cada dificultad en todos sus casos» [42].

Estas máximas parecen haber sido pergeñadas con especial referencia a la matemática, mas los autores aclaran en sus observaciones introductorias que una de las lecciones más importantes a extraer de la matemática es la humildad al enfrentarse a lo infinito, por lo que consideran todo ello indirectamente relevante para el tratamiento de la fe religiosa con que cierran su libro.

La contribución más recordada de la *Lógica de Port Royal* es su célebre distinción entre la comprehensión y la extensión de los términos generales. En su primera introducción de estos vocablos técnicos, los autores hablan de la comprehensión y la extensión de las ideas generales [43], pero en otros lugares los refieren a los términos. Por lo demás, no hay peligro de errar al seguir esta práctica, toda vez que las ideas son para ellos una clase de términos. La comprehensión, pues, de un término general

40 *Logique*, II, 8.
41 Ibid. IV, 1.
42 Ibid. 11.
43 Ibid. I, 6.

es el conjunto de atributos que ese término encierra, o —como lo expresan los autores— el conjunto de atributos que no podrían ser removidos sin comportar la destrucción de la idea. Así, la comprehensión de la idea de triángulo incluye la extensión y la figura geométricas, el tener tres lados y tres ángulos, y el que la suma de sus ángulos sea igual a dos rectos. La extensión de un término, por su parte, es el conjunto de cosas a las que es aplicable dicho término, o —como lo expresaran los lógicos un par de siglos antes— el conjunto de sus inferiores. La distinción acaso dé la sensación de estar destinada a reemplazar a la distinción medieval entre *significatio* y *suppositio;* pero, en rigor, ambas distinciones no se corresponden exactamente, ya que la comprehensión y la extensión de un término no son dos propiedades de este último, sino más bien dos conjuntos de entidades con las que el término se relaciona de modo diferente. Por otra parte, los nuevos vocablos técnicos plantean dificultades de cuño también nuevo. Ya que el vocablo *comprehénsion* quiere en francés decir corrientemente «comprensión», del verbo «comprender», parece natural pensar que Arnauld y Nicole trataban de aludir con él a lo que comprendemos o entendemos por medio de un término, a saber, lo que éste significa o su *significatum.* Mas su definición, y el ejemplo propuesto, no apoyan semejante interpretación. En efecto, nos dicen que el hecho de que los ángulos de un triángulo sumen dos rectos se halla incluido en la comprehensión de la idea de triángulo, y en realidad se trata de una característica que la de triangularidad encierra dentro de sí (*enferme en soi*) en algún sentido un tanto amplio de la expresión; pero no forma parte ciertamente del significado del término «triángulo». Desde mediados del siglo XIX, los autores ingleses han seguido generalmente a Sir William Hamilton en su práctica de reemplazar «comprehensión» por «intensión» (*intension*), carente de uso en el lenguaje ordinario, pero sin que esté claro que hayan sido siempre conscientes del alcance de la sustitución. Por otra parte, la extensión de un término general es para Arnauld y Nicole el conjunto de sus inferiores, mas no se sabe bien si los inferiores de que hablan habrán de ser especies o individuos. En su ilustración de la cuestión nos dicen que la idea de un triángulo en general se extiende (*s'étend*) a todas las diversas especies de triángulos, pero en el parágrafo siguiente hacen notar que la extensión de un término —a diferencia de su comprehensión— podría ser reducida sin que ello comportara la destrucción de la idea («on peut la reserrer quant à son étendue... sans que pour cela on la détruise»), lo que no es cierto del conjunto de especies incluidas bajo un género. Así, no nos será posible continuar hablando con sentido de triángulos si excluimos que la noción de triangularidad pueda aplicarse al caso de la triangularidad equiángula, mientras que en cambio nada hay que nos impida decir —al tiempo que apuntamos a un triángulo singular— «Supongamos que este triángulo no existiera». Lo más seguro es, pues, que los autores, si se les insistiera en relación con este punto, acabasen reconociendo que «extensión» es el conjunto de individuos a que se aplica un término general. En cuanto a las confusiones de su exposición, parecen ser debidas a su empleo de la metafórica expresión «inferiores», que no peca de clara. Como se recordará, individuos como Sócrates, Platón o Brunellus eran frecuentemente mencionados, en la representación medieval del árbol de Porfirio, a la base de un cuadro cuyos otros casilleros los ocupaban términos generales.

Tras de haber introducido su distinción, Arnauld y Nicole nos dicen que en ciertos contextos un término puede no ser considerado en toda su extensión (*selon toute son étendue*), ya sea por hallarse cualificado por una restricción indefinida como «algún», ya sea por oficiar de predicado de una proposición afirmativa, quedando de este modo restringido el alcance de su extensión al de la del sujeto [44]. Se trata, como puede pensarse, de una acomodación a su propia terminología de cuanto los medievales habían dicho acerca de los *termini non complete distributi*. Mas por su parte se abstienen de hacer uso del vocablo «distribución», sin duda por considerar que forma parte de una jerga confundente, y se permiten asimilar las proposiciones singulares a las universales sobre la base de que el sujeto de una proposición singular se halla tomado necesariamente en toda su extensión [45]. Este último constituye un ardid escasamente afortunado, que entorpece aún más su caracterización de la extensión al difuminar la distinción existente entre términos singulares y generales; pero no es peor recurso, en cualquier caso, que la asignación medieval de *suppositio* a ambos tipos de términos. A continuación, y basados en su propia doctrina, así como en las reglas medievales de la distribución incorporadas por aquélla, proceden a desarrollar las reglas de la conversión [46] y la silogística [47] con un rigor tan apreciable como sorprendente. Su tratamiento cuasi-matemático de estos temas acaso sea el primero de su género y ha servido de fuente para la mayor parte de los autores posteriores de manuales de lógica, que extrajeron de aquél cuantiosos detalles de su teoría formal, como por ejemplo su determinación de los modos válidos del silogismo y su prueba de las reglas especiales de las diversas figuras. No obstante, es característico de Arnauld y Nicole su cuidado en advertir, antes de cada pasaje dedicado a esos detalles lógico-formales, que el lector podría omitirlos ya que sólo son necesarios desde el punto de vista de la pura teoría.

Una interesante observación en su examen del razonamiento es la de que, cuando tan sólo se conoce la verdad de una de las premisas de un silogismo válido, la otra premisa podría ser introducida como una condición respecto de la conclusión. Dado, por ejemplo, que la materia es incapaz de pensar, podremos inferir que, si todo lo que es capaz de experimentar dolor es capaz de pensar, la materia no es capaz de experimentar dolor. Y cuando no se conozca la verdad de ninguna de las premisas, podremos presentarlas a ambas a título de condiciones de un enunciado hipotético [48]. Tendríamos con ello una versión del principio de condicionalización (o «teorema de la deducción»), que Aristóteles asumía implícitamente y del que expresamente se sirvieron los estoicos.

Algunos rasgos de la *Lógica de Port Royal* reflejan intereses muy particulares de Arnauld y Nicole, que no podía esperarse rebasaran su propio círculo doctrinal; pero la concepción general de la lógica que expusieron en su obra gozó de una amplísima aceptación y continuaría dominando el tratamiento de la lógica por parte de los filósofos durante los dos siglos subsiguientes. Mas seguir paso a paso la propagación de su influjo sería tedioso y de poco provecho. En lo que resta del presente capítulo

---

44 Ibid. II, 3 y 17.
45 Ibid. 3.
46 Ibid. 18-20.
47 Ibid. III, 3-11.
48 Ibid. III, 13.

vamos a ocuparnos, en vez de ello, de otra línea de pensamiento que finalmente habría de acreditarse como la más fructífera, aunque por largo tiempo produjera escaso efecto en la enseñanza académica de la lógica. Se trata de la línea de pensamiento inaugurada por Leibniz en su juventud, pocos años antes de la confección de la *Lógica de Port Royal*.

2. Los intereses de Leibniz.

Aunque, como hemos visto, no abundaron en los siglos XVII y XVIII los pensadores famosos que prestasen mucha atención a la lógica formal, Gottfried Wilhelm Leibniz, nacido en 1646 y muerto en 1716, merece ser contado entre las más grandes figuras de la lógica. El hecho de que su obra lógica tuviese escasa repercusión durante aproximadamente un par de siglos después de haberla escrito se debió en parte al predominio de otros intereses, relacionados con el nacimiento de la ciencia natural, pero también en parte a las peculiaridades de su propio temperamento. Leibniz fue un genio universal que concibió muchos proyectos y acometió muchas empresas, mas sin llevarlos por lo general a feliz término. En el momento de su muerte, su fama descansaba en su descubrimiento del cálculo infinitesimal y en su doctrina metafísica de que éste es el mejor de todos los mundos posibles. Mas los admiradores de Newton le acusaron de haber robado la idea del cálculo a su maestro y las mentes dieciochescas poco proclives a la metafísica ridiculizaron su *Théodicée* y su *Monadologie*, obra ésta publicada a título póstumo (Leibniz fue en tal sentido el blanco del ingenio de Voltaire en su *Cándido*). Por algunos breves fragmentos publicados en anales de la época, cartas escritas a varios de sus múltiples corresponsales y referencias esparcidas aquí y allá a lo largo de sus *Nouveaux Essais sur l'entendement humain* (pormenorizada crítica de Locke publicada por vez primera en 1715) llegó a saberse que alegaba haber llevado a cabo grandes descubrimientos en el dominio de la lógica, pero se disponía de pocos testimonios que corroborasen este alegato. Leibniz había escrito copiosamente durante años en trabajos de muy diverso tipo, pero todo ello en forma de notas o memoranda, la mayor parte de los cuales permanecieron inéditos en la biblioteca de Hanover donde había servido al Elector como historiador, consejero científico y experto en derecho internacional. Durante el siglo XIX fueron publicadas diversas selecciones de esos trabajos, pero hasta 1895 no se confeccionó un catálogo completo (o aproximadamente tal) de los mismos [49] y ni siquiera hoy contamos con el texto íntegro de sus obras, pues la edición definitiva en cuarenta volúmenes proyectada por la Academia de Berlín (de la que fue su primer presidente) se vio demorada por culpa de la guerra y el antisemitismo.

Son muchas las facetas diferentes envueltas en la reflexión leibniziana acerca de la lógica. Leibniz fue un apasionado de la síntesis intelectual, y así como apreciaba su monadología por poner en conexión multitud de hechos y teorías que de otro modo habrían permanecido desconectadas entre sí (por ejemplo, teleología y mecanicismo, substancia y energía, espíritu

[49] E. Bodemann, *Die Leibniz-Handschriften der Königlichen Öffentlichen Bibliothek zu Hannover*.

y materia, cálculo infinitesimal y microbiología), de la misma manera valoraba su lógica por creerla una joya capaz de arrojar luz en muy diversas direcciones. Para hacernos cargo de su pensamiento será, pues, necesario prestar atención a un cierto número de los variados intereses que hubieron de promoverlo, concentrándonos para ello en los siguientes aspectos del mismo que procederemos a considerar brevemente: (1) su respeto por la lógica tradicional; (2) su noción de una *ars combinatoria*, o teoría general de las agrupaciones; (3) sus planes para la construcción de un lenguaje ideal; (4) su programa para la coordinación del conocimiento por medio de una enciclopedia; y (5) las esperanzas por él depositadas en una ciencia general del método. Cada uno de estos intereses los compartió con unos u otros de sus contemporáneos, pero el rasgo más destacable de su pensamiento fue el modo como trató de conjugarlos entre sí. El orden que vamos a seguir al ocuparnos de ellos es el que más puede ayudarnos para captar sus conexiones en el pensamiento de Leibniz y corresponde en parte al orden en que este último hubo de evolucionar, pues (1) y (2) se remontan a sus comienzos y (5) no madura sino con posterioridad. Sin embargo, hoy por hoy no cabría conceder demasiada importancia a estos detalles, pues todavía no es posible trazar con minuciosidad la historia de su desenvolvimiento. Lo que está claro, en cualquier caso, es que Leibniz retuvo todos esos intereses hasta el final de su vida [50].

(1) De acuerdo con su propia declaración, Leibniz leyó con placer a Zabarella a la edad de doce años y a los catorce concibió la idea de que todas las proposiciones podían ser dispuestas según el orden en que hayan de suministrar materia a un encadenamiento de silogismos, esto es, de modo que constituyan un sistema deductivo como el elaborado por Euclides para la geometría [51]. Este entusiasmo por la silogística aristotélica subsiste todavía al escribir los *Nouveaux Essais*, donde describe la doctrina aristotélica como «uno de los más hermosos descubrimientos del espíritu humano» y dice de ella que constituye un «arte de la infalibilidad», susceptible de ser desarrollado en «una suerte de matemática universal» [52]. Estos elogios se dirigen, por supuesto, a contrarrestar el desprecio de Locke por la lógica formal. En una nota de 1715, no destinada a la publicación, fue más explícito: *Lockius aliique qui spernunt non intelligunt* [53]. Pero será interesante pasar revista a las opiniones de Leibniz sobre un cierto número de aspectos de la teoría silogística, pues nuestro autor estaba lejos de ser un purista aristotélico.

En primer lugar, no creía en la posibilidad de reducir toda argumentación a forma silogística. Los ejemplos de razonamiento no silogístico que gustaba de citar eran los argumentos por inversión de relaciones y *a recto ad obliquum* considerados por Junge en la *Logica Hamburgensis*, pero es improbable que pensara que éstas constituían las únicas formas de razonamiento excluidas en la doctrina aristotélica, pues a veces insiste en que una

---

50 Para referirnos a obras no publicadas independientemente nos serviremos de las abreviaturas "*P*", correspondiente a *Die Philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, y "*M*", correspondiente a *Leibnizens mathematische Schriften*, unos y otros editados por Gerhardt, así como de "*O*", correspondiente a *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, editados por L. Couturat. El plan y buena parte del material de esta sección procede de la obra de Couturat *La Logique de Leibniz* (1901).

51 *P*, VII, p. 126.

52 *Nouveaux Essais*, IV, XVII.

53 *P*, VIII, p. 481.

teoría ampliada de la deducción tendría que hacer lugar a una considerable diversidad de cálculos y, aparte de ello, se muestra plenamente consciente de la imposibilidad de reducir los argumentos disyuntivos y condicionales a forma silogística. No obstante, sostenía la existencia de un principio común a toda deducción, a saber, el de sustitución de los equivalentes [54].

En segundo lugar, mantenía que existen cuatro figuras silogísticas, cada una de ellas con seis modos. Esta tesis aparece ya en su *De Arte Combinatoria,* compuesta en 1666 cuando sólo contaba diecinueve años de edad, y evidentemente atrajo a Leibniz por su pulcra simetría. Leibniz supo ver que la usual doctrina aristotélica de las catorce modos, distribuidos en tres figuras, descansaba en una arbitraria noción de lo que sea natural en el razonamiento más bien que en una teoría consistente de la forma silogística. Al aceptar la doctrina de los veinticuatro modos, se comprometía expresamente a conceder alcance existencial a todos los enunciados universales. Hemos de ver que, a pesar de los recelos despertados por semejante concesión, nunca logró zafarse por completo del embrollo, siendo probablemente éste uno de los factores que le impedirían elaborar un cálculo lógico realmente satisfactorio.

En tercer lugar, prefería efectuar la reducción de los silogismos a la primera figura *per impossibile* más bien que por conversión, por sostener que el método usualmente calificado de indirecto era en rigor más simple. Pero cayó en la cuenta de que los silogismos de la cuarta figura no son en modo alguno reducibles sin recurso a los principios de la conversión (o, por lo menos, sin recurso al principio de identidad, del que había de servirse para probar los principios de la conversión en la segunda y tercera figuras), lo que siquiera parcialmente empañaba la pulcritud de su esquema [55]. Las observaciones que hace a este respecto acreditan cuán cuidadosamente había estudiado la historia de la lógica, por lo que resulta un tanto extraño que su intento de justificar la reducción indirecta se base sólo en el principio de no-contradicción, sin recurrir a ese principio de la lógica primaria que los estoicos habían ya formulado como su primer *théma.*

En cuarto lugar, defendía la tesis (que vimos ya propuesta en la obra de Wallis) de que los enunciados singulares pueden considerarse como universales a los efectos de la teoría silogística [56]. Si sólo se tratara de un recurso tendente a permitirnos oficiar con los argumentos de premisas singulares como si fuesen silogismos, dicha tesis resultaría bastante inofensiva. Pues, por más que esos argumentos difieran en sus características de lo silogismos aristotélicos, sus reglas se asemejan a la del razonamiento silogístico al que dicho recurso persigue equipararlos. Parece claro, sin embargo, que Leibniz fue más lejos que todo eso y aceptó la asimilación de los enunciados singulares a los universales por considerar que no había diferencias fundamentales entre ambos tipos de enunciados. Tal conclusión se halla implicada en su aserto, frecuentemente repetido, de que en toda proposición afirmativa verdadera, sea universal o singular, necesaria o contingente, *praedicatum inest subiecto* [57]. La importancia de esta doctrina nos obliga a concederle especial atención.

---

54 *Leibnitii Opera* (ed. Dutens 1768), VI (I), p. 32.
55 *N.E.*, IV, II, 1.
56 *N.E.*, IV, XVII, 8.
57 *O*, p. 16; *O*, p. 51; *O*, pp. 518-19; *Discours de métaphysique*, § 8; *P*, II, p. 46.

Lord Russell apuntó en su libro *The Philosophy of Leibniz* que dicho principio fue la fuente principal de las curiosas doctrinas metafísicas que Leibniz se vería obligado a sustentar. Vamos a ver ahora que sus efectos fueron no menos desastrosos para el desarrollo de la lógica de Leibniz. El principio podría tal vez parafrasearse en castellano diciendo que «todo enunciado afirmativo verdadero adscribe a la cosa denotada por su término-sujeto un atributo que inhiere realmente en dicha cosa». Así formulado, habría merecido probablemente la aceptación de Aristóteles; pues la caracterización aristotélica de los enunciados generales se basa en una noción de la predicación derivada de la consideración de los enunciados singulares. Pero la aplicación del esquema sujeto-predicativo ha llevado por lo común a los filósofos a concebir a las proposiciones generales en términos que sólo resultan apropiados para el caso de las proposiciones efectivamente singulares. En particular, éstos han tendido a asumir que el término-sujeto de un enunciado universal ha de referir a algo, con lo que han aceptado sin cuestionarla la doctrina del alcance existencial. Como ya hemos visto, Leibniz siguió a veces esta línea de pensamiento; pero la peculiaridad de su filosofía se debe en buena parte al hecho de que también cayó en el error opuesto de interpretar a las proposiciones relativas a individuos como si fueran semejantes a las leyes expresadas en nuestros enunciados universales. El aforismo *Praedicatum inest subjecto* no sólo se aplicaba para él, por consiguiente, a aquellos casos en que decimos que la sabiduría inhiere en Sócrates, sino también a aquellos otros en que cabría decir que la animalidad se halla contenida en la humanidad. Y este segundo sentido predominó hasta tal punto que Leibniz hablaba con frecuencia como si a cada individuo le hubiese de corresponder un concepto o esencia que necesariamente envolviera todos los atributos predicables del individuo en cuestión. Este es el origen de su principio de la identidad de los indiscernibles. Así como Sto. Tomás de Aquino había sostenido que cada ángel constituye una especie distinta, por carecer los ángeles de materia, que es lo que individúa a las cosas ordinarias, de la misma manera venía Leibniz a sostener que cada individuo difiere de los demás en algún atributo [58]. Con ello se borraba para él la distinción existente entre la historia y la ciencia; y la asimilación de los enunciados singulares a los universales pasaba, de ser un simple recurso económico tendente a simplificar la regulación de la argumentación, a convertirse en la expresión de una profunda convicción.

Su respeto por la lógica sujeto-predicativa de Aristóteles tuvo otro infortunado efecto sobre el pensamiento de Leibniz, a saber, el de hacerle preterir las proposiciones de forma relacional. Su mención del argumento por inversión de relaciones de Junge (por ejemplo, el paso de «Tito es mayor que Cayo» a «Cayo es menor que Tito») demuestra que era consciente de la necesidad de ampliar el dominio de la lógica con la adición de una teoría de las relaciones, pero en dicha adición no llegó nunca a ver sino una glosa o un escolio de la teoría de los atributos. Según él, «Tito es mayor que Cayo» vendría a significar lo mismo que «Tito es grande tanto como Cayo es pequeño», con lo que, en su opinión, los hechos relacionales quedarían resueltos en conjunciones de hechos atri-

58 *Discours de Métaphysique*, § 9.

butivos [59]. Esta doctrina es ciertamente incorrecta y hemos de ver que obstaculizó seriamente a Leibniz en el desarrollo de sus propias ideas. Pero Leibniz prestó un servicio a la filosofía al tratar de sostenerla por encima de todo. Sus vigorosos esfuerzos por preservar la vieja teoría de que todo enunciado adscribe un atributo a un sujeto revelan por lo pronto su propia incomodidad ante la misma, y habrían de estimular a los lógicos posteriores a desembarazarse en este punto del lastre de la tradición.

La más fructífera de las ideas que Leibniz derivó de su estudio de la lógica aristotélica fue la noción de demostración formal. Esta noción cobra realce en sus críticas a Locke antes aludidas, y reaparece una y otra vez en sus escritos. Así nos dice, por ejemplo, que las reglas cartesianas del método no son sino recomendaciones psicológicas de escasa monta [60] y que el punto flaco de Descartes como teórico del método radica en no haber sabido captar la importancia de la forma lógica [61]. Leibniz estaba, sin duda, bien dispuesto a reconocer que el uso de silogismos en las disputaciones escolásticas podía degenerar en estúpida pedantería, pero veía también que no hay rigor posible sin prestar atención a la formalidad e insistía acertadamente en la importancia de presentar los nuevos resultados en el dominio de la matemática de modo tal que su necesidad se hiciese depender de su forma. El énfasis depositado en este punto no se acomodaba a la moda imperante en su época y seguiría estando en desuso por largo tiempo, pero en el siglo pasado evidenció ampliamente su justificación.

(2) La teoría de las permutaciones y combinaciones se desarrolló por vez primera en el siglo XVII, primordialmente a causa de su utilidad en conexión con el cálculo de probabilidades, y atrajo la atención de Leibniz cuando aún no había cumplido los veinte años. De hecho, su primera obra de cierta envergadura fue el *De Arte Combinatoria* [62] mencionado en un párrafo anterior. Ya en su madurez, tuvo ocasión de objetar a la reedición de este tratado sin su permiso, pero su objeción no se debía, sin embargo, al abandono de sus tesis primitivas, sino más bien al desagrado que le producía ver imprimir una obra inmadura como si fuera de reciente composición [63]. Al final de su vida consideraba a la teoría de las combinaciones como algo más fundamental que la lógica ordinaria, pero por *ars combinatoria* no entendía simplemente un arsenal de reglas destinadas a calcular el número de subconjuntos de un cierto tipo que se podrían formar a base de los miembros de un conjunto dado. Leibniz había ya concebido en su juventud la idea de un alfabeto del pensamiento humano gracias al cual todo lo que es pensable pudiese ser construido por medio de las oportunas combinaciones, de suerte que el razonamiento viniera a reducirse a la cuasi-mecánica operación de recorrer los casilleros de una lista [64]. Su inspiración a este respecto provenía de la *Ars Magna* de Raimundo Lull y de la *Computatio sive Logica* (esto es, la primera parte del *De Corpore*) de Hobbes [65]. Mas Leibniz reparó en que para la utilidad

---

59 *O*, p. 280. Cf. la *Quinta carta a Clarke*, § 47 (*P*, VII, p. 401).
60 E. Bodemann, *Die Leibniz-Handschriften*, p. 82.
61 *P*, IV, p. 276.
62 *P*, IV, p. 27.
63 *N.E.*, IV, III, 18.
64 *P*, VII, p. 185.
65 *P*, IV, p. 64.

de dicho método se necesitaban dos cosas que ni Hobbes ni Lull habían sabido prever: (*a*) asegurarse de que el «alfabeto» fuese realmente básico y completo, y (*b*) encontrar un procedimiento por el que *todas las posibles* combinaciones fuesen sin excepción tenidas en cuenta. En su obra primitiva había dedicado tanto espacio a calcular el número de combinaciones permisibles bajo determinadas circunstancias que aquellos requisitos quedaron relegados a un segundo plano, pero incluso allí cuidó de destacar que lo que estaba tratando de elaborar era una lógica heurística (*logica inventiva*) y logró por lo menos un resultado interesante al hacer ver la posibilidad de exactamente veinticuatro formas válidas del silogismo.

En el tratado *De Arte Combinatoria,* Leibniz intentaba mostrar cómo la composición de las nociones geométricas complejas podía ser concisamente presentada mediante un código en que los números enteros representasen *termini primi* (por ejemplo, «1» representaría *punctum* y «2» representaría *spatium*) y los números fraccionarios representasen otros términos introducidos por definición y agrupados en diversas clases (por ejemplo, «1/2» representaría el primer término de la segunda clase, que resulta ser *quantitas*). Por mediación de este aparato, podía entonces elaborar definiciones tales como *Circulus est* 1/12.8 *ab* 18.21 *habens* τὴν 16.2/3 τοῦ 19 *alicuius* 1 *ab* 18.6. Pero no explicitó cómo podría servir de ayuda dicho código para el propósito a que estaba principalmente destinado, y el hecho de que nunca volviera a utilizarlo en obras posteriores parece sugerir que no tardó en reconocer su inadecuación como instrumento de análisis lógico. En rigor, dicho código no tiene más de filosófico que lo que pueda tener de tal un código telegráfico, y su mayor interés reside en ilustrar las dificultades del proyecto acariciado por Leibniz.

En primer lugar, la lista de veintisiete *termini primi* que Leibniz propone para la geometría no se halla gobernada por ningún principio inteligible. Algunos de esos términos, tales como *punctum* y *dimensio,* parecen específicos de la geometría, mientras que otros —como *unum, possibile* y *omne*— poseen aplicación fuera de aquel dominio; y, en cuanto a los términos específicamente geométricos, no está ni mucho menos claro que todos ellos sean indispensables. En segundo lugar, la necesidad de expresiones auxiliares del tipo de *ab, habens, alicuius,* así como de artículos griegos declinados, en la formulación de las definiciones es una muestra de la insuficiencia del análisis de Leibniz. Para poder haber llevado a cabo su programa satisfactoriamente habría sido necesario (*a*) distinguir tajantemente entre los signos comunes de la sintaxis lógica y los peculiares de la geometría y (*b*) considerar atentamente qué grados de complejidad pudieran afectar a las definiciones o, con otras palabras, qué es lo que haya que entender por «combinación» de las nociones geométricas simples. La incapacidad de Leibniz para ofrecernos un ejemplo convincente de su método se debió sobre todo a su obsesión por la idea de que toda complejidad ha de constituir el resultado de una conjunción de atributos. Al hablar de combinación, Leibniz pensaba en complejos como los que expresamos al agrupar conjuntamente adjetivos o nombres comunes, como sucede pongamos por caso con la definición «un triángulo es una figura rectilínea trilátera», y no alcanzó a comprender que la complejidad del mundo está muy lejos de quedar agotada por ejemplos como éste. Tendremos ocasión de retornar sobre este punto más adelante, y aquí lo men-

cionamos solamente como ilustración de que una de las principales dificultades con que Leibniz hubo de tropezar se hallaba ya implícita en su primitivo tratamiento de la *ars combinatoria.*

(3) Numerosos autores del siglo XVII habían adelantado sugerencias para la construcción de un lenguaje universal. En los días de Leibniz tales ideas florecían especialmente en Inglaterra, donde Wilkins y Dalgarno abogaban cada uno por un sistema propio. Los argumentos capitales aducidos por los inventores de tales sistemas se asemejaban a los que en nuestros días se siguen aduciendo en favor del esperanto, a saber, que la comunicación se vería considerablemente facilitada y la difusión de las ideas se haría más rápida si todos los hombres, o por lo menos todos los hombres cultos, tuviesen a su disposición un lenguaje construido sobre principios más sencillos que los ordinarios y estrictamente regular en su gramática. Leibniz no era indiferente a semejantes consideraciones, pues creía firmemente en la importancia de establecer la paz y el orden a escala mundial y sostenía que el progreso de la ciencia depende de la cooperación intelectual entre los hombres de las diferentes naciones. De aquí que en un tiempo defendiese el uso a tal efecto de una especie de latín básico (presumiblemente semejante al *latino sine flexione* usado por Peano a comienzos de este siglo en su *Formulario Mathematico*) [66]. Mas su interés por la construcción de un lenguaje ideal iba mucho más lejos que todo eso. Leibniz deseaba elaborar un lenguaje científico que no sólo sirviera para la mera comunicación del pensamiento sino también para pensar, lenguaje al que bautizaría con el nombre de *lingua philosophica* o *characteristica universalis* [67].

El principio fundamental de la teoría leibniziana del simbolismo es que nuestras expresiones han de reflejar la estructura del mundo. Aunque los signos básicos encargados de representar elementos simples puedan ser escogidos arbitrariamente, ha de darse una analogía, en el estricto sentido del vocablo, entre sus relaciones y las relaciones de los elementos por ellos significados [68], de suerte que el nombre de cada cosa compleja constituya su definición y encierre la clave de todas sus propiedades [69]. Nosotros no podemos evitar el uso de signos en nuestra actividad de pensamiento. pero nuestros sistemas simbólicos ordinarios están lejos de aproximarse a aquel ideal y ésta es la fuente capital de las dificultades con que tropieza nuestra labor intelectual: «In signis spectanda est commoditas ad inveniendum, quae maxima est quoties rei naturam internam paucis exprimunt et velut pingunt; ita enim mirifice imminuitur cogitandi labor» [70]. En la matemática, la importancia de un adecuado simbolismo se halla ya acreditada por los descubrimientos que éste ha hecho posibles (el caso, por ejemplo, del descubrimiento del cálculo infinitesimal del propio Leibniz), pero necesitamos de un hilo de Ariadna que nos guíe a través del laberinto de otras disciplinas [71] y sólo la *characteristica universalis* podrá proporcionarnos ese hilo conductor. Con semejante ayuda nuestro pensamiento habrá de verse libre de las asechanzas del genio maligno imaginado por Descartes, ya que

---

66 *P*, VII, p. 28.
67 *P*, VII, p. 184.
68 *P*, VII, p. 192.
69 *O*, p. 152.
70 *M*, IV, p. 455.
71 *O*, p. 337.

gracias a ella todo le estará claro y no existirá el riesgo de dejarse extraviar por la engañosa memoria.

En orden a cumplir, siquiera parcialmente, los objetivos del programa de Leibniz, tendríamos que contar (*a*) con símbolos para todas las nociones que hayan de tomarse como elementales o inanalizables y (*b*) con recursos apropiados para expresar nociones formales tales como las de predicación, conjunción, disyunción, conexión condicional, universalidad y existencia. En la mayor parte de los lenguajes ordinarios existen símbolos especiales (llamados sincategoremáticos) para significar algunas de esas nociones formales, pero no es esencial que todas ellas hayan de ser siempre expresadas por medio de vocablos específicos e independientes. En el griego antiguo, por ejemplo, la noción de predicación podía ser expresada colocando un adjetivo antes de un nombre acompañado del artículo definido, como en μέγας ὁ ἀνήρ, y en castellano cabe expresar la conjunción por medio de una simple yuxtaposición de palabras, como en la locución «una larga calle estrecha». Más aún, en ocasiones es incluso posible la expresión de nociones no formales por medio de agrupaciones ordenadas de otros símbolos. Esto resulta máximamente obvio en el caso de la confección de un mapa, en que las posiciones relativas de los diversos accidentes naturales se hallan reproducidas por las posiciones relativas de los indicadores asociados a los nombres de dichos accidentes. Pero puede asimismo acontecer en el lenguaje oral, como cuando Julio César dijo *Veni, vidi, vici*, dando a entender que su llegada, su inspección de la situación y su victoria se sucedieron en el orden de los verbos empleados para designar esos hechos. No está del todo claro hasta qué extremos de rigor deseaba llevar Leibniz la construcción de su *characteristica universalis*, pues no llegó a ofrecernos nunca un detallado esquema de la misma ni tan siquiera se detuvo a examinar las alternativas arriba mencionadas. Pero lo más probable es que, por lo común, la concibiera como un tipo de escritura en la que las nociones no formales habrían de ser representadas por otros signos que palabras. En ocasiones nos dice que habría de asemejarse al álgebra, y otras veces que habría de constituir una versión perfeccionada del sistema ideográfico de la lengua china [72]. Y lo cierto es que trató de exhibir la forma lógica de las proposiciones de manera más simple y regular que en cualquier lenguaje natural, pues a menudo afirma que una gramática filosóficamente construida habría de facilitar el razonamiento formal al proporcionarnos el armazón de un *calculus ratiocinator* (esto es, un método cuasi-mecánico de extracción de conclusiones) en que las propias argumentaciones no silogísticas de Junge quedasen sometidas a unas cuantas sencillas reglas de procedimiento. Y hasta llega a profetizar que, una vez elaborado ese lenguaje, los hombres de buena voluntad que deseasen zanjar cualquier clase de controversia sólo tendrían que tomar el lápiz en sus manos y decirse *Calculemus* [73].

Dos fueron las razones por las que Leibniz no llegó nunca a elaborar un sistema definitivo. La primera de ellas era la imposibilidad de confeccionar un diccionario del nuevo lenguaje hasta tanto no se hubiera completado, siquiera más de lo que lo estaba en tiempos de Leibniz, la tarea

---

72 *O*, p. 30.
73 *P*, VII, p. 200.

previa de investigación científica requerida a esos efectos. Nadie podría pergeñar una nomenclatura o simbolismo con destino a la química mientras ésta no exista como ciencia. Descartes ya había hecho con anterioridad una observación por el estilo contra una propuesta de Mersenne, y el reparo no escapó a la atención de Leibniz [74]. Su entusiasmo por el proyecto de una enciclopedia se debió en parte a su esperanza de que el remate de esa obra ayudaría a hacer posible la composición de una *characteristica universalis*. Pero había una segunda razón, que Leibniz no acertó a barruntar, por la que no podía progresar mucho en la construcción de un lenguaje ideal, y fue, como sabemos, su fracaso por liberarse del dogma sujeto-predicativo de la lógica tradicional.

Más arriba veíamos cómo fracasó Leibniz en su primitivo intento de aplicar la *ars combinatoria* a las nociones geométricas. La limitación de su pensamiento que hizo inevitable aquel fracaso fue también la que le impediría elaborar un sistema simbólico en que el nombre de cada cosa constituyese su definición y encerrase la clave de todas sus propiedades. Pues, en efecto, la noción de complejidad con la que operaba fue en todo momento la de una conjunción de atributos, y esa noción es absolutamente insuficiente para dar cuenta de la diversidad de lo pensable. Una típica sugerencia a la que recurrió en diversas ocasiones era la de que las ideas simples podrían ser expresadas mediante diferentes números primos, en tanto las ideas complejas lo serían mediante productos de primos [75]. Ya que sólo hay un modo como un número natural dado puede descomponerse en primos, dicho plan capacitaría a la persona que hubiese llegado a dominar el sistema a descifrar por entero, o por lo menos a interpretarla sin riesgo de ambigüedades, la definición de cada término derivado. La única razón por la que Leibniz no se sentía del todo satisfecho con este procedimiento era su esperanza de dar con un sistema en que los propios términos primitivos resultasen inteligibles sin ayuda de un diccionario, esto es, un tipo de escritura pictórica que fuese no sólo independiente del lenguaje hablado (como lo son los caracteres chinos) sino también muy fácil de aprender [76]. Mas, cualquiera que fuese la opinión del propio Leibniz, el caso es que un sistema semejante no permitiría la expresión de complejidades que excedan de un ámbito sumamente restringido. Consideremos, por ejemplo, el significado de un término corriente como «abuelo». Se trata como es obvio de un término complejo, al que difícilmente habría intentado Leibniz asignarle un número primo en su sistema; pero no es, sin embargo, la noción de una cosa que apareje la conjunción de dos o más atributos. Cuando decimos que X es abuelo, queremos decir que hay dos personas Y y Z tales que X es padre de Y e Y es padre de Z. Tendríamos así lo que podría llamarse la segunda potencia de una relación diádica, asimétrica e intransitiva. Mas Leibniz no podía encajar en su esquema esa noción, pues nunca concedió a las relaciones la importancia debida.

(4) Hemos visto que Leibniz estaba interesado en la composición de una enciclopedia porque esperaba que una colección sistemática del conocimiento humano haría posible la construcción de una *characteristica uni-*

74 Descartes, *Oeuvres* (ed. Adam et Tannery), I, p. 76.
75 *P*, VII, p. 292.
76 *N.E.*, III, I, 1, y IV, VI, 2.

versalis. Pero existían también otras motivaciones más inmediatas de ese interés. En primer lugar, Leibniz era un hombre de vasta y versátil erudición, acuciado a la vez por el deseo de incrementar sus conocimientos y reducirlos a un sistema unitario. Sus obras y su correspondencia nos revelan la enorme riqueza de su curiosidad: lógica, matemática, física, ingeniería, biología, filología, historia, política, jurisprudencia, metafísica y teología, todas estas materias le eran familiares; y, en la mayor parte de ellas, su información igualaba por lo menos a la de los más competentes especialistas de la época. Desde su muerte nadie ha vuelto a aspirar a la concentración de una cultura de semejantes dimensiones en una sola persona, concentración que en nuestros días resulta punto menos que imposible. Los escritos de Leibniz muestran precisamente que una de las razones que con más fuerza le movían a la programación de una enciclopedia era la comprobación por su parte de una creciente tendencia hacia la fragmentación del saber [77]. En segundo lugar, Leibniz estaba convencido de que la salud de toda sociedad dependía del mantenimiento de un orden armonioso en el dominio intelectual, y pensó a veces en su enciclopedia como un medio capaz de contribuir al concierto entre las diversas escuelas. En especial, se hallaba interesado en la reconciliación de las iglesias, dedicando gran atención él mismo a la exposición de las doctrinas entre las que aspiraba reinase la concordia.

Al igual que sus otras ideas rectoras, el proyecto de una enciclopedia acompañó a Leibniz desde su juventud hasta su muerte, pero cobrando diversas conformaciones a lo largo de las diferentes etapas de su vida. Hacia los veinte años de edad pensaba en ella sólo como un *opus Photianum* o colección de extractos de los autores más acreditados en sus respectivas materias. Así, la lógica habría de ser extraída principalmente de la obra de Junge y la física lo sería de la de Hobbes [78]. Por estas fechas la matemática desempeñaba todavía un papel de segundo orden en su esquema, dado que Leibniz no había hecho aún grandes progresos en dicha ciencia. Pero insistía ya en que el material habría de ser presentado de acuerdo con el orden de su despliegue lógico. Con posterioridad la matemática adquiriría predominio en su pensamiento, y Leibniz no sólo le concedió mayor relieve en el esquema sino que concibió la idea de presentar a este último en la forma demostrativa de los *Elementos* de Euclides. Conforme sus planes fueron haciéndose más ambiciosos, llegó a proponerse la inclusión del conocimiento de la naturaleza acumulado por los especialistas pero no disponible hasta la fecha para los estudiosos en un texto unitario. Esta última idea podría haberle sido sugerida por alguno de los trabajos realizados al servicio de su patrón, el Elector de Hanover. Pero más tarde acabaría abandonando estos esquemas en favor de la idea de que la enciclopedia se limitase a incluir los primeros principios de las diversas ciencias, y al final de su vida limitaría aún más su proyecto hasta reducirlo a la presentación de una concepción unificada del mundo, a un tiempo científica y religiosa. Su tratado *Principes de la nature et de la grâce*, así como su *Monadologie*, fueron escritos con este propósito.

La planificación de la enciclopedia se vio usualmente asociada en el pensamiento de Leibniz a planes más concretos para la investigación co-

77 *P*, VII, p. 160.
78 Couturat, *La Logique de Leibniz*, pp. 570-71.

operativa por parte de las academias literarias o científicas. En diversas ocasiones envió propuestas a la Royal Society de Londres y a los reyes Luis XIV de Francia, Federico I de Prusia y Pedro el Grande de Rusia. Con el rey de Prusia obtuvo algún éxito, pues su iniciativa condujo a la fundación de la Academia Prusiana de la que fue su presidente vitalicio. Pero, por regla general, las respuestas a sus proposiciones no fueron muy alentadoras, y en los últimos años de su vida hubo de sobrevenirle una cierta desilusión. Había esperado entrar en relación con Jorge I de Inglaterra, pero se le ordenó permanecer en Hanover, probablemente a causa de la disputa acerca del descubrimiento del cálculo diferencial. Cuando murió, eran escasas las perspectivas de que la creación de un colegio de *illuminati* como el deseado por Leibniz pudiera contribuir a perfeccionar la ciencia y asegurar la civilización.

(5) Los proyectos para la enciclopedia sólo contribuyeron al desenvolvimiento de la teoría lógica de Leibniz en la medida en la que llevaron a pensar en la posibilidad de organizar el conocimiento a la manera de un sistema deductivo. Pero sus reflexiones sobre el método científico fueron de la mayor importancia para su lógica. Como Bacon y Descartes antes que él, creía posible delinear un procedimiento para la rápida expansión del conocimiento, escribiendo en ocasiones como si la tarea de investigación requerida a estos efectos pudiera ser completada en su época y divulgada a todos los hombres por una orden de misioneros (*Ordo Pacidianorum* o *Societas Theophilorum*) dedicada a la consecución de dicho fin [79]. Como puede pensarse, uno de los ingredientes de su mentalidad era ese misticismo que hace a los hombres confiar en la consumación milenaria de la historia. Cuando escribió su *De Arte Combinatoria,* había ya concebido la idea de una lógica de la invención o del descubrimiento, idea que en su obra posterior habría de convertirse en el tema preponderante bajo el que articular todos sus restantes intereses. Donde más claramente puede apreciarse esa preponderancia es en la colección de fragmentos relativos a la Ciencia General, esto es, la ciencia del método, a la que planeó dedicar una obra bajo el pseudónimo de «Guilielmus Pacidius» [80]. Uno de sus fragmentos, del que reproducimos a continuación una pequeña selección, reviste especial interés por mencionar los múltiples y variados intereses de Leibniz y permitirnos apreciar a través de su estilo qué clase de hombre era:

«Guilielmi Pacidii

PLUS ULTRA,

sive initia et specimina Scientiae Generalis de instauratione et augmentis scientiarum ac de perficienda mente rerumque inventione ad publicam felicitatem.

1. Rationes quae autorem ad scribendum impulerunt, ubi et cur nomen dissimulavit. Magnorum principum familiaritas et cogitationes concordes...

7. De scientiarum instauratione, ubi de Systematibus et Repertoriis et de Encyclopaedia demonstrativa condenda. De linguis et Grammatica rationali.

8. Elementa veritatis aeternae et de arte demonstrandi in omnibus disciplinis ut in Mathesi.

---

79 *O*, pp. 3-8.
80 De *Pax Dei: O*, p. 4.

9. De novo quodam Calculo generali cujus ope tollantur omnes disputationes inter eos qui in ipsum consenserint et Cabbala sapientium.
10. De Arte Inveniendi.
11. De Synthesi seu Arte combinatoria.
12. De Analysi.
13. De Combinatoria speciali seu scientia formarum sive qualitatum in genere sive de simili et dissimili.
14. De Analysi speciali seu scientia quantitatum in genere seu de magno et parvo.
15. De Mathesi generali ex duabus praecedentibus composita...
21. Dynamica seu de Motuum Causa seu de Causa et Effectu ac potentia et actu...
32. De Medicina. Medicina provisionalis...

De Jurisprudentia, ubi de Jure Naturae ac Gentium, itemque legibus positivis variis, imprimis de jure Romano et de jure Ecclesiastico. De jure publico ac re faeciali. De optima republica...

De concordia Christianorum et conversione Gentilium.

De societate Theophilorum» [81].

Al comienzo de sus discusiones sobre el método, Leibniz asumía la distinción usualmente convenida entre el método de exposición, que habría de ser sintético, y el método de descubrimiento, que habría de ser analítico [82]. Mas con el tiempo tal distinción acabaría desapareciendo de sus escritos, y es interesante reparar en las razones que motivaron su desaparición.

Para Leibniz, como para Hobbes, todas las verdades necesarias se hallaban garantizadas por las definiciones de sus términos y no había más axiomas absolutamente indemostrables que el principio de identidad [83]. Demostrar una proposición es hacer ver que el concepto-predicado se halla incluido en el concepto-sujeto, para lo que habremos de someter a ambos conceptos a un análisis tendente a esclarecer sus mutuas relaciones. Es decir, el procedimiento esencial para construir una demostración consiste en establecer una cadena de demostraciones por referencia a las cuales nos sea dado comprobar que la proposición a demostrar se reduce a una virtual identidad. Así, dadas las definiciones:

$$\begin{aligned} &(\text{I}) && 2 = 1 + 1 \\ &(\text{II}) && 3 = 2 + 1 \\ &(\text{III}) && 4 = 3 + 1, \end{aligned}$$

podremos aseverar:

$2 + 2 = 2 + 2$	por el principio de identidad
$= 2 + (1 + 1)$	por la definición (I)
$= (2 + 1) + 1$	
$= 3 + 1$	por la definición (II)
$= 4$	por la definición (III) [84].

Pero si todo razonamiento, silogístico o no, no es sino la sustitución de unas expresiones por otras que resultan equivalentes a ellas por definición, no

---

81 *P*, VII, p. 49.
82 *O*, p. 572.
83 *O*, p. 518; *P*, I, p. 188.
84 *N.E.*, IV, VII, 10. Leibniz, no obstante, no repara en que el tránsito de la segunda a la tercera línea descansa en la ley asociativa de la adición, esto es, la ley según la cual $x+(y+z)=(x+y)+z$, que a su vez requerirá ser demostrada.

importa en absoluto que partamos de una identidad y procedamos sintéticamente hasta llegar al *demonstrandum* en una serie de pasos, como en el ejemplo que se acaba de citar, o que partamos del *demonstrandum* y procedamos en una serie de pasos a reducirlo analíticamente a una identidad. La diferencia de sentido de uno y otro procedimiento no comporta ninguna diferencia de método; pues tanto en un caso como en otro habremos hecho uso de una cadena de definiciones, y el descubrimiento no consiste en otra cosa que en una determinada ordenación de estas últimas o, a un nivel más fundamental, en el examen de las posibles combinaciones de sus predicados.

Esta caracterización de la demostración es insatisfactoria por basarse en el supuesto de que en toda verdad afirmativa *praedicatum inest subiecto*. Como de costumbre, Leibniz está aquí dando por sentado que no hay otra complejidad que la resultante de una conjunción de atributos. La definición de un término se concibe como algo semejante a la factorización de un número; y la existencia de una conexión necesaria como algo semejante a la divisibilidad de un número, correspondiente al sujeto, por otro, correspondiente al predicado [85]. Cada término tendría, así, una adecuada definición consistente en su descomposición en factores primos o nociones elementales, si bien a los efectos de la demostración no siempre es necesario ir tan lejos, pudiendo detenernos antes y obtener de este modo diversas definiciones equivalentes de ese término, cada una de ellas apropiada en un contexto diferente de acuerdo con la propiedad del *definiendum* que se desee demostrar. Nosotros ya hemos visto que la complejidad puede engendrarse de otros modos que la simple conjunción de atributos, de donde se desprende que tal demostración no siempre necesita ni puede proceder a la manera que Leibniz suponía. Desde la muerte de Fermat en 1665, ningún matemático ha logrado demostrar su célebre «último teorema», esto es, la proposición de que no hay cuatro números naturales x, y, z, n mayores que 0 y tales que $x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2}$. Sería descabellado pretender obtener una decisión por medio de la simple explicitación de la expresión de acuerdo con una serie de definiciones iniciales. Pues, por más que los signos de la adición y la exponenciación puedan ser definidos por referencia a nociones más básicas, esas definiciones serán tales que no siempre podremos eliminar aquellos signos de una fórmula en que intervengan variables. Pero esta objeción se apoya en consideraciones que no podían habérsele ocurrido al propio Leibniz. Para hacernos cargo de su pensamiento tiene más interés considerar cómo trató de hacer frente a dos dificultades más inmediatas y obvias.

En primer lugar, resulta paradójico decir que todas las verdades necesarias dependen de definiciones instituidas por nosotros mismos. Leibniz admite de buen grado que es así, pero añade que el argumento carece de fuerza si se aplica a su teoría, ya que ésta —a diferencia de la de Hobbes— no considera a las definiciones como totalmente arbitrarias. Una definición real, en cuanto diferente de una puramente nominal, entraña para él la implícita aserción de la posibilidad de lo definido. Tal posibilidad no depende ni se halla establecida por nuestras convenciones relativas al uso de las palabras, y sin ella no podría haber demostración alguna [86]. Es

[85] *P*, VII, p. 292.
[86] *P*, VII, pp. 191-2; *M*, IV, p. 462.

correcto, por tanto, decir con los filósofos escolásticos que un axioma es evidente para quienquiera que comprenda los términos que lo integran; pero la comprensión de un término, esto es, la posesión de una idea que corresponda a dicho término, envuelve el reconocimiento de la posibilidad de lo por él significado [87].

Leibniz tiene razón al protestar contra el convencionalismo de Hobbes, pero su caracterización de lo que sea una definición real peca efectivamente de confusa. Pues está lejos de ser cierto que una expresión no pueda entrar a formar parte de una genuina demostración a menos de significar algo posible. En orden a probar que hay infinitos números primos sería perfectamente lícito comenzar diciendo «Supongamos que haya un número primo que sea el mayor de todos», para pasar luego a hacer ver que esta suposición encierra un absurdo por más que pueda habernos parecido razonable en un primer momento. Más aún, no está claro lo que pueda querer decir el término «posible» en un contexto semejante. Ya que, para Leibniz, una verdad necesaria es por lo visto aquella cuya negación habría de resultar formalmente contradictoria [88], parece natural presumir que el término «posible» tenga en él el significado de «libre de contradicción formal». Y en efecto, Leibniz nos dice que todos los términos auténticamente positivos designan composibles [89]. Pero si nada es imposible sino lo excluido por el principio de no-contradicción, ¿cómo explicar una sencilla afirmación verdadera del tipo de «A no es B»? No basta con decir, en la fraseología leibniziana, que la naturaleza de A incluye la característica de no ser B o no-B-dad. Pues una característica negativa no es ciertamente simple ni Leibniz pretendió decir nunca que lo fuera. Por otra parte, tampoco estaremos autorizados a decir que la naturaleza de A incluya una característica, como la C-dad, que sea incompatible con la B-dad aunque sin ser la negación de la anterior ni la conjunción de dicha negación con una o más características simples. Pues ello equivaldría a la admisión de que los términos auténticamente positivos pudieran ser incomposibles.

La segunda dificultad se refiere a la ciencia empírica. Leibniz pretende habernos ofrecido una teoría general del método, pero ¿cómo podría tener lo que nos dice acerca de la demostración alguna aplicación en el dominio de la física? Leibniz sostiene audazmente que todas las proposiciones verdaderas, incluidas las proposiciones singulares, son virtualmente identidades, por más que sólo Dios pueda reconocerlas *a priori* como tales. Hay ciertamente una distinción entre las verdades de razón, que rigen para todos los mundos posibles, y las verdades de hecho, que son en algún sentido contingentes porque dependen de la voluntad divina y sólo rigen para el mundo tal y como éste es actualmente. Pero el principio de razón suficiente nos asegura que las propias verdades de hecho son necesarias en la medida en que nada acontece sin un fundamento [90]. Así pues, en *toda* proposición verdadera el concepto-sujeto contendrá al concepto-predicado; y la diferencia entre verdades de razón y verdades de hecho vendrá sencillamente a reducirse a la imposibilidad de demostrar estas últimas sin referencia a aquella superioridad del mundo actual que determinó a Dios a preferirlo

87 *P*, III, p. 443; *N.E.*, II, XXXII.
88 *P*, III, p. 400.
89 *P*, VII, p. 195. Cf. *M*, III, p. 574.
90 *P*, VII, p. 309.

de entre todos los mundos posibles. Leibniz llega a sugerir en ocasiones que el estudio de la *ars combinatoria* podría ayudarnos a determinar *a priori* cuáles sean las combinaciones llamadas a cobrar realidad, puesto que el más vasto sistema de composibles será en definitiva el que contenga una mayor perfección [91]. Pero nunca trató de deducir cosa alguna valiéndose de este procedimiento, como no fueran tesis metafísicas insusceptibles de ser empíricamente contrastadas. Lo más frecuente es que estuviese bien dispuesto a considerar el descubrimiento en el orden de la naturaleza como algo semejante a la resolución de un criptograma [92]. Las meras generalizaciones empíricas no bastan para que haya ciencia, y ya que en un contexto semejante no podemos remontarnos a los primeros principios por el método regresivo de Pappus (esto es, no podemos decir que sólo haya un sistema de posibilidades compatible con los hechos de experiencia), no tendremos otro recurso que echar mano de hipótesis. Estas serán probables en la medida en que (I) sean simples y expliquen un gran número de fenómenos mediante un reducido número de postulados, y (II) nos permitan predecir nuevos fenómenos o dar cuenta de nuevas observaciones [93].

Lo que Leibniz nos dice acerca de las hipótesis es altamente interesante, pero su caracterización general de la ciencia natural es insatisfactoria porque no deja lugar para el conocimiento en que ésta ha de basarse, esto es, el conocimiento obtenido por medio de la observación. Como Spinoza, Leibniz adhiere a la ininteligible doctrina de que la experiencia no es más que pensamiento confuso y habla de la naturaleza como si se tratara de un fragmento de la matemática pura que hubiéramos de intentar reconstruir a partir de las piezas que lo integran. En un lugar llega a decirnos: «Mi metafísica es por así decirlo toda ella matemática, o lo podría llegar a ser» [94]. Pero aquí no necesitamos detenernos en las dificultades que este punto de vista entraña. Para nuestros propósitos, la noción leibniziana de una matemática fundamental reviste bastante más importancia que su superestructura.

3. El «Calculus de Continentibus et Contentis» leibniziano.

Al pasar revista a los intereses que inspiraron el pensamiento de Leibniz, nos hemos referido abiertamente a los defectos e incluso los absurdos de algunas de las tesis mantenidas sin discusión por nuestro autor, lo que quizá lleve al lector a preguntarse por qué lo hemos calificado como una de las cumbres de la historia de la lógica. En lo que sigue, pues, habremos de esforzarnos por presentar con el mayor rigor posible la nueva concepción de la lógica que derivó de todas esas consideraciones. Leibniz no logró nunca pergeñar una formulación que le satisficiese enteramente, por lo que nuestra caracterización se verá obligada a conjugar toda una serie de formulaciones fragmentarias en orden a componer una visión unificada de semejante enfoque innovador.

Aunque sirviéndose según las ocasiones de una terminología diferente

---

91 *Discours de métaphysique*, § 6; *N.E.*, IV, II, 7.
92 *N.E.*, IV, XII, 13.
93 *P*, I, pp. 195-6.
94 *M*, II, p. 258.

para aludir a ella, parece estar en claro que Leibniz había concebido la posibilidad de elaborar una ciencia básica que se asemejaría a la matemática en ciertos aspectos pero incluiría también la lógica tradicional y algunos otros estudios poco o nada evolucionados hasta la fecha. Habiendo reparado en que la lógica, con sus términos, proposiciones y silogismos, guardaba una formal analogía con el álgebra, con sus letras, ecuaciones y transformaciones [95], trató de presentar a la primera como un cálculo y bautizó a veces a su nueva ciencia con el rótulo de *mathesis universalis* o matemática universal. Este rótulo no sugiere en modo alguno que la lógica hubiera de dejarse absorber por la matemática, tal y como ésta era entendida por aquel entonces. Pues la matemática vigente únicamente se ocupaba de relaciones de cantidad; y, aunque Descartes había desarrollado el álgebra de Vieta de manera que pudiera ocuparse de nociones derivadas de la geometría, su estudio estaba lejos de constituir —contra lo que los cartesianos suponían— el más fundamental de los géneros de matemática concebibles. En efecto, eran posibles cálculos que versaran sobre relaciones abstractas o formales de tipo no cuantitativo, como la semejanza o la desemejanza, la congruencia o la inclusión: «Non omnes formulae significant quantitatem, et infiniti modi calculandi excogitari possunt» [96]. Lo que Leibniz tenía *in mente* a este respecto era una teoría general de las estructuras encargada de proveer la sintaxis de su *characteristica universalis*, teoría de la que escribiría *Doctrina Formarum continet Logicam et Combinatoriam* [97]. Dicha teoría comprendería la teoría de las series y cualquier otra forma de ordenación, y serviría de fundamento a las restantes ramas de la matemática tales como la geometría y el cálculo de probabilidades [98]. Pero, lo más importante de todo, constituiría al mismo tiempo un instrumento heurístico; pues —según su expresa declaración— fue la *ars combinatoria* la que hizo posibles sus propios descubrimientos e invenciones en el dominio de la matemática (como, por ejemplo, el cálculo infinitesimal y el desarrollo serial de $\pi/4$) y la ingeniería (como, por ejemplo, la máquina de calcular exhibida ante la Royal Society en 1673) [99]. Restrospectivamente contemplados, los esfuerzos de Leibniz parecen encaminarse a la instalación de su teoría en ese grado de generalidad que luego encontraremos en la teoría de los grupos de Galois y la moderna álgebra abstracta, de las que incluso pueden rastrearse insinuaciones en su obra. Pero de los *infiniti modi calculandi* cuya posibilidad reconocía sólo llegó a elaborar un par de ellos con algún detalle: el primero, un cálculo de la identidad y la inclusión; el segundo, un cálculo geométrico de la semejanza y la congruencia. Este último constituye un ensayo de tratamiento de la estructura geométrica sin el recurso a coordenadas, y anticipa la *Ausdehnungslehre* de Grassmann (1844) en medida comparable a como el otro cálculo anticipa el *Mathematical Analysis of Logic* de Boole (1847). Por nuestra parte, vamos a limitar nuestra consideración al intento leibniziano de elaborar un cálculo de la identidad y la inclusión. Dicho cálculo se aplica a una parte del dominio cubierto por la lógica tradicional e ilustra de manera relativamente simple lo que perseguía Leibniz al hablar de una teoría general de las formas.

---

95 *M*, VII, p. 54.
96 *O*, p. 556.
97 *O*, p. 525.
98 *M*, IV, p. 460; *P*, VII, p. 298.
99 *M*, V, p. 89; *P*, I, p. 58.

Entre los trabajos de Leibniz se encuentran numerosos proyectos diferentes de un cálculo de inclusión. En un principio, Leibniz sin duda pretendía producir algo de un alcance superior al de la lógica tradicional, puesto que en un lugar nos dice que la teoría de la inclusión había sido parcialmente estudiada por Aristóteles en sus *Primeros Analíticos* [100]. Pero, por más que se centró en su confección a lo largo de los años 1679, 1689 y 1690, el caso es que ni siquiera logró rematar un cálculo que abarcase en su integridad a la teoría del silogismo. Lo que sí logró, en cambio, fue presentar varios fragmentos de ese cálculo en términos abstractos, esto es, de modo tal que admitiesen interpretaciones diversas, pues no tardó en reparar en el isomorfismo, o identidad de forma, existente entre ciertas aserciones correspondientes al dominio de la lógica y ciertas otras aserciones que se podrían hacer en geometría acerca de las relaciones entre líneas, áreas y volúmenes, sirviéndose con frecuencia de ilustraciones geométricas del estilo de las que acabarían por asociarse usualmente al nombre de Euler. Asimismo reparó en que el cálculo que deseaba elaborar se halla caracterizado por dos principios específicos, que cabría expresar por medio de las fórmulas $ab=ba$ y $aa=a$. La siguiente definición recoge ambos principios: «Calculus de continentibus et contentis est species quaedam calculi de combinationibus, quando scilicet nec ordinis rerum nec repetitionis ratio habetur» [101].

La primera tentativa de elaboración de nuestro cálculo se basaba en la analogía entre conceptos y números compuestos sobre la que ya hemos llamado la atención [102]. Cada término simple había de ser representado por un número primo, en tanto cada término compuesto había de serlo por un producto de primos. Una proposición afirmativa universal sería entonces verdadera si el número-sujeto resulta divisible por el número-predicado, esto es si $S=yP$ o $S/P=y$, donde y sea un número entero; y una proposición afirmativa particular sería verdadera si $xS=yP$ o $S/P=y/x$. Este esquema, sin embargo, no dejaba lugar a las proposiciones negativas, lo que hacía necesario representar cada uno de los términos por medio de dos números, el uno positivo y el otro negativo [103]. Si el número positivo correspondiente a un término dado poseyera un factor común con el número negativo correspondiente a cualquier otro término, esos dos términos resultarían mutuamente excluyentes, con lo que quedaría asegurada la verdad de una proposición negativa universal. Leibniz acabó declarándose insatisfecho de este complicado sistema, pero no llegó nunca a abandonar su teoría de que el concepto-predicado de una proposición verdadera ha de hallarse contenido en el concepto-sujeto de la misma. Como veremos, desarrolló un cálculo susceptible de ser interpretado en extensión, esto es, como una serie de enunciados acerca de relaciones entre clases, pero concedió siempre primacía a la interpretación intensional según la cual el significado del término-predicado se halla contenido en el significado del término-sujeto, como por ejemplo la animalidad en la humanidad. Y retuvo invariable el principio de que si A contiene a B, entonces A=yB.

En una ulterior tentativa, preservada en su *Specimen Calculi Universalis* y los *Addenda* al mismo, Leibniz estipulaba las siguientes proposiciones primitivas y principios:

---

100 *M*, VII, p. 261.
101 *O*, p. 256.
102 *O*, p. 54.
103 *O*, p. 70.

«Proposiciones verdaderas de suyo: (1) *A es A;* (2) *AB es A;* (3) *A no es no-A;* (4) *No-A no es A;* (5) *Lo que no es A es no-A*; (6) *Lo que no es no-A es A.*

Consequentia de suyo verdadera: *A es B y B es C, luego A es C.*

Principios del cálculo: (1) Cualquier cosa que afecte a ciertas letras indeterminadas (*in literis quibusdam indefinitis*) se ha de entender que reza (*conclusum*) para cualesquiera otras que se hallen sujetas a las mismas condiciones: por ejemplo, ya que *AB es A* es verdadera, *BC es B* será asimismo verdadera. (2) La transposición de letras en el mismo término no comporta ninguna diferencia: esto es, *AB* es equivalente a *BA*. (3) La repetición de una misma letra en un término dado es redundante: así, en *B es AA*. (4) Una proposición puede ser construida a partir de un cierto número de proposiciones mediante la combinación de todos los sujetos en un único sujeto y la combinación de todos los predicados es un único predicado: por ejemplo, de *A es B* y *C es D* y *E es F* podremos obtener *ACE es BDF*. (5) De cualquier proposición cuyo predicado se halle compuesto de diversos términos es posible formar varias proposiciones, cada una de las cuales posea el mismo sujeto de la proposición originaria mas cuyo predicado sea una parte del predicado de esta última: por ejemplo, dada *A es BCD*, tendremos *A es B* y *A es C* y *A es D*» [104].

Para el subsiguiente desarrollo de su cálculo, Leibniz trataría de expresar los cuatro tipos aristotélicos de proposiciones generales por referencia a la combinación de sus atributos, lo que impone la consideración de los esquemas:

Tipo	*Primer esquema*	*Segundo esquema*
Todo A es B	A non-B est non-ens	AB = A
Algún A no es B	A non-B est ens	AB ≠ A
Ningún A es B	AB est non-ens	AB ≠ AB ens
Algún A es B	AB est ens	AB = AB ens.

Ens y *non-ens* podrían acaso traducirse en este punto por «algo» y «nada», pero está claro que Leibniz desea dejar la puerta abierta a una interpretación en la que *ens* signifique *aliquid in regione idearum*, esto es, una posibilidad. En sus *Difficultates Quaedam Logicae* [105], en que intervienen ambos esquemas, reconoce la imposibilidad de inferir correctamente «Algo humano ríe» a partir de «Todo lo que ríe es humano» si se supone que la premisa enuncia una relación entre conceptos y la conclusión una cuestión de hecho contingente, pero mantiene que la conversión *per accidens* de un enunciado universal afirmativo es igualmente válida para una interpretación en términos de conceptos que para una interpretación en términos de individuos reales, siempre que en la interpretación conceptual (*a*) los términos simples envueltos en el enunciado universal representen posibilidades (tal y como en la interpretación *secundum individua* habrían de representar, o tener aplicación a, algo actual) y (*b*) el enunciado particular resultante de la conversión se entienda referido a la posibilidad de una determinada combinación de características, más bien que a la existencia de un ejemplo concreto de la misma. Ya que Leibniz sostiene en general que el predicado de una proposición afirmativa se halla contenido en el sujeto, se inclina de manera natural por la interpretación intensional, interpretación que cree poder apoyar en una buena autoridad: «Aristóteles mismo parece haber seguido la vía de las ideas *(viam idealem);* pues nos dice que animal se halla contenido en hombre, esto es, una noción en la otra, aunque por lo demás re-

104 *P*, VII, p. 224. Hemos abreviado la exposición de Leibniz y procedido a sustituir las letras minúsculas por mayúsculas.

105 *P*, VII, p. 211.

sulte más usual decir que los hombres se hallan contenidos en (esto es, entre) los animales».

Leibniz tiene razón al confiar en la posibilidad de construir un simbolismo susceptible de ser interpretado tanto intensional cuanto extensionalmente, pero yerra al sostener que una expresión de la forma «Algún A es B» —tal y como ésta es ordinariamente usada— pueda con propiedad interpretarse como aserción de la compatibilidad de dos características, equivocándose asimismo cuando afirma que *ens* ha de ser tratado como un término envuelto en todos los demás *(in omnibus tacite assumitur terminum ingredientem esse ens)*. El que una característica posea aplicación constituye una característica de segundo orden, y otro tanto sucede con el que una característica sea tal que pueda poseer aplicación; pero en ninguno de ambos casos cabe en rigor pensar en conjugar la característica de segundo orden con la de primer orden. Y esto es precisamente lo que Leibniz cree poder llevar a cabo en el trabajo que estamos considerando. Su error resulta más claramente apreciable en el segundo de los esquemas antes transcritos en que trata de presentar los enunciados correspondientes a los cuatro patrones tradicionales como ecuaciones o inecuaciones, pero se halla también implícito en el primer esquema.

Al volver a la carga años más tarde, Leibniz lograría realizar algún progreso en la elaboración de su cálculo, pero sólo a costa de abandonar toda referencia a las proposiciones existenciales. Por la misma época introdujo una pequeña modificación en su notación. En lugar de la yuxtaposición de letras, que en álgebra significa la multiplicación, recurre ahora al signo de adición para expresar la combinación de conceptos, si bien de vez en vez reincide en su antigua práctica en el curso de algunos de sus trabajos. La innovación no entraña ningún cambio radical de perspectiva, pero sugiere la posibilidad de introducir la operación inversa de sustracción. En su *Non Inelegans Specimen Demonstrandi in Abstractis* [106], Leibniz afirma que A−B=C si, y sólo si, A=B+C y B y C no poseen nada en común. La segunda cláusula de la condición es esencial, ya que, si B y C poseyesen algo en común, la operación de sustracción no arrojaría un resultado unívoco. Por ejemplo, no sólo podríamos obtener A−(L+M)=N, sino también A−(L+M)=M+N, toda vez que L+M+N=L+M+M+N, de acuerdo con el principio de que la repetición de una letra en el seno de un término complejo no comporta ninguna diferencia. Leibniz nos advierte de que, aplicada a los conceptos, la sustracción no equivale a la negación. Pues Hombre no Racional=Imposible, pero Hombre−Racional=Bruto [107]. Parece, por lo tanto, que al aseverar A−A=nil está entendiendo por «nil» la ausencia de toda determinación, esto es, lo que él mismo habría expresado mediante el numeral 1 al tratar de representar la combinación de conceptos valiéndose de la multiplicación numérica.

El intento de manejar el signo − junto con el signo + en un cálculo donde A+A=A se acabó revelando infructuoso, por lo que Leibniz lo abandonaría en su última y más lograda tentativa. En ella continúa sirviéndose del signo de adición para la combinación de conceptos, pero encerrándolo en un círculo con el fin de indicar que no ha de ser tomado en su

106 *P*, VII, p. 228.
107 *P*, VII, p. 233.

sentido numérico ordinario. El cálculo resultante es el más evolucionado de cuantos llegó Leibniz a esbozar, por lo que vamos a reproducirlo con algún detalle:

«DEF. 1. Los términos son los mismos o coincidentes cuando pueden ser sustituidos entre sí dondequiera que gustemos sin que ello altere la verdad de un enunciado. A=B significa que A y B son idénticos.

DEF. 2. Términos que no son los mismos, esto es, términos que pueden ser sustituidos el uno por el otro, son diferentes. A≠B significa que A y B son diferentes.

PROP. 1. *Si* A=B, *entonces también* B=A. Pues ya que A=B (por hip.), se sigue (por la def. 1) que en el enunciado A=B (verdadero por hip.) A puede ser sustituido por B y B por A; de donde obtenemos B=A.

PROP. 2. *Si* A≠B, *entonces también* B≠A. De lo contrario, tendríamos B=A, y en consecuencia(por la prop. precedente) A=B, lo que contrariaría la hipótesis inicial.

PROP. 3. *Si* A=B *y* B=C, *entonces* A=C. Pues si en el enunciado A=B (verdadero por hip.) sustituimos B por C (por la def. 1, ya que B=C), el enunciado resultante ha de ser verdadero.

PROP. 4. *Si* A=B *y* B≠C, *entonces* A≠C. Pues si en la proposición B≠C (verdadera por hip.) sustituimos B por A, tendremos (por la def. 1, ya que A=B) la proposición verdadera A≠C.

DEF. 3. Decir que A se halla contenido en L, o que L contiene a A, es lo mismo que decir que puede hacerse coincidir L con una pluralidad de términos conjuntamente tomados, uno de los cuales sea A. B⊕N=L significa que B se halla contenido en L y que B y N, conjuntamente tomados, componen o constituyen L. Lo mismo rezaría para el caso de un número superior de términos.

AXIOMA 1. B⊕N=N⊕B.

POSTULADO. Cualquier pluralidad de términos, como A y B, puede ser agrupada de manera que componga un único término A⊕B.

AXIOMA 2. A⊕A=A.

PROP. 5. *Si* A *se halla contenido en* B *y* A=C, *entonces* C *se halla contenido en* B. Pues en la proposición A se halla contenido en B (verdadera por hip.), la sustitución de A por C (por la def. 1, ya que por hip. A=C) arroja C se halla contenido en B.

PROP. 6. *Si* C *se halla contenido en* B *y* A=B, *entonces* C *se halla contenido en* A. Pues en la proposición C se halla contenido en B, la sustitución de B por A (ya que A=B) arroja C se halla contenido en A.

PROP. 7. A *se halla contenido en* A. Pues A se halla contenido en A⊕A (por la def. 3). Luego (por la prop. 6) A se halla contenido en A.

PROP. 8. *Si* A=B, *entonces* A *se halla contenido en* B. Pues (por la precedente) A se halla contenido en A, de donde (por hip.) A se halla contenido en B.

PROP. 9. *Si* A=B, *entonces* A⊕C=B⊕C. Pues si en A⊕C=A⊕C (verdadera de suyo) sustituimos A por B en el segundo miembro, obtendremos A⊕C=B⊕C.

ESCOLIO. Esta proposición no admite conversión, y mucho menos las dos que siguen.

PROP. 10. *Si* A=L *y* B=M, *entonces* A⊕B=L⊕M. Pues ya que B=M, A⊕B= =A⊕M (por la precedente); y, reemplazando la segunda A por L (ya que por hip. A=L), tendremos A⊕B=L⊕M.

PROP. 11. *Si* A=L *y* B=M *y* C=N, *entonces* A⊕B⊕C=L⊕M⊕N. Etcétera.

PROP. 12. *Si* B *se halla contenido en* L, *entonces* A⊕B *se halla contenido en* A⊕L. Pues L=B⊕N (por la def. 3) y A⊕B se halla contenido en B⊕N⊕A (por la misma), esto es, A⊕B se halla contenido en L⊕A.

ESCOLIO. Esta proposición no admite conversión.

PROP. 13. *Si* L⊕B=L, *entonces* B *se halla contenido en* L. Pues B se halla contenido en L⊕B (por la def. 3) y L⊕B=L (por hip.); de donde (por la prop. 6) B se halla contenido en L.

PROP. 14. *Si* B *se halla contenido en* L, *entonces* L⊕B=L. Pues si B se halla contenido en L, entonces (por la def. 3) L=B⊕P. De donde (por la prop. 9) L⊕B= =B⊕P⊕B, que (por el ax. 2)=B⊕P, que (por hip.)=L.

PROP. 15. *Si* A *se halla contenido en* B *y* B *se halla contenido en* C, *entonces* A *se halla contenido en* C. Pues A se halla contenido en B (por hip.), de donde A⊕L= =B (por la def. 3). De modo semejante, ya que B se halla contenido en C, B⊕M=C; y, reemplazando B por A⊕L en este enunciado (ya que hemos visto que se trata de términos coincidentes), tendremos A⊕L⊕M=C. Luego (por la def. 3) A se halla contenido en C.

COROLARIO. *Si* A⊕N *se halla contenido en* B, *entonces* N *se halla contenido en* B. Pues N se halla contenido en A⊕N (por la def. 3).

ESCOLIO. Esta proposición no admite conversión, y mucho menos la siguiente.

PROP. 16. *Si* A *se halla contenido en* B *y* B *en* C *y* C *en* D, *entonces* A *se halla contenido en* D. Etcétera.

PROP. 17. *Si* A *se halla contenido en* B *y* B *se halla contenido en* A, *entonces* A=B. Pues si A se halla contenido en B, entonces A⊕N=B (por la def. 3). Pero B se halla contenido en A (por hip.), luego A⊕N se halla contenido en A (por la prop. 5). Luego (por el corol. a la prop. 15) N se halla contenido en A. Luego (por la prop. 14) A=A⊕N, esto es, A=B.

PROP. 18. *Si* A *se halla contenido en* L *y* B *se halla contenido en* L, *entonces* A⊕B *se halla contenido en* L. Pues, ya que A se halla contenido en L (por hip.), A⊕M=L (por la def. 3). De modo semejante, ya que B se halla contenido en L, B⊕N=L. Agrupando conjuntamente dichos términos, tendremos (por la prop. 10) A⊕M⊕B⊕N=L⊕L. Luego (por el ax. 2) A⊕M⊕B⊕N=L. Luego (por la def. 3) A⊕B se halla contenido en L.

PROP. 19. *Si* A *se halla contenido en* L y B *se halla contenido en* L y C *se halla contenido en* L, *entonces* A⊕B⊕C *se halla contenido en* L. Etcétera.

ESCOLIO. Es obvio que estas dos proposiciones, y otras del mismo género, pueden ser convertidas.

PROP. 20. *Si* A *se halla contenido en* M *y* B *se halla contenido en* N, *entonces* A⊕B *se halla contenido en* M⊕N. Pues A se halla contenido en M (por hip.) y M se halla contenido en M⊕N (por la def. 3). Luego (por la prop. 15) A se halla contenido en M⊕N. De modo semejante, ya que B se halla contenido en N y N en M⊕N, también (por la prop. 15) A⊕B se hallará contenido en M⊕N.

ESCOLIO. Esta proposición no puede ser convertida, ni mucho menos la siguiente.

PROP. 21. *Si* A *se halla contenido en* M *y* B *se halla contenido en* N *y* C *se halla contenido en* P, *entonces* A⊕B⊕C *se halla contenido en* M⊕N⊕P. Etcétera.

ESCOLIO A LA DEF. 3. Decimos que el concepto genérico se halla contenido en el específico, los individuos de la especie en (esto es, entre) los del género, la parte en el todo y hasta lo indiviso en el continuo, como un punto en una línea aunque no sea parte de ella. De modo semejante, el concepto del atributo o predicado se halla contenido en el concepto del sujeto. Y, en líneas generales, dicha noción es susceptible de la más vasta aplicación... Para nada nos interesa aquí cuál pueda ser la [especial] manera en que las cosas contenidas se relacionan unas con otras ni con las cosas que las contienen. De suerte que nuestras demostraciones se aplican asimismo a aquellas cosas que componen algo en sentido distributivo, como la totalidad de las especies componen el género... Una misma cosa admite composiciones diferentes si las cosas que la componen son a su vez compuestas. Y si la resolución de una cosa en sus componentes pudiera ser llevada al infinito, los modos de composición serían de hecho infinitos. Así pues, toda síntesis y todo análisis dependen de los principios aquí expuestos.

ESCOLIO A LOS AXIOMAS 1 y 2. Ya que la teoría general de las formas (*speciosa generalis*) no es sino en la presentación de las combinaciones que cabe efectuar por medio de los símbolos y su manipulación, y dado que las leyes combinatorias que podrían descubrirse son diversas, serán también diversos los modos de computación que de ellas se originen. En este punto, por de pronto, para nada va a interesarnos la teoría de las variaciones que consisten en simples cambios de orden, de suerte que A⊕B equivaldrá para nosotros a B⊕A. Y tampoco tomaremos en cuenta la repetición, de suerte que A⊕A equivaldrá a A para nosotros. Así, cuandoquiera que la vigencia de estas dos leyes que se acaban de citar se halle asegurada, el presente cálculo será susceptible de aplicación. Es obvio que podremos servirnos de él en la composición de los conceptos absolutos, en que no intervienen leyes de orden ni cuenta la repetición; así, decir "cálido y reluciente" será lo mismo que decir "reluciente y cálido", y decir "fuego ardiente" o "nívea blancura", al modo de los poetas, resultará pleonástico... Lo mismo ocurrirá cuando se diga que ciertas cosas se hallan contenidas en ciertas otras. Pues la adición real de lo mismo es redundante... De acuerdo con ello, esta adición real es denotada aquí mediante ⊕, tal y como la adición de magnitudes se denota mediante +» [108].

Los dos últimos escolios incluidos en la cita muestran el interés de Leibniz por asegurar el carácter abstracto de su cálculo, que es lo que habrá de hacer posible la diversidad de interpretaciones del mismo. Leibniz tenía la vista primordialmente puesta en la combinación de atributos, pero ilustró muchos de sus teoremas valiéndose de líneas contenidas en otras líneas y reconoció expresamente la aplicabilidad de todos ellos a la constitución de clases. Es importante reparar, sin embargo, en que el sentido del símbolo ⊕ varía de acuerdo con el género de interpretación dada a las letras A, B, C, etc. Así, cuando Leibniz está pensando en atributos, entiende ⊕ como un símbolo de la conjunción, en tanto que cuando está pensando en clases lo entiende como un símbolo de la disyunción. Pues si decimos que la clase de los hombres se halla contenida en la clase de los animales, lo que queremos decir es que cualquier cosa que sea un animal será un hombre *o* un caballo *o* un perro, etcétera. Y el sentido de «hallarse contenido en» varía de análoga manera. Decir que un atributo se halla contenido en otro es decir que el primero es implicado por el segundo, mientras que decir que una clase se halla contenida en otra es decir que la primera es una subclase de la segunda.

Si reemplazásemos la expresión «hallarse contenido(a) en» del cálculo de Leibniz por un símbolo artificial, pongamos por caso ⊣, obtendríamos un cálculo más general aún que admitiría dos interpretaciones adicionales, la una intensional (en términos de atributos) y la otra extensional (en términos de clases). En el cuadro que sigue se recogen las cuatro interpretaciones posibles, dos de ellas para los atributos y otras tantas para las clases:

A, B, C, etc.	⊕	⊣
atributos	conjunción	es implicado por
atributos	disyunción	implica
clases	conjunción	es una superclase de
clases	disyunción	es una subclase de

108 Este fragmento —publicado por Gerhardt en *P*, VII, p. 236— carece de título. La versión arriba transcrita abrevia, introduciendo algunas modificaciones de menor cuantía, la traducción de C. I. Lewis en su *Survey of Symbolic Logic*, p. 379. Por nuestra parte hemos reemplazado el símbolo ∞ de Leibniz por el moderno signo de igualdad, insertando el símbolo ⊖ en aquellos lugares en que había sido omitido en el escolio final. Por lo demás, el simbolismo no ha sufrido otras alteraciones. Los pasajes suprimidos encierran tres problemas y un cierto número de definiciones, comentarios y ejemplos no requeridos para la derivación formal de los teoremas aquí reproducidos.

La primera y la cuarta interpretación, en que el símbolo —⊣ podría traducirse por «hallarse contenido(a) en», son las que Leibniz explicitó de hecho. En un fragmento anterior de su proyecto de un cálculo de inclusión, había insinuado la posibilidad de decir que el consecuente de una proposición condicional se halla contenido en el antecedente [109]. En la exposición del cálculo que ahora consideramos no alude a este punto, pero está claro que podemos interpretar sus fórmulas como aserciones acerca de relaciones entre proposiciones. Pues todo lo que tendríamos que hacer para ajustarlas a esa interpretación sería escribir «proposiciones» en vez de «atributos» en las dos primeras líneas del cuadro precedente. Y nada hay de artificioso ni forzado en semejante enfoque de las mismas, ya que, al decir que una proposición *implica* otra, estamos en realidad haciendo uso de una metáfora que descansa en el reconocimiento de una formal semejanza entre dicha relación lógica y la relación de inclusión espacial.

En cuanto a las ilustraciones geométricas a que Leibniz recurre cuando nos dice que unas líneas se hallan contenidas en otras, constituyen un caso especial de la cuarta interpretación antes enumerada, ya que una línea puede considerarse como una clase de puntos. Mas si, con todo, el final de la primera oración del escolio a la definición 3 pretende sugerir la aplicabilidad del cálculo a la inclusión de los puntos en una línea, se trata a no dudarlo de un craso error. Pues el sentido en el que un individuo se halla contenido en una clase como miembro de ésta es por completo diferente del sentido en que una clase se halla contenida en otra clase a título de subclase de la misma. Y una y otra relación están, en rigor, lejos de revestir las mismas propiedades lógicas. Así, del hecho de que A sea miembro de B y B sea miembro de C no se sigue que A sea miembro de C. Por ejemplo, nosotros podemos decir que Lord Tomnoddy es miembro de la nobleza y que la nobleza es uno de los estamentos del reino, mas no podemos decir que Lord Tomnoddy sea uno de los estamentos del reino. El hecho de que Leibniz no lo supiera ver así parece imputable a su excesivo respeto por la doctrina aristotélica, según la cual los enunciados singulares y generales habrían de compartir idéntica forma categórica.

En los párrafos anteriores hemos hecho alusión a la posibilidad de diferentes interpretaciones del cálculo leibniziano por ser su abstracta generalidad el rasgo más interesante de aquel último. Leibniz produjo, ciertamente, un cálculo de alcance harto menor que lo esperado. El esquema final, falto como lo está de recursos para expresar la negación o para conjugar la consideración de la conjunción y la disyunción, no pasa todavía de ser más que un fragmento embrionario del proyecto anunciado por él mismo. Lejos de albergar en su interior a la silogística aristotélica, que Leibniz concibiera como un simple apartado de su cálculo, éste no da cabida a otro principio de la teoría del silogismo que el primero (reproducido en la proposición 15). Lo exiguo de estos resultados obedece, como ha podido verse, a la obsesión de Leibniz por las conexiones atributivas y a su incapacidad para lograr una caracterización satisfactoria de los enunciados existenciales. Pero, a guisa de conclusión, es importante resaltar la novedad de su aportación. Nos encontramos por primera vez ante el intento de elaborar una obra de matemática abstracta, esto es, aquella matemática que no tiene específicamente

[109] *O*, p. 377.

que ver con el espacio o con los números. El cálculo resultante cubre de hecho una parte del dominio de la lógica, pero cabe operar con él independientemente de cualquier interpretación.

4. De Saccheri a Hamilton.

Leibniz es sin duda el más importante de los matemáticos que se interesaron por la lógica en el curso de su decadencia como rama de la filosofía, pero hay también otros autores de esa misma fase histórica que resultan dignos de mención. Uno de los más interesantes de entre ellos es Girolamo Saccheri, jesuíta italiano que en 1697 publicó un opúsculo titulado *Logica Demonstrativa* y expuso más tarde los primeros teoremas de la geometría no-euclidiana. El libro de Saccheri debió tener algún éxito cuando se publicó por vez primera, pues en 1701 se hizo una segunda edición del mismo y todavía en 1735, dos años después de la muerte de su autor, alcanzaría una tercera. Pero acabó siendo olvidado durante los siglos XVIII y XIX y, cuando Vailati llamó la atención sobre él a comienzos del nuestro, escaseaban los ejemplares que habían logrado sobrevivir [110].

El libro se halla dividido, de acuerdo con el plan aristotélico, en cuatro partes que respectivamente se ocupan de los *Analytica Priora, Analytica Posteriora, Topica seu Dialectica y Sophismata.* Pero sus más interesantes novedades derivan de la reflexión sobre los requisitos de la demostración geométrica. En el prefacio de la obra, Saccheri declara que se propone desarrollar «severa illa methodo quae primis principiis vix parcit nihilve non clarum, non evidens, non indubitatum admittit». Quiere decir con ello que desea ajustar la propia lógica a las estrictas exigencias de la geometría, reduciendo así a un mínimo el número de sus primeros principios. En el capítulo cuarto, sin embargo, hace notar que para ciertos propósitos parece necesario asumir un principio no enunciado expresamente por los lógicos anteriores, a saber, que los términos no sólo guardan entre sí relaciones de mutua implicación o incompatibilidad, sino también de subordinación e independencia unos de otros. Este supuesto es claramente verdadero respecto del mundo que nosotros conocemos, pero ya que su provisión no puede correr exclusivamente a cargo de la lógica, habremos de entenderlo como un simple supuesto si deseamos proceder con el rigor que exige una ciencia demostrativa (*ut scientifice procedamus*). En el capítulo noveno, que se ocupa de las *consequentiae leges,* se sirve de aquel supuesto en orden a hacer ver mediante contraejemplos la no permisibilidad de ciertas combinaciones de premisas en determinadas figuras silogísticas, pero opina que la demostración de semejantes reglas negativas será insatisfactoria en tanto que descanse en un supuesto extralógico, por lo que en el undécimo capítulo emprende la tarea de confirmar sus resultados valiéndose de un procedimiento más refinado:

«Es mi intención ahora seguir otro procedimiento, que considero un modo sumamente elegante de demostrar aquellas mismas verdades sin ayuda de ningún supues-

110 G. Vailati, "Di un'opera dimenticata del P. Gerolamo Saccheri" y "A proposito d'un passo del Teeteto e di una dimostrazione di Euclide" en su compilación de *Scritti.* Para lo que sigue nos hemos servido del ejemplar de la *Logica Demonstrativa* que se conserva en la Stadtsbibliothek de Colonia. Se le consideraba como el único ejemplar superviviente de la tercera edición, pero en la actualidad existe un microfilm del mismo en la Bodleian Library de Oxford.

to. Procederé para ello como sigue: tomaré la contradictoria de la proposición a demostrar y deduciré de ella por demostración directa (*ostensive ac directe*) el resultado requerido. Este procedimiento ha sido practicado por Euclides (IX, 12), Teodosio (*Spherica*, I, 12) y Cardano (*De Proportionibus* V, 201), a quien Clavius reprocha (en su escolio a Euclides, IX, 12) por jactarse de haber sido el primero en descubrir tal género de demostración».

Un ejemplo aclarará en qué consiste el procedimiento. En orden a demostrar la imposibilidad de un silogismo válido de la primera figura con una premisa mayor universal afirmativa, una premisa menor universal negativa y una conclusión universal negativa (esto es, un silogismo que responda al modelo tradicionalmente esquematizado mediante AEE), Saccheri construye el argumento siguiente:

> Todo silogismo con una premisa mayor universal y una premisa menor afirmativa arroja una conclusión en la primera figura.
> Pero ningún silogismo que responda al esquema AEE posee una premisa mayor universal y una premisa menor afirmativa.
> Luego ningún silogismo que responda al esquema AEE arroja una conclusión en la primera figura.

Este argumento es a su vez un silogismo del tipo considerado, y sus premisas son ambas obviamente verdaderas. Si el esquema AEE fuese válido en la primera figura, la conclusión tendría que ser por tanto verdadera. Pero la conclusión enuncia que el esquema AEE no tiene validez en la primera figura. Con lo que vemos que el resultado deseado se desprende inclusive de su propia negación, lo que es tanto como decir que *ha de ser* verdadero. Saccheri ofrece una media docena de ejemplos de esta especie, apuntando al final del capítulo que el procedimiento podría ser objeto de aplicación más generalizada. Treinta y seis años más tarde, en su *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, del que tendremos ocasión de ocuparnos en el próximo capítulo, Saccheri se retrotrae a su *Logica Demonstrativa* para decirnos que sus investigaciones confirman la tesis de que toda verdad primera puede ser deducida de su propia contradictoria.

El método de Saccheri es claramente el mismo que los estoicos idearon en su refutación de los escépticos. Pero no hay prueba alguna de que lo deba a una posible familiarización con la lógica estoica. Tampoco parece relacionarlo con las discusiones medievales acerca de la teoría de las *consequentiae*, por más que emplea este vocablo y reproduce en su libro algunos resultados medievales (por ejemplo, el principio de que la contradictoria de una conjunción de proposiciones es la disyunción de las contradictorias de cada una de ellas). Lo más seguro es que su fuente de inspiración en este punto fuese la muy difundida edición de Euclides publicada en 1574 por Clavius, matemático al que más tarde se debieron los cálculos requeridos por el calendario gregoriano. Y su atención hacia el escolio relevante al respecto podría muy bien haberle sido sugerida por sus maestros jesuítas, pues Clavius mismo había pertenecido a la Compañía de Jesús y parece ser que el argumento objeto de su comentario estaba en boga entre sus compañeros de Orden durante el siglo XVII bajo la denominación de *consequentia mirabilis* [111]

---

111 El Profesor J. Lukasiewicz suministra referencias a dos jesuitas polacos de la época en una nota a sus "Philosophische Bemerkungen zu mehrwehrtigen Systemen des Aussagenkalküls", *Comptes rendus de séances de la Société des sciences et de leitres de Varsovie, Classe III*, XXIII (1930), p. 67.

Es interesante reparar, sin embargo, en que Cardano (1501-76), que fue el primero en emplear esta clase de argumentación en los tiempos modernos y hasta pretendió haberla inventado, era consciente de su conexión con los descubrimientos estoicos. En el pasaje de su *De Proportionibus* (1570) mencionado por Saccheri, alaba el argumento en estos términos:

«Y esto nunca ha podido nadie conseguirlo; más aún, parece algo ciertamente imposible y es sin duda la cosa más admirable descubierta desde que el mundo existe, a saber, la posibilidad de demostrar algo a partir de su opuesto, en una demostración que no conduce a absurdo alguno y de manera tal que no cabría llevarla a cabo sino mediante la suposición de lo contrario de la conclusión, algo así como si demostráramos que Sócrates es blanco porque es negro y no pudiéramos demostrarlo de otro modo; por esta razón excede en mucho al silogismo crisípeo (*et ideo est longe majus Chrysippaeo Syllogismo*).»

En el pasaje en cuestión no hay ningún otro indicio que nos permita adivinar cuál sea el argumento de Crisipo en que piensa Cardano, ni tampoco podemos identificar en los textos de lógica de la época ningún argumento que responda específicamente a la denominación de «silogismo crisípeo». Pero es probable que el autor aluda con esta última a alguna forma de razonamiento con la que quepa comparar la suya propia, en cuyo caso lo más verosímil es que se trate de aquélla mediante la que los estoicos trataban de retorcer la argumentación del escepticismo intelectual [112]. Pues la particularidad en la que insiste el texto precedente es la de que la conclusión se siga de su opuesta y no pueda ser obtenida de otro modo. A diferencia de la refutación estoica del escepticismo, su argumento se ajusta en realidad a este otro patrón: «Si lo primero, entonces lo primero; si no lo primero, entonces lo primero; pero o lo primero o no lo primero; luego lo primero». Pero, como observara Clavius, Euclides y Teodosio se habían ya anticipado a Cardano en la construcción de un argumento semejante.

Aparte de por su uso de la *consequentia mirabilis*, la *Logica Demonstrativa* de Saccheri merece ser recordada como el primer libro que acaso se ocupara de la falacia de la definición compleja. En el último capítulo de su obra, Saccheri distingue entre definición nominal y definición real o *definitio quid nominis y definitio quid rei*. Una definición puramente nominal no es otra cosa que un recurso tendente a procurarnos una abreviatura lingüística y no plantea ningún problema en especial; pero una definición real postula la existencia, o por lo menos la posibilidad, de lo que en ella es definido, razón por la que requiere de una justificación. Ahora bien, la dificultad surge cuando una definición que ha sido introducida sin el concurso de un teorema de existencia se usa de modo que comporte una presuposición existencial. Algunos geómetras, por ejemplo, han tratado de simplificar la exposición de Euclides definiendo las paralelas como líneas rectas equidistantes en todos sus puntos, pero no se han cuidado de advertir que la convención que regula su uso del término «paralela» no les autoriza por sí misma a presuponer que, dada una línea recta y un punto exterior a ella, haya de ser posible trazar por dicho punto una línea que sea a la vez recta y equidistante en todos sus puntos de la línea originaria. Este ejemplo, propuesto por el propio Saccheri en su *Euclides ab omni*

112 A menos que se refiera a la paradoja del cocodrilo y el niño, atribuida a Crisipo por Luciano en su *Vitarum Auctio*, 22.

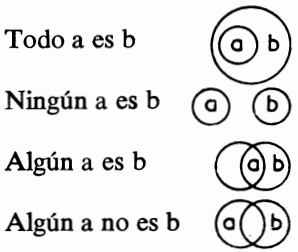
Naevo Vindicatus (pág. 100) con una referencia a su *Logica*, afecta a un punto de importancia capital en la filosofía de la matemática; y es interesante constatar que Saccheri y Leibniz repararon independientemente en la cuestión por la misma época.

Hasta donde podemos saber, la obra de Saccheri no debió nada al pensamiento de Leibniz, mas la influencia de este último sobre Johann Heinrich Lambert y Gottfried Ploucquet, que contribuyeron a dar vida a la lógica matemática durante el siglo XVIII, parece estar fuera de duda. Lambert, que murió en 1777, fue un distinguido matemático cuyos *Sechs Versuche einer Zeichenkunst in der Vernunftlehre* (correspondientes a sus *Logische und philosophische Abhandlungen*, editados en 1782 por Johann Bernouilli) contienen algunas ingeniosas analogías entre la lógica y el álgebra ordinaria, pero ninguna que proporcione las bases para un cálculo satisfactorio. Sus innovaciones más interesantes consisten en unas sugerencias para la cuantificación sistemática del predicado y unos primeros balbuceos de la teoría de las relaciones. En conexión con el primero de estos puntos, Lambert fue el primero en servirse de expresiones tales como $mA=nB$, donde las letras minúsculas se supone que representan características indeterminadas en conjunción con las características determinadas representadas por las letras mayúsculas. Esto es, el autor hacía aún objeto a todas las proposiciones de una consideración intensional, tratando de interpretar «algún A» en «Algún A es algún B» como si se tratase del signo de una subespecie de la A-dad. En cuanto al segundo punto, introdujo la noción de potencia de una relación, esto es, sugirió que si x guarda la relación R con y e y guarda la relación R con z, se podría decir de x que guarda con z la relación R^2. Esta noción habría de revelarse como importante andando el tiempo, pero por el momento no condujo a ningún resultado destacable. La obra de Ploucquet (publicada en diversas ediciones y bajo diferentes títulos y aparecida por última vez en 1782 con el de *Expositiones Philosophiae Theoreticae*) reviste menos originalidad. Se trata en realidad de poco más que la presentación de un código para la abreviatura de los silogismos. Pero interesa tomar nota de que también defiende la cuantificación del predicado: «Secundum sensum logicum cum omni termino iungendum est signum quantitatis». En su simbolismo, los términos distribuidos se representan por medio de mayúsculas y los no distribuidos por medio de minúsculas.

Las *Lettres à une Princesse d'Allemagne* de Leonhard Euler, escritas en 1761 y publicadas en San Petersburgo en 1768, han de ser asimismo mencionadas entre las obras que de algún modo contribuyeron a la lógica matemática durante el siglo XVIII. Aquellas de las cartas que se ocupan de lógica no aspiran a la elaboración de ningún cálculo, por más que Euler fuera por su parte un gran matemático. Pero contribuyeron a popularizar el recurso de Leibniz a analogías geométricas con vistas a la ilustración de relaciones lógicas, por lo que habrían de ejercer algún influjo sobre diversos pensadores del siguiente siglo. En particular, dicho recurso atraería la atención sobre la interpretación extensional —o en términos de clases— de los enunciados generales, pues Euler representaba (o, mejor dicho, ilustraba) las cuatro formas aristotélicas del enunciado por medio de tres relaciones entre figuras cerradas de acuerdo con el siguiente esquema [113]:

---

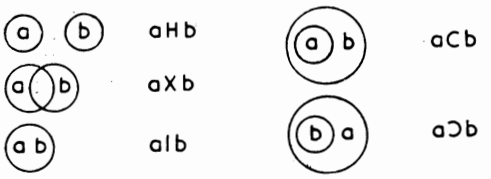
113 *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, carta CIII (p. 101).



donde «algún» tiene el sentido de «algunos, pero no todos». Si para la verdad de cualquier enunciado afirmativo universal es necesario que algo conectado con el término-sujeto sea una parte de algo conectado con el término-predicado, es obvio que ese algo ha de ser la extensión.

En la versión euleriana de la lógica, el cometido principal de las figuras espaciales es tornar intuitivamente evidentes los principios de la silogística y en ningún caso se pretende acometer un inventario de todas las posibles relaciones de extensión. Pero, cincuenta años más tarde, el matemático francés J. D. Gergonne vendría a desarrollar —a partir de la obra de Euler— una nueva teoría que cabría describir como una especie de infraestructura de la silogística [114]. Al comienzo de su trabajo, Gergonne advierte cómo la lógica aristotélica —«aunque todavía objeto de enseñanza en algunas academias góticas»— había caído en el descrédito general y únicamente había logrado revivir en su propio tiempo a causa del conservadurismo de la época, que demandaba «un retorno a los viejos estudios». Pero recoge con aprobación la sugerencia de Condorcet de que la idea aristotélica de reglamentar la argumentación podía considerarse como un primer paso hacia el perfeccionamiento —inalcanzado hasta la fecha— del arte de razonar [115], añadiendo más adelante que el remate de dicho arte habría de ser, en su opinión, el hallazgo de un método mediante el que nos fuera dado obtener nuestros resultados de manera puramente mecánica. Lo que Gergonne nos ofrece no es, no obstante, una máquina, sino una teoría dentro de la cual puedan ser rigurosamente probados los principios silogísticos.

Si, a la manera de Euler, representásemos las extensiones de dos ideas por medio de figuras cerradas tales como círculos, cabría fácilmente comprobar que hay cinco, y sólo cinco, modos como aquellas extensiones pueden relacionarse entre sí. Para cada una de dichas relaciones (ya conocidas por Boecio), Gergonne introduce una letra de acuerdo con el siguiente esquema:



114 "Essai de dialectique rationnelle", *Annales de Mathématiques*, VII (1816-17), pp. 189-228.
115 *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*, V. Esta optimista obra fue escrita en 1793, mientras Condorcet andaba ocultándose del Terror.

En nuestro cuadro, H da a entender *est hors de*, X *s'entre-croise avec*, I *est identique à*, C *est contenu dans* y Ɔ *contiens*. Y, ya que las tres primeras letras son simétricas, eso es también lo que sucede con las relaciones por ellas representadas. Las cuatro formas aristotélicas del enunciado podrían ahora definirse como sigue en términos de dichas relaciones:

Todo a es b	. . . . . aIb ó aC b.
Ningún a es b	. . . . . aHb.
Algún a es b	. . . . . aXb ó aIb ó aC b ó aƆ b.
Algún a no es b	. . . . . aHb ó aXb ó aƆ b.

A la inversa, las nuevas relaciones se podrían definir, si se desea, por recurso a las formas aristotélicas, lo que arrojaría:

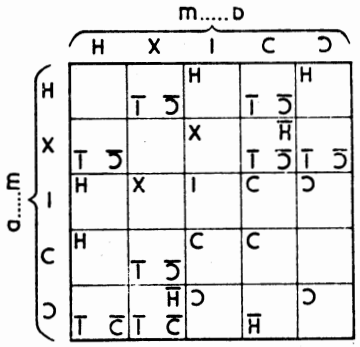
aHb	. . . . Ningún a es b.
aXb	. . . . Algún a es b y algún a no es b y algún b no es a.
aIb	. . . . Todo a es b y todo b es a.
aC b	. . . . Todo a es b y algún b no es a.
aƆ b	. . . . Todo b es a y algún a no es b.

Pero se echa de ver que las relaciones de Gergonne son aquí objeto de una definición más estricta que las de Aristóteles. Más aún, se trata de relaciones a la vez exhaustivas y exclusivas. Esto es, entre dos extensiones cualesquiera, ninguna de las cuales sea nula, se dará una —y sólo una— relación de Gergonne. Y a los efectos del razonamiento revisten asimismo la ventaja de dispensarnos de las complicaciones de las figuras aristotélicas. Dado que las tres primeras relaciones son simétricas y la cuarta es la conversa de la quinta, bastará con elegir algún patrón de ordenación de los términos, como pongamos por caso la primera figura aristotélica:

m . . . b
a . . . m
---
a . . . b,

y pasar luego a examinar el resultado de insertar los signos de Gergonne *en* los espacios en blanco. Es lo que el propio Gergonne hace, descubriendo que de las 5×5×5 distribuciones concebibles de sus signos en la figura antes citada sólo 54 representan estados de cosas posibles. Ya que su interés se centra especialmente en la provisión de una infraestructura de la silogística aristotélica, procede a continuación a derivar de su cuadro las reglas de costumbre. Pero, mediante una reordenación de sus resultados, se hace posible elaborar una nueva teoría de los silogismos de Gergonne [116]. En el siguiente cuadro:

116 J. A. Faris, "The Gergonne Relations", *The Journal of Symbolic Logic*, XX (1955), pp. 207-31.



la presencia de una letra en un compartimento indica la posibilidad de derivar una conclusión del género designado por esa letra a partir de las premisas representadas por los términos laterales, en tanto que la presencia de una raya horizontal sobre las letras en cuestión indica la posibilidad de inferir la negación de las relaciones correspondientes. Hay, de este modo, 13 silogismos de Gergonne con conclusión positiva y 19 con conclusión negativa. Pero cada conclusión positiva equivale a la conjunción de 4 conclusiones negativas (por ser las 5 relaciones de Gergonne exhaustivas y exclusivas), con lo que nuestra tabla da razón de todos y cada uno de los 71 casos excluidos por la tabla de compatibilidad de Gergonne.

Ya que las relaciones de Gergonne son en cierto sentido más sencillas que las expresadas por las diversas formas aristotélicas del enunciado, resulta natural preguntarse por qué no cabe formularlas en el lenguaje ordinario sin dar lugar con ello a buen número de complicaciones. La razón no puede estribar en la presuposición de que todos los términos generales poseen aplicación (esto es, en la exclusión de las clases nulas), pues —como ya sabemos— el propio Aristóteles la hizo suya en la elaboración de su silogística. Pero se halla conectada con el hecho de que las relaciones de Gergonne son relaciones de extensión. En los lenguajes naturales cabe la posibilidad de usar palabras tales como «todo» y «algún» en otros contextos que los de las cuatro formas aristotélicas del enunciado. Así podemos decir, por ejemplo, «Todo hombre es hijo de alguna mujer», expresión inclasificable en el esquema aristotélico por respecto a sus dos cuantificadores a la vez. Pero si deseamos, no obstante, concentrar nuestra atención sobre lo verdaderamente relevante de las reglas silogísticas de Aristóteles, podremos combinar a discreción la expresión de la universalidad o la particularidad con la de la predicación o su negación. Esto es lo que se logra gracias a la notación escolástica A, E, I, O, que funciona de modo que nos permite retornar cuando gustemos al lenguaje ordinario con sólo dar un sencillo paso. La introducción de la notación H, X, I, C y Ↄ de Gergonne hace mayor nuestro alejamiento del lenguaje ordinario. Sin duda, del empleo de su simbolismo se derivan considerables ventajas a la la hora de hablar de relaciones de extensiones, pero tales ventajas han de pagarse al precio de perder una directa conexión con aquella otra notación cuantificacional de la que nos servimos en multitud de situaciones de diverso carácter. El lenguaje ordinario puede resultar enfadoso por contraste con un simbolismo específicamente

destinado a hablar de relaciones de extensiones y nada más que ellas, pero reviste en cambio el decisivo mérito de su utilidad en un gran número de contextos diferentes.

El no haberlo sabido apreciar así fue la causa de las dificultades en que sir William Hamilton, de Edimburgo, se vio envuelto al tratar de perfeccionar el sistema de Aristóteles por medio de la cuantificación de todos los predicados [117]. De acuerdo con su «New Analytic of Logical Forms», anunciada por vez primera en 1846, habríamos de distinguir a los efectos de la silogística —y presumiblemente de toda la ciencia— ocho formas enunciativas diferentes, a saber:

(1) Todo a es todo b.
(2) Todo a es algún b.
(3) Algún a es todo b.
(4) Algún a es algún b
(5) Cualquier a no (ningún a) es cualquier b
(6) Cualquier a no (ningún a) es algún b.
(7) Algún a no es cualquier b.
(8) Algún a no es algún b.

Evidentemente, la palabra «algún» ha de entenderse aquí en el sentido de «alguno pero sólo alguno», ya que se contrapone por igual a «todo» y a «cualquier». Por lo demás, si suponemos que «todo» ha de entenderse en un sentido colectivo (de suerte que «todo a» constituya una abreviatura de «la clase de las cosas que son a»), las formas (1)-(4) de la lista se vendrían respectivamente a identificar con las formas «aIb», «a⊂b», «a⊃b» y «aXb» de Gergonne; y ésta es, sin duda, la interpretación a la que Hamilton hubiera dado su aprobación. Pues, aunque no parece haber tenido la menor noticia de la obra de Gergonne, el caso es que también a él le interesaba precisamente hablar de relaciones de extensiones. ¿Pero qué habremos de decir del resto de los apartados de su lista? Quizás se pueda interpretar la forma (5) como equivalente a la «aHb» de Gergonne, pero, de ser así, las tres formas restantes no lograrían representar posibilidades independientes, ya que sabemos que el conjunto de las cinco relaciones de Gergonne se caracteriza por su exhaustividad [118]. Y, aparte de esa dificultad, hay algo de radicalmente insatisfactorio en un esquema como el de Hamilton, en que se alterna con absoluto desenfado el colectivo «todo» y el distributivo «cualquier». Hamilton creía, a no dudarlo, que el tránsito de una a otra partícula venía a reducirse a un recurso estilístico desprovisto de toda significación lógica. Pero ese tránsito de lo colectivo a lo distributivo resulta en realidad indispensable para su tratamiento de la segunda parte de su cuadro, ya que, si «Todo a no es todo b» quiere decir algo, querrá decir presumiblemente lo mismo que «La clase toda de las cosas que son a no es la clase toda de las cosas que son b», enunciado este último que —por ser el contradictorio de (1)— sería equivalente a la disyunción de los otros cuatro miembros del esquema de Gergonne, sobre la base siempre de excluir a las clases nulas de nuestra consideración.

Pero lo cierto es que Hamilton nunca tuvo una idea excesivamente lúcida de lo que se traía entre manos, así como tampoco logró nunca aclarar por

117 *Lectures on Logic*, II, apéndice V, especialmente p. 277.
118 W. Bednarowski, "Hamilton's Quantification of the Predicate", *Proceedings of the Aristotelian Society*, LVI (1956), pp. 217-40.

completo el papel de la negación en los diversos apartados de su lista. No es sorprendente, pues, que sus no demasiado bien fundadas pretensiones suscitaran una famosa controversia en que fueron cumplidamente desechadas por Augustus De Morgan [119]. El fracaso de su programa para una satisfactoria cuantificación sistemática de los predicados resulta interesante, sin embargo, por mostrar que los cuantificadores del lenguaje ordinario no son —como parecía creer Hamilton— meros ingredientes incidentales de un simbolismo destinado a hacer posible hablar de relaciones entre clases, sino signos que poseen vida propia fuera de aquel contexto. Está lejos de ser un accidente el que su plan se viniese abajo al tratar de combinar su cuantificador universal con un signo negativo, lo que incapacitaba a Hamilton para interpretarlo colectivamente sin abandonar su pretensión de estar desarrollando la clasificación aristotélica de las proposiciones o —para decirlo con sus propias palabras— de estar colocando «la piedra clave del arco aristotélico». Merece señalarse a este respecto que, de acuerdo con su propia y meticulosa relación cronológica de su innovación, ésta comenzó en 1833 por la consideración de sus cuatro primeras formas y sólo al cabo de siete años procedió a la cuantificación del predicado en las proposiciones negativas [120].

Al seguir, como lo hemos venido haciendo en este epígrafe, la línea de desarrollo de la lógica originada con la obra de Leibniz, hemos tenido que pasar por alto la figura de Kant. Retrocedemos ahora a ella por un momento con el fin de completar nuestro panorama examinando su relación con aquel proceso. Si comparamos sus escritos con los de otros filósofos del siglo XVIII, acaso puedan darnos la sensación de un mayor interés por la lógica formal. En un ensayo de 1762, *Von der falschen Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren*, trató de defender la tesis de que todo razonamiento silogístico descansa en el único principio *Nota notae est nota rei ipsius*. Nosotros ya sabemos que es un error tratar de reconducir todo el razonamiento silogístico a un único principio sin tomar en cuenta el procedimiento de reducción elaborado por Aristóteles, pero la discusión kantiana de la cuestión sugiere por lo menos una mayor familiarización con la problemática tradicional que la de algunos de sus predecesores inmediatos como Hume. Esta impresión parece confirmarse por el uso que hace Kant de la lógica formal en su *Crítica de la Razón Pura*, en especial por lo que atañe a su intento de derivar una tabla de las categorías a partir de la clasificación de las formas judicativas. Pero, considerado más de cerca, el interés de Kant por la lógica se nos revela superficial. En su *Logik*, compilada en 1800 sobre la base de los guiones y apuntes de B. G. Jäsche, apenas se dice nada que merezca la pena acerca de la silogística, y el libro no demuestra la menor simpatía hacia los esfuerzos por mejorar o incrementar el legado de Aristóteles. De la obra de Lambert, en particular, afirma que no contiene otra cosa que inútiles sutilezas. Y en la *Crítica de la Razón Pura* sólo se ocupa en realidad de la lógica formal con el fin de contradistinguirla de la lógica trascendental, que se supone ha de ocuparse de la posibilidad y validez del conocimiento.

En el Prefacio de la segunda edición de la *Crítica de la Razón Pura*, escribe Kant:

119 "Logic" en *The English Cyclopaedia (Arts and Science Division)*, V (1860), pp. 340-54.
120 *Lectures on Logic*, II, p. 249.

« Que la lógica ha seguido este seguro camino [a saber, el de la ciencia] ya desde los tiempos más remotos se evidencia en el hecho de que —de Aristóteles al presente— no ha tenido nunca que volver sobre lo andado, como no sea que se deseen tomar a título de enmiendas la remoción de algunas innecesarias sutilezas o la más clara exposición de su doctrina, detalles éstos que afectan ambos más a la elegancia que a la solidez de la ciencia. Asimismo merece destacarse que tampoco ha podido, hasta la fecha, avanzar un solo paso, presentándose según todas las apariencias como perfectamente conclusa y rematada. Pues si algunos filósofos modernos han abrigado la idea de ensanchar sus dominios introduciendo capítulos, ya sean *psicológicos* o relativos a las distintas facultades cognoscitivas..., ya sean *metafísicos* o concernientes al origen del conocimiento y los diversos géneros de certeza a tenor de la diversidad de los objetos..., ya sean *antropológicos* o referidos a los prejuicios, sus causas y sus remedios, ello se debe sólo a su desconocimiento de la naturaleza propia de esta ciencia... Las fronteras de la lógica se hallan delimitadas con absoluta precisión por la peculiaridad de tratarse de una ciencia a la que sólo le interesa la detallada exposición y la demostración rigurosa de las reglas formales de todo pensamiento» [121].

La preocupación por la pureza de la lógica de que hace gala Kant en este célebre pasaje se concilia bastante mal con su propio proceder a todo lo largo de la obra. Pues fue su trascendentalismo el que sirvió de punto de partida para la producción de esa curiosa mezcolanza de metafísica y epistemología que Hegel y los restantes idealistas del siglo diecinueve presentarían como lógica. Pero aún más interesante de reseñar es su manifiesta ignorancia del valor de cualesquiera de las contribuciones realizadas en el dominio de la lógica desde los tiempos de Aristóteles, así como el hecho de que lo que consideraba la obra definitiva e imperfectible de Aristóteles no fuese en realidad sino una versión peculiarmente confusa de la tradicional mixtura de elementos aristotélicos y estoicos. Este segundo punto merece ser examinado con algún detalle, ya que la autoridad de Kant ha conducido a no pocos filósofos a considerar su esquema como clásico.

En la sección de su *Crítica de la Razón Pura* que responde al título «De la función lógica del entendimiento en los juicios», Kant nos ofrece la siguiente tabla de la clasificación de estos últimos [122]:

I	II	III	IV
Cantidad	*Cualidad*	*Relación*	*Modalidad*
Universal	Afirmativo	Categórico	Problemático
Particular	Negativo	Hipotético	Asertórico
Singular	Indefinido	Disyuntivo	Apodíctico

El hecho de haber podido incluir exactamente tres especies bajo cada encabezamiento es desde luego puramente accidental, pues los miembros de dichas tríadas no se hallan realmente coordinados y la tricotomía no se inspira en ningún principio común a todos esos casos. Mas Kant da la impresión de conceder cierta importancia a la simetría de su esquema, sosteniendo aparentemente (*a*) que todo juicio puede ser emplazado en alguno de los tres casilleros en los que se divide cada uno de los cuatro encabezamientos, y (*b*) que cada uno de esos casilleros bajo un encabezamiento dado

121 *Crítica de la Razón Pura*, B, VIII.
122 Ibid., B. 95.

puede ser combinado con cada uno de los casilleros incluidos bajo los restantes encabezamientos. Tales suposiciones son equivocadas. Por ejemplo, no podemos contar con un juicio hipotético negativo, pues la presencia de la negación en el antecedente o el consecuente de un juicio hipotético no convierte en negativo a la totalidad de este último, mientras que la negación de semejante juicio en su totalidad le haría perder su condición de hipotético. Tampoco tiene sentido hablar de un juicio disyuntivo particular, pues, si bien uno cualquiera o cada uno de los juicios disyuntos podrían ser particulares de acuerdo con la clasificación aristotélica, la disyunción en su conjunto no posee un término-sujeto en el sentido de Aristóteles ni admite por lo tanto ser clasificada bajo el encabezamiento de la cantidad. Todas estas confusiones obedecen a un fallo en la debida apreciación de las relaciones existentes entre las contribuciones aristotélica y estoica a la historia de la lógica, un fallo nada sorprendente en quien sin más da por sentado que todo lo que de valioso pueda haber en la lógica tradicional proviene de Aristóteles. Pero también es embrollada la caracterización kantiana de la modalidad, cuyas ideas básicas son de exclusiva procedencia aristotélica. Kant nos informa de que la modalidad «no aporta nada al contenido de un juicio (pues aparte de la cantidad, la cualidad y la relación nada hay que constituya el contenido de un juicio), sino concierne únicamente al valor de la cópula por relación al pensamiento en general». Con esta críptica observación parece querer darnos a entender que un adverbio modal como «posiblemente» tan sólo representa un modo de pensar el pensamiento enunciado por el resto de la oración en que interviene, pues añade que las tres «funciones de la modalidad» por él distinguidas representan tres «momentos de pensamiento» que constituyen una serie. Si ésta es de hecho su doctrina, se trata de un elocuente exponente de la corrupción de la lógica por la psicología y la epistemología. Cuando un hombre dice «Posiblemente el tren llegará tarde», no se está comprometiendo en mayor o menor grado con la aserción de que el tren de referencia llegará tarde. Lo que asevera es la proposición de segundo orden de que es posible (en relación con lo que él sabe del asunto) que el tren llegue tarde. Sería absurdo, por descontado, sostener que la cualificación modal «posiblemente» contribuye a expresar un contenido de pensamiento en la misma medida que un adverbio ordinario como «rápidamente». Pero nadie que posea una adecuada comprensión de las complejidades que una proposición puede encerrar incurriría en la suposición de que una teoría objetivista de las distinciones modales envuelve semejante absurdo.

Defectos similares se podrían encontrar en la distinción kantiana entre juicios analíticos y sintéticos. De acuerdo con su definición, un juicio de la forma sujeto-predicado es analítico si en el predicado no se contiene nada que no haya sido ya pensado en el concepto del sujeto; en caso contrario, el juicio es sintético [123]. La idea de semejante distinción parece provenir de la discusión lockeana de las proposiciones triviales e instructivas, pero en el sistema de Kant reviste una importancia fundamental y merece ser examinada con especial atención. Tal y como se halla formulada, la caracterización kantiana de la distinción únicamente se refiere a los juicios de la forma sujeto-predicado, pero es improbable que Kant desease constreñir

[123] Ibid., B. 10; *Prolegomena*, § 2.

a dichos juicios el ámbito de su aplicación, pues prosigue hablando de la misma como si abarcase el campo todo del conocimiento posible. Quizás cayese en el error de suponer que todos los juicios son de la misma forma sujeto-predicado, como cuando por ejemplo se refiere al juicio de que $7+5=12$ como si se tratara de un juicio sintético. Pero en ninguna parte se detuvo, por ejemplo, a examinar la aplicabilidad de su distinción a los juicios hipotéticos o disyuntivos, como el expresado por «La reina Ana ha muerto o la reina Ana no ha muerto». Si se le hubiera preguntado por este último ejemplo, podría haber dicho que se trata de un juicio analítico. Pero, en orden a justificar esta respuesta, habría tenido que acudir a otra definición distinta del adjetivo clave «analítico».

En un lugar afirma que el principio fundamental y suficiente de todos los juicios analíticos es la Ley de Contradicción [124]. Parece dar a entender con ello que un juicio es analítico si, y sólo si, su negación comporta una conjunción de contradictorios. Una tal caracterización de los juicios analíticos resulta indudablemente más adecuada para los propósitos de Kant que la inicialmente expuesta, pues haría posible la división de todos los juicios verdaderos en «analíticos» y «sintéticos». Pero sería equivocado suponer, como muchos filósofos han hecho, que la clase de los juicios analíticos así definidos comprende a todos los juicios lógicamente verdaderos. El principio rector de un silogismo del primer modo de la primera figura es a buen seguro un enunciado verdadero, si los hay, sobre bases puramente lógicas; pese a lo cual no hay posibilidad de derivarlo exclusivamente a partir del principio de no-contradicción. Sin duda de la negación de un enunciado de la forma «Si todo M es G y todo P es M, entonces todo P es G» podrían obtenerse consecuencias que resulten incompatibles entre sí. Pero, en orden a obtenerlas, tendríamos primero que asumir el principio silogístico en cuestión. Y eso es tanto como decir que el principio de no-contradicción no constituye un fundamento suficiente para toda la lógica [125]. Kant, en rigor, no dijo expresamente que lo fuera, pero si hubiera que conceder que, de acuerdo con su definición más aceptable de los términos «analítico» y «sintético», el principio rector de un silogismo en *Barbara* resulta ser una verdad sintética, sería difícil encontrar ningún claro sentido a su famosa pregunta «¿Cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori*?». Pues nada hay, por lo demás, de especialmente sorprendente en el reconocimiento de que el principio rector de un silogismo sea *a priori* en el sentido kantiano de la expresión, esto es, no empírico [126].

Ya en 1844, el matemático Gauss —escribiendo a un amigo sobre lo absurdo de los pronunciamientos acerca de la matemática de Schelling, Hegel y otros varios filósofos— aludía a Kant con estas palabras: «Pero ni siquiera con Kant andan mucho mejor las cosas; en mi opinión, su distinción entre proposiciones analíticas y sintéticas es una de esas cosas que o van a parar a una futilidad o son sencillamente falsas» [127]. El vocablo «analítico», no obstante, conlleva algunas asociaciones que hacen que los filósofos se resistan a abandonarlo; y en un gran número de obras de nuestros días nos encontramos, así, con la mencionada explicación del mismo que lo convierte

124 Ibid., B. 190. La denominación de "Ley de no-contradicción" sería más apropiada.
125 Esta observación fue hecha por J. S. Mill en su *System of Logic*, II, VI, 5.
126 Esta nueva acepción fue popularizada por Kant, pero se encuentra ya en la quinta carta leibiziana de la *Leibniz-Clarke Correspondence* (1716), § 129.
127 Carta de 1 de noviembre de 1844 a Schumacher, *Werke*, XII, p. 62.

en sinónimo de «lógicamente verdadero» o «verdadero sobre bases puramente lógicas». Esta acepción podría ser defendida haciendo ver que se halla respaldada por la tradición y se acomoda a las verdaderas intenciones de Kant mejor de lo que él mismo lo pudo nunca conseguir. Pero tales asociaciones podrían también extraviarnos a la hora de examinar los fundamentos de la propia lógica, pues en la literatura reciente no es difícil tropezar con pasajes en los cuales se intenta explicar la naturaleza de la verdad lógica por recurso al término «analítico», cuando hemos visto que la única definición moderna de este último que reviste algún sentido preciso entraña su referencia a la noción de verdad lógica.

Tras de estas censuras a la lógica de Kant, es de justicia atribuirle el mérito de un importante logro, a saber, la debelación del argumento ontológico en pro de la existencia de Dios. El argumento había sido propuesto por vez primera por San Anselmo en el siglo XI, siendo resucitado por Descartes en el XVII. En su versión más simple, consiste en la aserción de que Dios ha de existir porque la existencia se halla envuelta en la definición de la esencia divina. A lo que Kant replicaría que la existencia no es un atributo o determinación de cosa alguna, por lo que no podría hallarse envuelta en la esencia de la divinidad o cualquier otra [128]. Esta observación había ya sido hecha por Gassendi en sus objeciones a las *Meditaciones* de Descartes, pero fue luego pasada por alto u olvidada. A Kant debemos el haber convertido la crítica del argumento ontológico en moneda acuñada. Por desgracia, no llegó a ofrecernos por su parte una caracterización satisfactoria de las proposiciones existenciales. Si hubiera profundizado en la materia, no habría podido declararse satisfecho con la pobre versión de la lógica tradicional que tuvo ocasión de manejar.

5. Bolzano y Mill.

El objetivo último de Kant al escribir su *Crítica de la Razón Pura* fue poner fin a la filosofía de corte metafísico que había prevalecido hasta sus días, mas sus esfuerzos no se vieron coronados por el éxito. Entre los filósofos que rechazaron su obra y continuaron pensando al modo que Kant llamó precrítico, uno de los más interesantes —aun si no muy influyente— fue Bernard Bolzano (1781-1848) [129]. Puesto que era un sacerdote católico, profesor de filosofía de la religión en la Universidad de Praga (hasta su deposición en 1819 por expresar opiniones liberales en cuestiones políticas), se ha supuesto más de una vez que la reacción antikantiana de su *Wissenschaftslehre* de 1837 y sus *Paradoxien des Unendlichen* (publicadas a título póstumo) debió ser inspirada por la lectura de autores medievales. En una ocasión cita, en efecto, un pasaje —que, por lo demás, no le podía servir de gran ayuda— de un tratado *De Demonstratione* en otro tiempo atribuido a Santo Tomás de Aquino [130], otra vez menciona el tratamiento de los *insolubilia* en el *Compendium Logicae* de Savonarola [131], y en un tercer lugar emplea el vocablo alemán *Consequenz* con un sentido que parece ser

128 *Crítica de la Razón Pura*, B. 625.
129 Información más detallada acerca de su vida y sus escritos puede encontrarse en la introducción histórica a la edición y traducción inglesa de sus *Paradojas del Infinito*, por D. A. Steele, 1950.
130 *Wissenschaftslehre*, § 27.
131 Ibid., § 19.

el mismo del vocablo medieval *consequentia* [132]. Mas no da la impresión de estar muy al tanto de los resultados de la lógica medieval, y las referencias esparcidas a lo largo de su *Wissenschaftslehre* sugieren que dedicó mucho más tiempo a la lectura de los autores antiguos (como, por ejemplo, Sexto Empírico) y modernos desde Descartes en adelante. Si hay un predecesor a cuya obra pueda considerársele ligado por una profunda admiración es «el gran Leibniz» [133]. Pero pudiera ser, en cualquier caso, que el título de *Wissenschaftslehre* de su obra principal se inspire por igual en la caracterización medieval de la lógica como una *ars artium* y en la idea leibniziana de una *scientia generalis* que tuviese a su cargo la organización de las ciencias. Pues aquel título significa «teoría de la ciencia» más bien que «teoría del conocimiento» (*Erkenntnislehre*), y el subtítulo de la edición originaria explica que la obra constituye «un intento de presentación pormenorizada, y en buena parte novedosa, de la Lógica, con constante referencia a quienes hasta aquí se han ocupado de ella». Pero la obra no trata solamente de lógica formal. Por el contrario, declara ocuparse de «todas las reglas que han de observarse para la división y clasificación de las diversas ciencias que integran el reino de la verdad, así como para la presentación de cada un de dichas ciencias por separado» [134]. Hacia el final del volumen cuarto se dedica incluso una sección a la composición de portadas de libros [135], tras de la cual viene otra en que el autor de más de dos mil trescientas páginas menciona la prolijidad como el común pecado de los escritores de textos y manuales [136]. Resulta un tanto curioso contemplar cómo un admirador de Leibniz llama lógica a todo esto, pero la explicación parece ser que la insatisfacción frente a la distinción kantiana entre forma y contenido hacía dudar a Bolzano de la posibilidad de trazar una clara divisoria entre una y otro [137]. Bolzano deseaba emancipar a la lógica de la psicología y la retórica e insistía en que lo posible no debe confundirse con lo concebible [138], pero pensaba que la lógica ha de dar cuenta de los diversos modos como llegamos a la adquisición del conocimiento y se resistía a reducirla pura y simplemente a una colección de verdades analíticas tal y como las describiera Kant, por opinar que las verdades de ese género no revisten suficiente importancia como para componer una ciencia [139]. Hay —sostiene— un sentido en que la lógica podría ser apellidada de formal, puesto que se ocupa de formas o patrones de inferencia [140], pero eso no nos autoriza a excluir del dominio de la lógica distinciones tales como la que se da entre juicios *a priori* y *a posteriori* (en el sentido kantiano de estas expresiones) [141].

Para Bolzano, una ciencia en el sentido objetivo del vocablo es un conjunto de verdades objetivas. Cuando se la presenta por medio de un tratado, las verdades que la integran han de ser desde luego conocidas a algún hombre, pero dichas verdades no pueden con carácter general ser identificadas con verdades conocidas por los hombres. Por el contrario, es razonable suponer que en su gran mayoría sólo resultan conocidas para

132 Ibid., § 254.
133 Ibid., § 104, Anm. 3.
134 Ibid., § 1.
135 Ibid., § 696.
136 Ibid., § 697.
137 Ibid., § 186.
138 Ibid., § 7.
139 Ibid., §§ 12-13.
140 Ibid., § 254.
141 Ibid., § 12.

Dios. Pues, en efecto, una verdad objetiva es una proposición-en-sí (*Satz-an-sich*) verdadera, esto es, un contenido proposicional verdadero, algo ciertamente pensable o expresable, pero no necesariamente pensado ni expresado [142]. El vocablo «juicio» se usa a menudo en tal sentido, pero no es apropiado como término técnico por ser también frecuentemente usado para designar el acto de juzgar en cuanto opuesto al contenido mismo de ese acto. Aparte de ello, sería confundente el aplicarlo a un contenido que no fuese objeto de asentimiento o de creencia, sino propuesto solamente, por ejemplo, a título de hipótesis. El vocablo «juicio» sería a lo sumo una de tantas palabras como podríamos usar para referirnos a contenidos proposicionales en determinados contextos específicos. Otros vocablos de ese género serían «premisa» y «conclusión», introducidas originariamente por los lógicos para describir aquellas oraciones que ocupan determinadas posiciones en el seno de un argumento y usadas luego como si se tratara de designaciones de contenidos proposicionales.

Los pasajes de autores precedentes aducidos por Bolzano en apoyo de su caracterización de los *Sätze-an-sich* (y, en particular, las *Wahrheiten-an-sich*) no se adecúan muy bien a sus propósitos. No da muestras de haber reparado en la doctrina estoica de los λεκτά ni en la doctrina medieval de los *dicta propositionum* o *complexe significabilia,* sino menciona en su lugar textos antiguos y modernos en favor de la tesis de que verdad y ser se identifican [143]. En cuanto a los escritos de Leibniz de los que echa mano, a saber, el *Dialogus de Connexione inter Res et Verba et Veritatis Realitate* y los *Nouveaux Essais* IV, V, no son tampoco exactamente lo que Bolzano necesita [144]. Pues aunque Leibniz insista en esos lugares en que puede haber verdades de las que nadie tenga conocimiento y se burle de la sugerencia de que las verdades son agregados de signos que se podrían clasificar de acuerdo con la tinta en que se hallan impresos, lo cierto es que parece sostener que la propiedad de ser verdaderos corresponde a los signos o pensamientos posibles. En el diálogo antes mencionado hace, así, decir a uno de los interlocutores: «Vides ergo veritatem esse propositionum seu cogitationum, sed possibililium», y lo que más adelante añade acerca de las relaciones de los signos con las cosas no implica la creencia en *Sätze-an-sich* [145]. Pero Bolzano tiene pleno derecho, en cambio, a alegar que su doctrina se halla implícita en las observaciones de buen número de filósofos y hombres de la calle. Aparte de «premisa» y «conclusión», que Bolzano menciona, tenemos por ejemplo los vocablos «problema», «axioma», «teorema», «principio», «aserto», «sugerencia», todos los cuales se usan para describir *Sätze-an-sich* en una serie de contextos particulares.

La palabra alemana *Satz,* que Bolzano utiliza en su terminología técnica, se puede usar o bien como un término gramatical traducible por «oración», «frase» o «cláusula», o bien como una palabra del mismo género que «premisa» y las restantes, aunque sin especial vinculación a un determinado contexto de pensamiento salvo por lo que genéricamente se refiere al carác-

142 Ibid., § 19.
143 Ibid., § 27. En el § 23, el autor cita un pasaje de Sexto Empírico, *Adv. Math.*, VIII, 12, en que aparece la voz λεκτόν, mas no hace comentarios al respecto.
144 Ibid., §§ 21 y 27.
145 *Philosophische Schriften,* ed. Gerhardt, VII, p. 190. Couturat publicaría con posterioridad, en *Opuscules et fragments inédits de Leibniz,* una nota en que Leibniz adscribe la verdad a un *cogitabile complexum.*

ter expositivo de este último. Así, los teoremas que aparecen en un libro de matemáticas pueden llamarse *Sätze*, e incluso es posible emplear el giro *der zweite Satz der Wärmelehre* para expresar «el segundo principio de la termodinámica». A este respecto, su historia es muy semejante a la del vocablo latino *propositio*. Pues aunque los lógicos medievales definieron siempre *propositio* como un signo complejo de carácter eminentemente lingüístico, le aplicaron comúnmente adjetivos tales como *necessaria* e *impossibilis* que sólo resultan apropiados al aplicarlos a un contenido proposicional. Y en latín ordinario se hizo también habitual recurrir al vocablo para hablar de tesis en el dominio de la matemática, el derecho o la teología, prescindiendo al respecto de las expresiones verbales utilizadas por los expositores de las mismas. En la literatura técnica de inspiración latina, a diferencia de la de inspiración germánica, se cuenta de ordinario con los vocablos «oración», «frase» o «cláusula», antes aludidos, para propósitos gramaticales, por lo que no es sorprendente que el vocablo «proposición» haya venido a cobrar el sentido del *Satz-an-sich* de Bolzano. Hasta no hace mucho todavía, los autores de manuales de lógica continuaban ateniéndose a la tradición de definir una proposición como la expresión verbal de un juicio, pero lo que decían acerca de las proposiciones no se acomodaba a la interpretación usual de dichas expresiones verbales judicativas. Hoy día la mayor parte de los lógicos han abandonado definitivamente la vieja definición. Ya que la diferenciación entre «oración», «frase» y «cláusula», por una parte, y «proposición», por otra, es evidentemente ventajosa, nos serviremos de «proposición» en lo que sigue como equivalente siempre al *Satz-an-sich* de Bolzano, a menos de que consideraciones de tipo histórico impongan un retorno momentáneo y fácilmente reconocible a la primitiva usanza. Desgraciadamente, la mencionada diferenciación no simpre ha sido tenida en cuenta en las traducciones del alemán, idioma en el que *Satz* desempeña por igual —como hemos visto— todos aquellos cometidos. Así, la expresión «cálculo de proposiciones» (o «cálculo proposicional»), que designa con propiedad aquella parte de la lógica en que las variables indican espacios a rellenar mediante signos (esto es, expresiones) de proposiciones, ha solido verterse al alemán por *Satzkalkül*, que a su vez ha sido vuelta a traducir frecuentemente por «cálculo de oraciones» (o, con un giro más técnico, «cálculo sentencial»), por más que debiera resultar obvio que las letras *P* y *Q* que intervienen en una fórmula como *Si P, entonces Q* no indican espacios a rellenar por signos de oraciones ni tan siquiera por oraciones mismas en el estricto sentido de la palabra.

Tras de explicar cómo hace uso de la expresión *Wahrheiten-an-sich*, Bolzano emprende la tarea de demostrar que hay un número infinito de tales verdades e incluso que nosotros conocemos infinidad de ellas. Los argumentos de Bolzano son del mismo género que los empleados por los estoicos contra los escépticos. Así, comienza por hacer ver que la aserción «Ninguna proposición es verdadera» se refuta a sí misma, para argüir después que es imposible detenerse en este o aquel punto a lo largo de una serie de tales proposiciones. Lo que es más, Bolzano acredita estar al tanto de la historia del razonamiento de que se sirve, pues alude al respecto a Sexto Empírico, San Agustín y Descartes [146]. El lector que no se halle convencido de su doctrina por anteriores consideraciones encontrará tal vez sofístico el pasaje

146 *Wissenschaftslehre*, §§ 31, 33 y 44.

en que Bolzano argumenta en su favor; pero, ya que nosotros aceptamos el núcleo de la tesis defendida, no necesitaremos ahora examinar más detalladamente la cuestión.

Una cosa es, sin embargo, reconocer con Bolzano que hay proposiciones expresadas por los signos de una multiplicidad de lenguajes diferentes, y acaso eventualmente inexpresadas, y otra muy distinta estar de acuerdo con todo cuanto Bolzano procede a afirmar acerca de ellas. Pues, en efecto, algunos de sus pronunciamientos sobre este punto son realmente curiosos. Así, Bolzano afirma, por ejemplo, que —aunque hay cosas tales como proposiciones— éstas no poseen en rigor existencia real (*wirkliches Dasein*) [147]. Al sostener tal cosa, Bolzano no deja ciertamente de reconocer que los enunciados de la forma «Un X existe» se usan con gran frecuencia en sustitución de los enunciados de la forma «Hay un X»; pero opina que este uso de los mismos es un uso metafórico y que, contrariamente a lo sostenido por Kant, la existencia ha de considerarse en realidad un atributo [148]. Ya que, no obstante, mantiene asimismo que este atributo es simple e indefinible, es difícil hacernos una idea de lo que significa para él la denegación de que las proposiciones lo posean. Al parecer, con ello trata de desarmar posibles objeciones haciendo ver que las proposiciones no se hallan espacio-temporalmente localizadas. Pues a continuación escribe a guisa de explicación: «Las proposiciones carecen de existencia real, esto es, no son de tal naturaleza que puedan darse en un lugar o en un instante ni de cualquier otra manera como se pueda dar algo real (*d. h. sie sind nicht solches, das in irgend einem Orte, oder zu irgend einer Zeit, oder auf sonst einer Art als etwas Wirkliches bestände*)» [149]. Y en otro pasaje declara que todas las sustancias creadas, incluidos los espíritus, se dan en el espacio y en el tiempo [150]. Pero su modo de expresarse sugiere, por otra parte, que no desea *identificar* la existencia real con la localización espacio-temporal, de suerte que —aun concediéndole que las proposiciones no se den en el espacio ni en el tiempo— su doctrina continúa resultándonos ininteligible en su conjunto.

Otra curiosidad de la teoría de Bolzano es su doctrina de que los *Sätze-an-sich* han de hallarse compuestos de *Vorstellungen-an-sich* tal y como las oraciones se hallan compuestas de palabras [151]. La expresión *Vorstellung-an-sich* quiere decir literalmente «idea en sí», pero el lector no debe suponer que Bolzano conciba al *Satz-an-sich* como una *propositio mentalis* compuesta de *termini mentales*. Por el contrario, una *Vorstellung-an-sich* no es para él en modo alguno algo mental, pues —al igual que un *Satz-an-sich*— ni tan siquiera es algo realmente existente [152]. Quizás el mejor modo de describirlo fuera decir que se trata de un contenido ideal o de una idea en el sentido en que se dice que diversas personas pueden compartir una misma idea. Como Leibniz recalcó en sus *Nouveaux Essais*, II, I, 1, las ideas en tal sentido no advienen a la existencia ni dejan de existir al compás de los cambios de nuestra vida mental. Más aún, en la medida en que son puramente conceptuales, esto es, enteramente depuradas de elementos sensoriales, esas ideas objetivas serán para Bolzano los mismísimos universales acerca de los cuales

147 Ibid., §§ 19, 25 y 30.
148 Ibid., § 142, Anm. 2.
149 Ibid., § 25.
150 *Paradoxien der Unendlichkeit*, § 55.
151 *Wissenschaftslehre*, § 48.
152 Ibid.

disputaban los filósofos de la Edad Media. Los nominalistas tenían razón al alegar su inexistencia, mas los realistas la tenían también al denegar que fuesen meros nombres [153]. En estas observaciones de Bolzano hay su parte de buen sentido y su parte de excentricidad. Podemos acordar con él que las proposiciones envuelven universales (o conceptos objetivos) y que el estatuto de estos últimos es similar al de aquéllas. Pero tenemos asimismo que insistir en que las proposiciones han de poder versar acerca de individuos existentes en el espacio y en el tiempo. Algo funciona mal, sin duda, en una teoría que excluya semejante posibilidad. Y aunque es difícil captar con exactitud lo que quería decir Bolzano acerca del sujeto de una proposición histórica como la de que Sócrates murió por beber la cicuta, no parece sino que en ocasiones sostuviese la doctrina de que dicho sujeto es una entidad intemporal distinta del Sócrates real. Pensar tal es, sin más, equivocado. Parece ciertamente razonable describir a las proposiciones como a la vez intemporales y compuestas, pero ello no da pie para añadir que hayan de componerse de elementos constitutivos igualmente intemporales, de modo parecido a como los buques de acero se componen de planchas de acero.

Al ocuparse de las *Vorstellungen-an-sich* en el segundo de los grandes apartados de su obra, Bolzano hace algunas interesantes observaciones acerca de las propiedades y las relaciones. Una relación —nos dice— es una característica (*Beschaffenheit*) de un todo cuyas partes no poseen ellas mismas esa característica, si bien cualquiera de las dos partes posee, por así decirlo, la característica extrínseca de hallarse relacionada con la otra parte por medio de la relación en cuestión [154]. Por contraste, una propiedad, o característica intrínseca, es aquella que en ningún caso envuelve una relación. Aquí y en otros pasajes, Bolzano parece correr el riesgo de confundir un todo compuesto de sus partes con un conjunto integrado por sus miembros [155], mas lo que dice constituye, sin embargo, un aceptable primer paso para la elaboración de una teoría de las relaciones. En la misma sección se formula también la distinción entre relaciones simétricas y asimétricas y se llega a considerar la posibilidad de relaciones con más o menos de dos términos.

Más adelante, dentro de este apartado, se procede a un examen de las posibles relaciones entre ideas generales por respecto a su extensión, exponiéndose una serie de teoremas acompañados de sus demostraciones y un cierto número de diagramas ilustrativos [156]. La mayor parte de ellos se hallan extraídos, según Bolzano nos informa, del *Grundriss der Logik* de J. G. E. Mass de 1793. Consideremos por ejemplo el que figura, con el número 23, en último lugar. Cuando A y B constituyan un par de ideas concatenadas (*verkettete*) —esto es, cuando posean extensiones relacionadas entre sí de la manera que Gergonne designaba mediante el signo X— no-A y no-B se hallarán también concatenadas si, y sólo si, las extensiones de A y B no agotan conjuntamente el dominio de la idea más extensa posible, a saber, la de Algo. Pues para que no-A y no-B se hallen concatenadas es necesario y suficiente que haya (I) algo que se subsuma bajo ambas, (II) algo que se subsuma bajo no-A sin subsumirse bajo no-B y (III) algo que se subsuma

153 Ibid., § 51.
154 Ibid., § 80.
155 Ibid., § 66.
156 Ibid., § 105.

bajo no-B sin subsumirse bajo no-A. Mas la primera condición se satisface si las extensiones de A y B no agotan conjuntamente el universo del discurso, quedando en caso contrario insatisfecha. Y la segunda y la tercera condición se satisfacen en cualquier caso, toda vez que de la concatenación entre A y B se sigue que hay algo que se subsume bajo A sin hacerlo bajo E, pero haciéndolo bajo no-B y, de manera semejante, algo que se subsume bajo B sin hacerlo bajo A pero haciéndolo bajo no-A.

En contextos como éste, Bolzano hace un libre uso de la noción de extensión, que traduce por *Umfang*, apuntando que desde la publicación de la *Lógica de Port Royal* se ha asegurado erróneamente en casi todos los libros de lógica que la comprehensión y la extensión varían inversamente [157]. Evidentemente, tal doctrina sería errónea si quisiese decir que no podría haber más hombres (que los que ha habido, hay y habrá) a menos de reducirse el conjunto de los atributos que necesariamente pertenecen a todo hombre. Pero Bolzano basa su objeción en un género diferente de consideraciones. Según él, la comprehensión (*Inhalt*) de una idea no es, como afirmaban Arnauld y Nicole, el conjunto de los atributos necesariamente pertenecientes a algo que cae bajo esa idea, sino más bien el conjunto de los conceptos envueltos en su especificación [158]. Así, sostiene que la idea de hombre-que-conoce-todas-las-lenguas-vivas-europeas tiene una mayor comprehensión que la idea de hombre-que-conoce-todas-las-lenguas-europeas, pero también tiene a la vez una extensión mayor que la de esta última. En defensa de esta su redefinición de la noción de comprehensión. Bolzano alega que se halla exigida por la distinción kantiana entre juicios analíticos y sintéticos. Pero éste resulta en boca suya un argumento más bien pobre, puesto que por su parte no duda en proponer una nueva caracterización de la distinción entre analítico y sintético.

A fin de comprender la nueva definición de las proposiciones analíticas que Bolzano nos ofrece sería necesario comenzar por la consideración de su noción de clase de las proposiciones que se pueden obtener de una proposición dada por sustitución de uno o más elementos constitutivos de la misma [159]. De acuerdo con su propio ejemplo, si partimos de la proposición expresada por «El hombre Cayo es mortal» y consideramos únicamente reemplazable a su elemento constitutivo Cayo, determinaremos una clase cuyos restantes miembros serán proposiciones como las expresadas por «El hombre Sempronio es mortal» y «El hombre Tito es mortal». Dando ahora un paso más, si —como en este ejemplo— todos los miembros de la clase son verdaderos, o por lo menos lo son todos aquellos que cabría calificar de *gegenständlich* por referirse a objetos reales, Bolzano nos dirá que la proposición originaria es universalmente válida por relación al elemento o elementos constitutivos cuya sustitución hemos tomado en consideración. Si, por el contrario, todos los miembros de la clase fuesen falsos, la proposición originaria sería universalmente inválida. Si, finalmente, algunos de los miembros de la clase son verdaderos y otros falsos, a la proposición le corresponderá un grado intermedio de validez, igual a la proporción de proposiciones verdaderas contenidas en la clase (esta noción

157 Ibid., § 120.
158 Ibid., § 56.
159 Ibid., § 147.

de grado de validez está llamada a acreditar más adelante su importancia en la teoría de la probabilidad de Bolzano). Y cuando una proposición resulte ser o universalmente válida o universalmente inválida, se la considerará analítica por relación al elemento o elementos constitutivos cuya sustitución se tomó en cuenta, considerándosela sintética en caso contrario. Así, la proposición expresada por «Un hombre inmoral no merece ningún respeto» sería analítica respecto del elemento constitutivo significado por «hombre», dado que su sustitución únicamente arrojaría proposiciones verdaderas, mientras que la proposición expresada por «Un triángulo contiene ángulos cuya suma es dos rectos» sería sintética, pues no posee ningún elemento constitutivo cuya sustitución arroje únicamente proposiciones verdaderas o únicamente falsas. Bolzano admite abiertamente que la noción de proposición analítica así definida es harto más amplia que la de Kant, y añade que, si la parte de una proposición analítica considerada invariante (esto es, no susceptible de sustitución) únicamente contuviese nociones lógicas, acaso fuera conveniente describir a la proposición en su conjunto como lógicamente analítica o analítica en un sentido más estricto. Al parecer, juzga que este sentido de la analiticidad es el que más se asemeja al que quería Kant imprimirle. Pero, por lo demás, Bolzano no le concede en última instancia demasiada importancia, ya que no cree posible establecer una nítida demarcación entre nociones lógicas y extralógicas [160].

Este pasaje de la obra de Bolzano contiene un cierto número de detalles dignos de nota. El primero de ellos es un asunto de mera terminología. Bolzano ha definido el término «analítico» de manera que resulta aplicable a proposiciones falsas. Ello se opone a la práctica de Kant, pero no es difícil hacerse cargo de por qué lo consideraba razonable. Bolzano deseaba servirse de la pareja de vocablos «analítico» y «sintético» para dividir exhaustivamente el dominio de las proposiciones, y reparó en que —de acuerdo con la caracterización kantiana— las proposiciones que encierran una contradicción no serían analíticas ni sintéticas. El proceder de los filósofos posteriores ha seguido a Kant más bien que a Bolzano en este punto, con lo que parece que tendríamos o bien que resignarnos a conceder que entre «analítico» y «sintético» no se da una oposición de contradictoriedad o bien que asegurarnos de la exhaustividad de la dicotomía restringiendo su aplicación exclusivamente al caso de las verdades. En segundo lugar, la caracterización de las proposiciones analíticas por parte de Bolzano descansa en la ingenua presuposición de que una proposición ha de contener elementos constitutivos distinguibles en exacta correspondencia con todos y cada uno de los elementos constitutivos distinguibles de la oración que la expresa. Es cierto que a veces nos previene contra la clasificación de las proposiciones por su expresión lingüística, apuntando de pasada que oraciones como «La guerra es la guerra» podrían servir en ocasiones para expresar proposiciones sintéticas [161]. Pero en la práctica incurre con frecuencia en el desliz de referirse a oraciones cuando, de acuerdo con su propia teoría, debiera estar hablando de proposiciones. En un lugar nos dice que la proposición «La suma de todos los ángulos

160 Ibid., § 148.
161 Ibid., Anm. 1.

de un cuadrilátero regular arroja cuatro rectos» es analítica respecto del concepto *regular* aunque no lo reconociese como tal una persona ignorante de la geometría [162]. Aparte de esta forma más bien curiosa de expresarse, el ejemplo es realmente confundente. Pues Bolzano parece sostener que, si omitiéramos el adjetivo «regular», la oración que nos ofrece como ejemplo expresaría una proposición sintética, bastando la adición de esa superflua palabra para hacerla expresar una proposición analítica. En tercer lugar, Bolzano nos ha suministrado una definición de «analítico» tal que una proposición podría ser analítica por obra y gracia de una ley natural y hasta de un simple accidente. Consideremos, por ejemplo, la oración «Kant no fue un filósofo del siglo dieciocho que muriese el día del aniversario de su nacimiento». Si fuese el caso que ningún filósofo del siglo dieciocho haya muerto el día del aniversario de su nacimiento, todas las oraciones resultantes de sustituir el de «Kant» por otros nombres expresarían proposiciones verdaderas, con lo que la proposición expresada por la oración originaria sería analítica de acuerdo con la definición de Bolzano.

El rasgo más interesante y estimable de la discusión de la distinción entre lo analítico y lo sintético por parte de Bolzano es su reconocimiento del hecho de que hay ciertas características que responden a las proposiciones en virtud de su estructura. De acuerdo con su modo de hablar, una proposición podría ser universalmente válida por relación a la sustitución de ciertos elementos constitutivos pero no así por relación a la sustitución de ciertos otros de esos elementos. Esto resulta inteligible pero peca, no obstante, de confuso, y sería preferible decir que la validez universal (o validez, como acostumbran a abreviar los lógicos de nuestros días) corresponde primariamente a ciertos patrones estructurales o esquemas proposicionales y sólo secundariamente a las proposiciones que los ejemplifican. Paráfrasis semejantes son asimismo aconsejables respecto de lo que a continuación tiene Bolzano que decirnos acerca de la compatibilidad y la derivabilidad.

Si entre los elementos constitutivos de las diversas proposiciones que componen un grupo hay algunos cuya sustitución pueda llevarse a cabo en todo el grupo de modo que resulten nada más que proposiciones verdaderas, Bolzano nos dirá que las proposiciones originarias de ese grupo son compatibles por relación a los elementos constitutivos cuya sustitución hemos tomado en consideración, siendo en caso contrario incompatibles [163]. En los términos sugeridos hace un momento, ello quería decir que un grupo de esquemas proposicionales son compatibles, o —como los lógicos de nuestros días dicen a veces— pueden satisfacerse simultáneamente, si son de hecho conjuntamente ejemplificados por un grupo de proposiciones verdaderas; y que, cuando éste sea el caso, *cualquier* grupo de proposiciones que ejemplifique el de dichos esquemas proposicionales puede considerarse compatible en un sentido derivado. La noción de compatibilidad se halla, desde luego, estrechamente conectada con la noción de posibilidad aplicable a las proposiciones singulares, por lo que no es extraño ver cómo Bolzano pasa más adelante a definir una proposición posible como aquélla que resulta compatible con todas las verdades puramente generales (*Be-*

162 Ibid., § 367.
163 Ibid., § 154.

griffswahrheiten) [164]. Ya que a la vez define una proposición necesaria como aquella cuya negación es incompatible con las verdades puramente generales, no tiene al parecer otro remedio que concluir que la proposición expresada por «Kant no fue un filósofo del siglo dieciocho que muriese el día del aniversario de su nacimiento» no es necesaria, por más que pueda ser analítica por relación al elemento constitutivo Kant.

La noción de «secuencia» (*following*) de una proposición a partir de otra o más proposiciones es discutida por Bolzano inmediatamente a continuación de su caracterización de la compatibilidad y en términos muy semejantes a los de esta última. De acuerdo con su propia manera de expresarse, las proposiciones M, N, O, ... se siguen, o son derivables (*ableitbar*), de las proposiciones A, B, C, D, ... respecto de los elementos constitutivos i, j, ..., si todos los conjuntos de ideas que arrojen conjuntos de proposiciones verdaderas al sustituir a i, j, ... en A, B, C, D, ... hacen otro tanto al sustituir a i, j, ... en M, N, O, ... [165]. Dicho de otra manera, ello significa que una proposición llamada conclusión es implicada por un conjunto de proposiciones llamadas premisas si el argumento constituido por la asociación de las premisas y la conclusión ejemplifica un patrón argumental tal que todas sus ejemplificaciones con premisas verdaderas posean asimismo conclusiones verdaderas. En los tiempos recientes se ha expresado una idea similar estipulando que una fórmula podría considerarse consecuencia de otras fórmulas si, y sólo si, toda interpretación que verifique a estas últimas (esto es, las convierta en enunciados verdaderos) verifica asimismo a la primera. Mas la noción de consecuencia así definida no se identifica ya con la de derivabilidad. La razón por la que se ha creído necesario distinguirlas no podrá ser explicada con detalle hasta más adelante, mas por lo pronto podemos reparar en que hay algo que no marcha en la aplicación del vocablo «derivabilidad» a la relación definida por Bolzano. Pues, en efecto, no se puede decir con propiedad que una proposición sea derivable de un conjunto de premisas a menos que resulte posible establecer que esa proposición ha de ser verdadera si las premisas lo son, sin necesitar para ello establecer antes primero si las premisas y la proposición en cuestión son o no verdaderas. Mas la relación definida por Bolzano podría darse aun si no se cumpliera esta última condición. Así como, de acuerdo con sus definiciones, una proposición podría ser analítica por accidente, de la misma manera podría también una proposición seguirse de otra por accidente, esto es, de modo tal que la verdad de la proposición universal en que expresamos los resultados de la sustitución únicamente pueda conocerse examinando todos y cada uno de los resultados en concreto. Tal circunstancia se podría apreciar muy fácilmente si reparamos en el caso límite en el que la proposición llamada consecuencia no posea ningún elemento constitutivo común con las premisas. Pues entonces, de acuerdo con la definición de Bolzano, el hecho de que dicha proposición sea una consecuencia de las premisas dependería única y exclusivamente del hecho de ser verdadera. Bolzano no llega a explicitarlo así en la sección de su obra que dedica a la derivabilidad, pero en la anterior dedicada a la compa-

164 Ibid., §§ 119 y 182.
165 Ibid., § 154.

tibilidad afirma que una proposición falsa que no contenga ninguno de los elementos constitutivos susceptibles de sustitución en un cierto conjunto de proposiciones será incompatible con estas últimas [166], lo que —a tenor de la conexión establecida por él mismo entre las dos secciones— no es sino otra manera de expresar lo que acabamos de ver. Quizá Bolzano pase por alto el hecho llevado del deseo de asegurar en cualquier caso la vigencia de la relación de consecuencia por medio de una regla general. Pues, en una nota al final de esta sección, nos dice que cuando Aristóteles se servía de la expresión *συμβαίνει ἐξ ἀνάγκης* («se sigue de necesidad») para describir la relación de la conclusión con las premisas de un silogismo válido [167], incluso si esas premisas y esa conclusión fuesen por igual falsas, tenía sin duda que querer decir que *todo* argumento de la forma ejemplificada conduce a una conclusión verdadera con sólo que las premisas sean verdaderas [168].

El hecho de que la relación llamada por Bolzano *Ableitbarkeit* (y que nosotros llamaremos, más modestamente, la relación de «ser una consecuencia de») se pueda dar entre proposiciones falsas la distingue, de acuerdo con nuestro autor, de la relación de tener a algo por fundamento, ya que esta última sólo se podría dar entre verdades [169]. Pero ésta no es la única diferencia existente entre las mismas; pues la segunda, a diferencia de la primera, es asimétrica [170] e intransitiva [171]. Esto es, si A es el fundamento de B, no puede darse el caso de que B sea asimismo el fundamento de A; como tampoco puede darse el caso de que, si B es el fundamento de C, A sea también el fundamento de C. El fundamento de una verdad es lo que Aristóteles llamó su *διότι* y lo que algunos escolásticos llamaron su *principium essendi*, en cuanto diferente de los diversos *principia cognoscendi* por los que esa verdad puede llegar a sernos conocida [172]. La noción que Bolzano discute aquí reviste gran interés para la metafísica y la filosofía de la ciencia natural, pero nosotros no necesitamos detenernos en ella, ya que difícilmente cabría considerarla de la incumbencia de la lógica.

Tras haber definido la relación que dimos en llamar de ser una consecuencia, Bolzano pasa a formular —siempre dentro de la misma sección— una serie de principios generales concernientes a dicha relación, principios que demuestra a partir de sus definiciones. A este respecto, yerra al afirmar que ninguna proposición podría tener su propia negación por consecuencia, ya que ninguna sustitución o conjunto de sustituciones que hagan a la primera verdadera podrían también hacer verdadera a la segunda. Pues, en aquel caso especial en el que la proposición considerada revistiese la forma de una contradicción, ningún género de sustituciones podría tornarla verdadera, con lo que quedaría trivialmente establecido que ninguna sustitución puede hacer de ella una verdad sin convertir también en una verdad a toda otra proposición. En cambio, corrige de la manera apropiada a Aristóteles cuando dice que ninguna proposición, *salvo aquellas que sean universalmente válidas*, podría ser consecuencia al mismo tiempo de una proposición

166 Ibid., § 154 (20).
167 *An. Priora*, I, 1 (24b19), mas véase en contra de ello *An. Pr.* II, 4 (57a36-40).
168 *Wissenschaftslehre*, § 154, Anm. 1.
169 Ibid., y § 198.
170 Ibid., § 162.
171 Ibid., § 203.
172 Ibid., § 198, Anm.

y de la negación de esta última. Y enuncia la tesis general de que si una proposición es consecuencia por igual de las premisas A, B, C, D, ..., X y A, B, C, D, ..., no-X será asimismo consecuencia de las premisas A, B, C, D, ..., tomadas por sí solas. Otros interesantes teoremas demostrados en esta sección son el principio de transitividad de la relación de ser una consecuencia y una generalización del principio de la reducción indirecta de los silogismos, a saber, el teorema de que si M es una consecuencia de A, B, C, D, ..., entonces no-A será una consecuencia de B, C, D, ..., no-M. Si una proposición es consecuencia de un conjunto de proposiciones pero no de ninguna selección de entre las mismas, Bolzano llama a esta relación de consecuencia exacta o adecuada, demostrando que en dicho caso ni la consecuencia ni ninguna de las premisas podría ser universalmente válida. Esta última consideración, lo mismo que algunas de las precedentes, sugiere con fuerza la posibilidad de describir una proposición universalmente válida como una consecuencia, en el sentido inexacto de la relación, de cualquier conjunto de premisas. Pero Bolzano no llega a extraer tal corolario.

En una ulterior sección, Bolzano introduce la convención de que la figura

$$\frac{\text{A, B, C, D, ...}}{\text{M}}$$

se puede usar para representar el hecho de que la proposición M es una consecuencia de las proposiciones A, B, C, D, ... [173]. A continuación, y sirviéndose de semejante notación, enuncia el teorema de que de

$$\frac{\text{A, B, C, D, E, F, G, ...}}{\text{M}}$$

es posible concluir

$$\frac{\text{A, B, C, D, ...}}{\text{Si E, F, G, ..., entonces M.}}$$

Se trata aquí de una generalización del principio de condicionalización, que los estoicos fueron los primeros en formular pero se hallaba ya asumido por Aristóteles. Otro de los teoremas de Bolzano podría ser expresado, valiéndonos de la misma notación, mediante el enunciado de que de

$$\frac{\text{A, B, C, D, ...}}{\text{M}} \quad \text{y} \quad \frac{\text{H, J, K, ...}}{\text{no-M}}$$

es posible concluir

$$\frac{\text{A, B, C, D, ...}}{\text{No a la vez H y J y K y ...}}\ .$$

173 Ibid., § 223.

Ya que su definición de la relación de consecuencia (que él identifica con la de derivabilidad) abre la puerta a tantos patrones de inferencia como leyes de la naturaleza nos sea dado descubrir, Bolzano renuncia a enumerar todos los tipos posibles de argumentos válidos. Mas reconoce que, en una obra que pretende presentarse como un tratado de lógica, está obligado a ofrecer alguna caracterización de los géneros de argumentación que comúnmente se consideran característicos de la lógica formal, cosa que hace agrupándolos bajo trece epígrafes [174]. El resultado de su tratamiento no es fácil de seguir, y sería difícil concederle que haya prestado alguna contribución al avance de la ciencia. Ya que, como hemos visto, Bolzano no creía posible trazar una clara división entre lo formal y lo material, no es sorprendente que sus conclusiones no se hallen organizadas bajo la inspiración de ningún principio fácilmente reconocible. Pero es interesante preguntarse por qué un filósofo tan evidentemente dotado para la investigación no logró progresar en esta parte de su obra.

La explicación parece radicar en que Bolzano, como Leibniz, se hallaba obsesionado por un modelo de proposición al que trató de reducir forzadamente toda otra clase de proposiciones. Toda proposición —nos dice— ha de poseer sujeto, cópula y predicado (*Underlage, Bindeglied, Aussageteil*), pero concibe al predicado como una característica (*Beschaffenheit*) que ha de representarse en el lenguaje mediante un nombre abstracto, lo que le lleva a hablar de *poseer* (*haben*) como la cópula encargada de vertebrar toda proposición sin excepción [175]. De acuerdo con sus análisis, «Dios existe» significa que Dios posee existencia, «Sócrates era sabio» que Sócrates-en-tiempo-de-pasado posee sabiduría, «Alcibíades no era sabio» que Alcibíades-en-tiempo-de-pasado posee falta-de-sabiduría, «Algún hombre es sabio» que la idea de un hombre que posee sabiduría posee realización (*Gegenständlichkeit*), «La conjetura de Goldbach es probablemente verdadera» que la proposición de que la conjetura de Goldbach posee verdad posee probabilidad, etc., etc., etc. [176]. En la elaboración de semejantes reducciones, Bolzano acredita no poco ingenio. Algunas de sus observaciones incidentales (por ejemplo, acerca de las proposiciones conceptuales y perceptuales) podrían incluso ser valiosas para la epistemología. Pero es obvio que un programa como el suyo estaba abocado a arruinar la distinción entre forma y contenido ganada por los filósofos anteriores a él. Pues su insistencia en considerar a todas las proposiciones como ejemplificaciones de un único modelo acabaría surtiendo dos curiosos efectos. En primer lugar, tornaba inservible el patrón sujeto-predicativo para cualquier propósito de clasificación de las proposiciones. Y, en segundo lugar, hacía necesaria la expresión de nociones usualmente consideradas como formales (como, por ejemplo, las de negación y particularidad) mediante signos destinados a jugar en sus fórmulas reductivas idéntico papel que el de los signos ordinariamente reservados para la expresión de nociones materiales (como, por ejemplo, la de sabiduría). Es comprensible, pues, que no lograra dar con ningún principio mediante el que determinar qué sea formal y qué sea material.

Así como Bolzano puede considerarse como un continuador de algu-

174 Ibid., §§ 225-53.
175 Ibid., § 127.
176 Ibid., §§ 132-44. Los ejemplos propuestos no proceden todos ellos del texto de Bolzano.

nos de los intereses leibnizianos, de la misma manera John Stuart Mill (1806-73) podría considerarse como representante de otra de las tendencias prekantianas. Su *System of Logic*, cuyo subtítulo lo describe como «una visión conjunta de los principios y los métodos de la investigación científica», ejerció gran influjo desde la fecha de su primera edición, en 1843, por constituir un serio intento de exposición de la lógica de forma consistente con la tradición empirista de la filosofía británica. Como cabría esperar, la mayor parte de la obra se halla dedicada a la caracterización de la inducción y la metodología de las ciencias naturales y sociales. Pero en sus dos primeros libros —en que se ocupa de los nombres, las proposiciones y el razonamiento—, Mill se detiene a ofrecernos una visión sistemática de la lógica formal, en lugar de proceder perentoria y despectivamente a descalificarla como hicieron la mayor parte de sus precursores empiristas. Y así como en su posterior *Utilitarianism* creyó necesario modificar el hedonismo ético heredado de Bentham y su propio padre, también ahora se esfuerza por pulir el empirismo (o experiencialismo, como gustaba de denominarlo) liberándolo del nominalismo que lo trababa desde los días de Locke y presentando una teoría de la silogística que permitiera su acomodo como un apartado respetable, aunque subordinado, del cuerpo de la lógica. Mill no estaba dispuesto, desde luego, a abandonar ninguno de los presupuestos básicos de la filosofía empirista, de la que en algunos aspectos fue —como veremos— un exponente más radical que cualquier otro adepto de la misma. Pero en filosofía, como en todo, fue antes que nada un liberal que deseaba hacer justicia a las opiniones de los filósofos ajenos a su propia tradición. Así, como *motto* de su primer libro aduce unos pasajes en los que Condorcet y Hamilton se refieren a la deuda del mundo moderno para con la escolástica por su ejemplo de precisión y sutileza, añadiendo en el texto que los escolásticos «a pesar de las imperfecciones de su filosofía, no han tenido rival en la construcción de un riguroso lenguaje técnico» y «sus definiciones, por lo menos en lógica, aun si nunca constituyeron otra cosa que un primer paso en la materia, rara vez han podido... ser revisadas como no fuera para empeorarlas» [177].

Al hablar de nominalismo, Mill piensa especialmente en la *Computatio sive Logica* de Hobbes, a quien describe como «uno de los más perspicaces y consecuentes pensadores que ha dado este país e incluso el mundo entero». Su insatisfacción ante aquella obra se centra particularmente en la doctrina de que «lo que toda proposición da a entender es la creencia del que habla en que el predicado es un nombre de la misma cosa nombrada por el sujeto» (esto es, la doctrina de Ockham y acaso también la de Abelardo). Mill llega a admitir que lo que Hobbes afirma constituye «el único análisis rigurosamente cierto de todas las proposiciones sin excepción», mas prosigue advirtiendo:

« Las únicas proposiciones de las que el principio de Hobbes da suficientemente cuenta son las de esa clase, reducida y poco importante, en que el predicado y el sujeto son nombres propios... Pero se trata de una teoría desgraciadamente inadecuada para enfrentarse con cualesquiera otras. El hecho de que alguna vez se haya pensado lo contrario, sólo puede explicarse por la escasa o nula atención que

177 *System of Logic*, I, II, 4.

Hobbes, juntamente con el resto de los nominalistas, prestó a la *connotación* de las palabras, buscando exclusivamente su significado en lo que éstas *denotan*, como si todos los nombres fueran (cosa que, en rigor, sólo sucede con los nombres propios) signos que hayan de recaer sobre individuos y como si entre un nombre propio y un nombre general no existiese otra diferencia que la de denotar el primero un solo individuo y el segundo un número mayor de ellos»[178].

En la jerga de Mill, todos los términos son por igual llamados nombres y se dice de ellos que denotan las cosas a las que nombran (esto es, a las que se refieren, si se trata de términos singulares, o a las que se aplican, si se trata de términos generales). Pero los términos generales como «hombre» y «sabio», en cuanto diferentes de los nombres propios como «Sócrates» o los nombres abstractos singulares como «sabiduría», no sólo denotan cosas sino también connotan atributos de dichas cosas[179]. En una nota al pie, Mill apunta que el verbo latino *connotare* significaba en la lógica medieval «designar en adición», por lo que acaso desease dar a entender con su nuevo vocablo técnico que la connotación de atributos por parte de los nombres generales es algo adicional a la tarea de denotar que todos los nombres ejecutan. Pero aclara que su connotación es lo que de ordinario llamamos el significado de tales términos generales, insistiendo en que aquélla detenta una prioridad lógica sobre la denotación de los mismos: «cuando la humanidad fijó el significado de la palabra sabio, nadie pensaba concretamente en Sócrates»[180]. En resumidas cuentas, pues, «denotación», tal como Mill se sirve del vocablo, se corresponde con lo que los lógicos medievales llamaban *suppositio personalis*, en tanto que «connotación» se corresponde con el uso que éstos hacían del vocablo *significatio* en conexión con los *termini communes*.

Para Mill, las definiciones propiamente dichas son siempre definiciones nominales, esto es, aclaraciones del significado de los nombres generales allí donde tales significados admitan ser analizados; y lo que algunos filósofos han llamado definiciones reales, o definiciones de cosas, son tan sólo definiciones nominales acompañadas de presunciones acerca de cuestiones de hecho:

« La definición es una proposición puramente idéntica, que sólo proporciona información acerca del uso del lenguaje y de la que no cabe extraer ninguna conclusión relativa a cuestiones fácticas. El postulado que las acompaña afirma, en cambio, un hecho, lo que podría entrañar consecuencias de la mayor importancia. Dicho postulado afirma la existencia actual o posible de cosas que se hallan en posesión de la combinación de atributos expuesta en la definición; y, si esa afirmación es verdadera, podría servir de fundamento suficiente sobre el que edificar toda una fábrica de verdades científicas»[181].

Lo que nos dice Mill en este punto se asemeja a las observaciones de Leibniz y Saccheri acerca del problema de la definición, pero se halla expresado con un mayor vigor y su influjo ha sido mucho más considerable. Tras el libro de Mill se hizo difícil volver a oír de la doctrina de la definición real.

---

178 Ibid. V, 2.
179 Ibid. II, 5.
180 Ibid. V, 2.
181 Ibid. VIII, 5.

Mill define una proposición como aquel fragmento de discurso en el que un predicado es afirmado o denegado de un sujeto [182], y trata de justificar la estrechez de su definición afirmando que el esquema disyuntivo de proposición podría ser reducido al condicional y éste al sujeto-predicativo, ya que una oración de la forma «Si A es B, C es D» resulta interpretable como la abreviatura de una aserción de la forma «La proposición C es D es una legítima inferencia de la proposición A es B», con lo que quedaría asimilada por su índole lógica a otras muchas aserciones en las que una proposición oficia de sujeto [183]. Gran parte de lo que Mill nos dice aquí, y en otros lugares de su obra, acerca de las proposiciones únicamente es aplicable a los contenidos proposicionales.

De entre las proposiciones, algunas son lo que Mill llama puramente verbales. Mediante dicho calificativo no pretende insinuar que se hallen expresadas por medio de palabras más bien que mediante otra clase de signos, ni tampoco que versen acerca de palabras en el mismo sentido en que lo hacen las aserciones de los filólogos, sino tan sólo que «es posible desplegar su contenido a partir del significado de los términos usados», por lo que pueden ser objeto de aserción sin necesidad alguna de investigación de hechos extralingüísticos. Tales proposiciones son lo que los lógicos antiguos llamaban proposiciones esenciales, esto es, aserciones tales como «El hombre es racional» en las que el predicado constituye la definición del sujeto o parte de ella. Pero Mill nos advierte que —lejos de tratarse, como los lógicos antiguos opinaban, de proposiciones de la máxima importancia— esas proposiciones no nos suministran información alguna o, a lo sumo, la suministran acerca de los nombres más bien que acerca de las cosas a que éstos se refieren o se aplican [184].

Las proposiciones verbales se identifican obviamente con las que Locke llamó triviales y Kant analíticas, pero la calificación de «verbales» y la insinuación de que podrían suministrar información acerca de los nombres introduce una infortunada confusión. Si la expresión verbal «El hombre es racional» se usara de hecho alguna vez para suministrar información acerca del significado de las palabras «hombre» y «racional», la proposición expresada en dicho caso no sería analítica y trivial, sino sintética e instructiva o, en la fraseología de Mill, real. Pues las palabras «hombre» y «racional» son en algún sentido también cosas, y el hecho de que nos sirvamos de ellas como acostumbramos a hacerlo es en definitiva contingente. Y no es este el único punto en el que Mill se aleja de la posición de aquellos dos predecesores, a quienes declara y cree seguir en su caracterización de las proposiciones verbales. Dejando a un lado el caso de estas últimas, tanto Locke como Kant concedían la posibilidad de que algunas proposiciones instructivas fueran intuitivamente conocidas, mientras que Mill sostiene que todas las proposiciones de ese género se conocen por inducción. El mismísimo principio de no-contradicción —nos dice— no es una ley *a priori* del pensamiento, como Sir William Hamilton y los filósofos alemanes lo consideran, ni tampoco se trata de una mera proposición verbal, como sostienen los nominalistas, sino que es «como tantos otros axiomas, una de nuestras primeras y más familiares generalizaciones

182 Ibid. I, IV, 1.
183 Ibid. 3.
184 Ibid. VI, 4.

a partir de la experiencia»[185]. Mas si hasta el principio de no-contradicción se convierte en una verdad empírica, no parece en rigor que quede ya lugar para las verdades no-empíricas

A la hora de pasar a la consideración del raciocinio, Mill se contenta con identificar a este último con el silogismo[186], tal y como se contentaba hace un momento con encerrar a todas las proposiciones en la forma de sujeto-predicado. Pero rechaza por entero la filosofía tradicional de la lógica formal. En primer lugar afirma:

«Quienes consideran el *dictum de omni* como fundamento del silogismo trasladan al dominio de los argumentos el mismo punto de vista erróneo que adoptara Hobbes en el dominio de las proposiciones»[187].

Y más adelante añade:

«Hay que conceder que en todo silogismo, considerado como un argumento tendente a demostrar la conclusión, concurre una *petitio principii*. Cuando decimos

Todos los hombres son mortales,
Sócrates es un hombre,
luego
Sócrates es mortal,

los adversarios de la teoría silogística aducen el incontrovertible reparo de que la proposición Sócrates es mortal se halla presupuesta en la asunción más general Todos los hombres son mortales»[188].

Del segundo alegato se desprende que el razonamiento silogístico no constituye en realidad una inferencia, conclusión ésta que el autor no titubea en aceptar:

«Toda inferencia procede de lo particular a lo particular. Las proposiciones generales no son sino inventarios de inferencias de esa clase realizadas con anterioridad y fórmulas compendiadas con el fin de facilitar nuevas inferencias. En consecuencia, la premisa mayor de un silogismo es una fórmula de ese género; y la conclusión no es una inferencia extraída *a partir de* ella, sino una inferencia realizada *de acuerdo con* ella, siendo su auténtico antecedente lógico —o premisa— los hechos a partir de los cuales se obtuvo por inducción la proposición general. Dichos hechos, y las proposiciones particulares que los representaban, pueden haberse olvidado; pero subsiste de los mismos un registro cuyo fin no es exactamente describirlos, sino ayudarnos a clasificarlos, y en el que aquellos hechos fueron —al sernos conocidos— considerados suficiente garantía de una inferencia dada. A tenor de las indicaciones de ese registro, nosotros extraemos nuestra conclusión, que será a todos los efectos una conclusión extraída de los hechos olvidados. Para poder llevar esto a cabo, resulta imprescindible una correcta lectura del registro; y las reglas del silogismo no son sino un conjunto de precauciones destinadas a asegurarnos de esa corrección»[189].

Estos pasajes acerca de la silogística han sido frecuentemente atacados por los críticos de Mill, y hay que reconocer que se hallan plagados de confusiones. En primer lugar, Mill parece afirmar que la teoría del silo-

185 Ibid. II, VII, 5.
186 Ibid. II, 1.
187 Ibid. 3.
188 Ibid. III, 2.
189 Ibid. II, III, 4.

gismo expresada en el *dictum de omni et nullo* yerra por prestar atención únicamente a la denotación de los términos y presentar la inferencia silogística como si ésta concluyese aseverando acerca de los miembros de una clase lo que sabemos de antemano verdadero para todos sus miembros. Tras de un comienzo semejante, cabría haber esperado de Mill que prosiguiera sosteniendo que un enunciado universal sólo podría servirnos de premisa de una inferencia si nos ofrece información acerca de una conexión necesaria entre los atributos connotados por sus términos, como en algún que otro lugar parece inclinarse a afirmar [190]. Pero, en el segundo de los pasajes que se acaban de citar, retorna —en lugar de seguir aquella línea— a la errónea concepción de que un enunciado universal no es sino un sumario de los casos que se engloban en ella. Y, finalmente, en el tercer pasaje parece tratar de combinar ambos puntos de vista manteniendo que los enunciados universales son a la vez registros o compendios de observaciones pasadas y leyes o principios de acuerdo con los cuales podríamos discurrir de lo particular a lo particular. Las reglas del silogismo se supone que contribuyen de algún modo a regular nuestro uso de los enunciados universales en semejantes inferencias; pero no queda claro en absoluto en qué consista esa contribución, surgiendo en este punto la sospecha de que el propio Mill se halla perplejo ante la interpretación adecuada de su expresión «inferencia de lo particular a lo particular». Pues mientras, al comienzo de su tercer pasaje, da la sensación de estarse refiriendo a un argumento como el que se podría expresar diciendo «Sócrates es un hombre; luego Sócrates es mortal», la continuación del pasaje sugiere más bien que está pensando en un argumento como el que se podría expresar diciendo «Todos los demás hombres inventariados —incluidos, por ejemplo, Tales, Solón y Pitágoras— han resultado ser mortales; luego Sócrates, que es un hombre, es mortal». En el argumento del primer tipo se extrae una conclusión singular a partir de una premisa singular de acuerdo con una ley sobreentendida, o principio no formalmente explicitado, pero quienquiera que desease agregar dicha ley como premisa mayor podría convertir el argumento en un razonamiento formalmente válido como los que Mill denomina silogismos. En el argumento del segundo tipo se cita un inventario de observaciones en apoyo de una conclusión singular, mas semejante conclusión no se podría seguir en ningún caso —ni formal ni informalmente— de aquel inventario, a menos que lograra demostrarse que este último justifica la asunción de una ley como la exigida a título de principio de un argumento del primer tipo.

La confusión y falta de claridad de la teoría de Mill no puede ser negada, pero en este caso —como en tantos otros— la dificultad surge por no haber sabido nuestro autor reconocer abiertamente la incompatibilidad entre una intuición nueva y brillante y una vieja y detestable tradición, precisamente aquélla en la que él mismo se ha educado. Como un converso del paganismo al cristianismo que se resiste a creer que todos sus antecesores se hayan condenado, trata, así, de conjugar lo viejo y lo nuevo en una mescolanza singular. Por una parte, pues, rechaza tanto la interpretación convencionalista de la lógica recibida de Hobbes cuanto la interpretación psicologista de las leyes del pensamiento procedente de

190 Ibid. I, V, 2 y III, V, 6.

los idealistas alemanes y sus seguidores ingleses; pero, por otra parte, se muestra incapaz de sugerir otra caracterización de la objetividad de los principios de la lógica que aquélla que consiste en reducirlos a generalizaciones empíricas. En la tradición empirista era sumamente frecuente la presunción de que ningún enunciado no-empírico podría suministrar información acerca del mundo, y hemos de ver más adelante que algunos filósofos posteriores, que —como Mill— rechazan por igual el convencionalismo y el psicologismo, siguen también a éste en su intento de tratar a la lógica como una ciencia empírica. Pero, a pesar de todo ello, cuando llega la ocasión de ocuparse del raciocinio Mill no deja de ser consciente de la necesidad de ofrecer alguna caracterización de la inducción, sugiriendo en este contexto que las reglas de la lógica formal han de considerarse como principios acerca de nuestro uso de esos otros principios no-formales de inferencia que aceptamos sobre bases inductivas. Esta nueva sugerencia resulta inconsistente con la anterior según la cual los principios de la lógica formal serían ellos mismos generalizaciones de primer orden a partir de la experiencia, mas no carecería de buen sentido si la distinción entre principios de primero y segundo orden fuera llevada hasta sus últimas consecuencias. Pues podría entonces concederse que, por más que nuestro conocimiento de los principios de la lógica formal no sea empírico en el sentido ordinario de este último adjetivo, se basa de algún modo en la experiencia, toda vez que cobramos noticia de esos principios al hallarlos implícitos en las reglas de lenguaje inconscientemente adoptadas en el curso de nuestras experiencias, reglas sin las que no podríamos practicar deliberadamente la inducción como un recurso de estrategia científica. Sería mucho decir que Mill llegó expresamente a describir la lógica formal como una ciencia cuyas proposiciones son ellas mismas principios de segundo orden acerca de principios de inferencia; pero esta concepción se halla al menos sugerida por algunas de sus observaciones y, en lo que a nosotros se refiere, nada hay que objetar en contra suya.

En esta sección y la anterior hemos podido pasar revista a algunas interesantes aportaciones realizadas durante el siglo y medio que siguió a los denodados esfuerzos leibnizianos en pro de la construcción de un cálculo lógico. Pero se ha de admitir que en el transcurso de ese período no se logró, en definitiva, ningún firme progreso. Más de una vez se ha sugerido que semejante estancamiento se debió al predominio de la influencia filosófica de Hume, Kant y Hegel. Por nuestra parte no tratamos de defender la actitud para con la lógica de ninguno de estos autores, pero creemos no obstante que la acusación contra ellos peca de injusta. Sin duda su influencia no engendró sino hostilidad hacia la naciente lógica matemática, pero en la época concurrían asimismo otras circunstancias desfavorables. Aun si Leibniz había adelantado un cierto número de valiosas sugerencias, un seguro progreso en la materia no era en rigor posible hasta tanto la matemática no se hubiera desarrollado lo suficiente como para facilitar el grado de abstracción en el que aquel pionero de la lógica moderna deseaba instalarse. Cuando la lógica revivió a mediados del siglo XIX, el nuevo impulso habría de provenir de los matemáticos familiarizados con los avances en el dominio de su propia especialidad más bien que de los filósofos enzarzados en la controversia entre el empirismo y el idealismo. En nuestro próximo capítulo, por tanto, nos pro-

ponemos abordar el desarrollo de la abstracción matemática en la medida en que resulta relevante para el tema central que nos ocupa, a cuyo fin habremos de saltar vertiginosamente desde la Grecia clásica a tiempos relativamente recientes.

VI. LA ABSTRACCION MATEMATICA

1. GEOMETRÍA Y AXIOMÁTICA.

El más importante apartado de la matemática para los griegos era la geometría; y, en los *Elementos* VII-X de Euclides, hasta los teoremas de la aritmética pura —por ejemplo, teoremas relativos a los números primos— llegan a presentarse como proposiciones acerca de la conmensurabilidad o inconmensurabilidad de líneas. Se ha sugerido que el comparativo descuido de las restantes ramas de la matemática por parte de los griegos se debió a la deficiencia de su sistema de numeración, pero parece más probable que la geometría fuese desarrollada en primer término por no requerir un esfuerzo de abstracción comparable al requerido por el álgebra y el análisis. Veremos en seguida que incluso los matemáticos de épocas muy posteriores han tenido dificultad en liberarse de una excesiva supeditación a la intuición espacial. Mas, comoquiera que ello sea, los *Elementos* de Euclides representaron durante muchos siglos el paradigma del rigor para toda demostración, de suerte que habremos de comenzar por la consideración de dicho paradigma aun si nuestro objetivo en este capítulo es ocuparnos principalmente de ulteriores desarrollos.

Evidentemente, el descubrimiento de los teoremas que figuran en los *Elementos* no fue exclusivamente obra de Euclides. Existían tratados de geometría con anterioridad a los comienzos del siglo III a. de C. en que Euclides trabajó; y sabemos, por ejemplo, que la bella teoría de la proporción de que se sirve en su libro V proviene de Eudoxo, joven contemporáneo de Platón. El renombre de Euclides obedece a su magistral intento de derivar todos esos descubrimientos previos a partir de un número relativamente pequeño de nociones comunes (*κοιναὶ ἐννοίαι*) y postulados (*αἰτήματα*). Las nociones comunes son proposiciones que se consideran fundamentales para todas las ciencias, como por ejemplo la de que el todo es mayor que la parte; y los postulados son cinco proposiciones específicas de la geometría que se nos pide concedamos de entrada. Con posterioridad, ambos conjuntos de proposiciones primitivas recibirían en ocasiones la denominación común de axiomas. Hay que reconocer que Euclides asumió en diversos lugares proposiciones geométricas que ni se hallan incluidas entre sus axiomas ni se demuestra que se sigan de ellos, como cuando da, por ejemplo, por supuesto en la demostración de la primera proposición del libro I que los círculos trazados tomando como centro los dos extremos de una línea recta y con radios de longitud igual a la de esta última se han de intersectar en dos puntos. Pero difícilmente puede cabernos duda de que trató de enumerar inicialmente todos sus presupuestos extralógicos y pasar luego a derivar a partir de ellos sus teoremos sirviéndose exclusivamente de la lógica, pues cualquier otro proceder hubiera sido inconsistente con la pretensión de rigor que resplandece a todo lo largo de su obra. El uso de una figura puede ayudarnos a concentrar nuestra atención en el curso de una demostración, y por razones psicológicas puede

llegar incluso a hacerse necesario recurrir a ella con propósitos heurísticos; pero si aceptáramos proposiciones simplemente por parecernos evidentes en virtud de la consideración de una figura, estaríamos de hecho incrementando sin la debida explicitación nuestro originario repertorio de axiomas y ello sería totalmente contrario al espíritu que informa la geometría griega.

Euclides y todos sus sucesores hasta el siglo pasado presumían que sus postulados eran verdades universales y necesarias acerca del espacio físico. Pero hay uno de entre esos postulados que siempre pareció más complicado que los restantes. Se trata del famoso postulado de las paralelas: «Si una línea recta que corta a otras dos rectas determina del mismo lado ángulos internos que sumen menos que dos rectos, las dos últimas rectas se encontrarán, si se las prolonga al infinito, del lado en que los ángulos suman menos que dos rectos». Ya en la antigüedad, Ptolomeo y Proclo trataron ambos de hacer ver que esta proposición no debía figurar como postulado ya que podía ser demostrada a título de teorema, y otros muchos intentos similares de perfeccionar la obra de Euclides fueron debidos a geómetras posteriores [1]. Uno de los más interesantes es el de Saccheri en su libro *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* de 1733. Su intento se basa, como él mismo nos dice, en el principio de la *consequentia mirabilis* usado ya en su *Logica Demonstrativa*. Y aunque no lograra establecer, como su autor creía, la verdad necesaria del postulado de las paralelas, su obra merece ser recordada como la primera en la que se procede a demostrar teoremas pertenecientes a la geometría no-euclidiana.

La mayor parte de los geómetras precedentes que pretendieron haber demostrado el postulado de las paralelas asumían como premisa explícita o implícita alguna otra proposición de fuerza deductiva comparable a la que trataban de demostrar. John Wallis, por ejemplo, daba por sentada la posibilidad de que, para cualquier figura dada, exista una figura similar de magnitud indefinida. La empresa de Saccheri fue mucho más audaz: se proponía demostrar que el postulado de las paralelas es una verdad necesaria por seguirse inclusive de su propia negación. En orden a formular dicha negación de manera conveniente no eligió como punto de partida el enunciado euclídeo del postulado, sino un equivalente de este último sugerido por una figura de la edición de Clavius. En los extremos de una línea recta AB se levantan del mismo lado dos perpendiculares AC y BD de la misma longitud, uniéndose a continuación los puntos C y D por medio de otra recta. En el cuadrilátero resultante los ángulos en C y D habrán de ser iguales, pudiendo demostrarse que el postulado euclídeo de las paralelas resulta equivalente a la suposición de que ambos son ángulos rectos. Saccheri pasa luego a examinar las otras dos hipótesis posibles, a saber, (I) que los ángulos sean obtusos y (II) que sean agudos. Una y otra hipótesis se corresponden, respectivamente, con las dos variedades de la geometría no-euclidiana más adelante distinguidas con los calificativos de elíptica e hiperbólica; y a lo largo de su investigación tiene ocasión de demostrar algunos teoremas característicos de ambas geometrías. En la proposición IX demuestra, por ejemplo, que en la hipótesis del ángulo

---

1 T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, I, pp. 202 y ss., pasa revista a una serie de intentos dignos de mención.

obtuso los ángulos internos de un triángulo suman más de dos rectos, en tanto que en la hipótesis del ángulo agudo suman menos de dos rectos. Pero su intento de demostrar el postulado de las paralelas partiendo de la posibilidad de esas alternativas, determinadas por su negación, ya no es en cambio tan feliz. Por lo que se refiere al primer caso, parece lograr fácilmente el resultado deseado al demostrar en la proposición XII que la hipótesis del ángulo obtuso implica el postulado de las paralelas (lo que encierra una contradicción, ya que el postulado de las paralelas implica por su parte la hipótesis del ángulo recto). Pero esto sólo lo consigue sobre la base de asumir tácitamente que una línea recta pueda ser prolongada indefinidamente hasta donde deseemos. Semejante suposición resulta en realidad inconsistente con la hipótesis tomada en consideración, ya que en una geometría elíptica tendrá que haber un máximo de longitud para una línea recta. La segunda hipótesis plantea aún más dificultades y, aunque después continúa hablando como si todo hubiese dependido de la *consequentia mirabilis*, el caso es que Saccheri ni tan siquiera trata de demostrar que dicha alternativa implique el postulado de las paralelas. Pero, en la proposición XXIII, pretende haber probado que envuelve una consecuencia contradictoria. Si su demostración hubiese sido satisfactoria, habría bastado por lo pronto la proposición XII para establecer la verdad del postulado de las paralelas; pero, como hemos visto, hay una deficiencia en su razonamiento.

No se sabe de cierto si la obra de Saccheri ejerció alguna influencia sobre los matemáticos que desarrollaron la geometría no-euclidiana en el siglo XIX, pero el libro podía encontrarse en un cierto número de bibliotecas y había sido reseñado en algunas obras de carácter informativo como la *Histoire des mathématiques* de Montucla, de 1758, y la *Conatuum Praecipuorum Theoriam Parallelarum Demonstrandi Recensio* de Klügel, de 1763 [2]. No es imposible que llegase de este modo a llamar la atención de Gauss (1777-1855), que fue el primero en reconocer la posibilidad de un desarrollo consistente de la geometría no-euclidiana, considerando que la cuestión podía zanjarse comprobando si los ángulos internos de un triángulo en el espacio físico son o no iguales a dos rectos. Pero en este dominio de la investigación matemática, como en tantos otros en los que realizó brillantes descubrimientos, Gauss no llegó a publicar nada. La primera obra impresa que desarrolla por su cuenta una forma de geometría no-euclidiana es un trabajo de Lobachevsky publicado en 1826. El trabajo de Lobachevsky opera con la hipótesis del ángulo agudo (es decir, con la geometría hiperbólica en la que por un punto exterior a una recta dada pueden trazarse dos líneas paralelas a esa recta). El desarrollo de la hipótesis del ángulo obtuso (es decir, de la geometría elíptica en la que por un punto exterior a una recta dada no se puede trazar ninguna línea paralela a dicha recta y toda línea recta se encuentra consigo misma cuando se la prolonga suficientemente) había de esperar a Riemann. De hecho, no fue sino con la publicación póstuma, en 1867, de la disertación inaugural de Riemann *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* de 1854 cuando la geometría no-euclidiana fue tomada en serio por

[2] Corrado Segre, "Conjetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-euclidera", *Atti della R.A. delle Scienze di Torino*, XXXVIII (1903).

los matemáticos puros; pese a lo cual, las especulaciones de Riemann y su discípulo Clifford sobre la posibilidad de utilizar la geometría no-euclidiana en el dominio de la física tuvieron todavía que aguardar más de una generación hasta llegar a ser tenidas en cuenta.

Estos avances de la geometría revisten importancia para el lógico principalmente a causa de la atención que despertaron hacia la axiomática o teoría de los repertorios de postulados. Si se hubiera demostrado que la negación del postulado euclídeo de las paralelas introducía una contradicción en un sistema que conservaba todos sus restantes axiomas, habría quedado demostrado mediante una *reductio ad absurdum* que el postulado de las paralelas se seguía de esos otros axiomas. En cambio, el hecho de no haber logrado descubrir una contradicción no basta por sí solo para probar la consistencia de una geometría no-euclidiana. Para ello sería necesario establecer la imposibilidad de una tal contradicción. Este último es un ambicioso requisito, que —como hemos de ver más adelante— en modo alguno resulta fácil de satisfacer. Pero sin necesidad de ir tan lejos, podemos hacer algo por establecer la respetabilidad de una geometría no-euclidiana mostrando que esta última no puede ser inconsistente a menos que la euclidiana sea asimismo inconsistente. Este fue, de hecho, el resultado obtenido en el siglo pasado con el hallazgo de modos de representar la geometría no-euclidiana dentro del sistema de Euclides. En la más conocida de dichas representaciones suponemos que, cuando una expresión de la columna de la izquierda en la lista que sigue entra en juego en la geometría elíptica, le ha de corresponder idéntico sentido que a la expresión correlativa de la columna de la derecha en la geometría euclidiana:

plano	superficie de una esfera
línea recta	arco de un círculo máximo
ángulo determinado por dos líneas rectas	ángulo determinado por los planos de dos círculos máximos.

Si a las restantes expresiones utilizadas en la geometría elíptica de dos dimensiones les fuera dado retener los significados acostumbrados de tales expresiones en la geometría euclidiana, el sistema en su conjunto quedaría entonces transformado en la geometría de la superficie de una esfera euclidiana, cuyo estudio resulta familiar a los navegantes, y todas las proposiciones específicas de la geometría elíptica de dos dimensiones resultarían verdaderas en la nueva interpretación. Por un punto exterior a una recta dada no se podría trazar ninguna paralela a dicha recta, habría una longitud máxima para cada recta y la suma de los ángulos internos de un triángulo arrojaría más de dos rectos. Se desprende de aquí que, si la geometría de Euclides es consistente, otro tanto sucederá con la geometría elíptica de dos dimensiones [3]. Mediante adecuadas interpretaciones de tipo algo más complicado, Félix Klein y otros geómetras demostraron la posibilidad de representar asimismo la geometría elíptica e hiperbólica de tres dimensiones dentro de la euclidiana. De todo ello no se sigue que las geometrías no-euclidianas constituyan apartados de la geometría eucli-

[3] En ocasiones, el calificativo de "elíptica" se reserva para aquella geometría caracterizada por la identificación de los puntos antipodales, recibiendo el sistema arriba considerado la denominación de geometría esférica.

diana, sino tan sólo que es posible «cartografiarlas» (*they can be mapped*) dentro de esta última en un sentido de algún modo semejante a como la superficie de Francia podría ser cartográficamente reproducida sobre parte de la superficie de Inglaterra.

¿Qué diremos entonces del *status* del postulado euclídeo de las paralelas? Si la geometría de Euclides es consistente, es claro que la denegación de dicho postulado no envolverá ninguna contradicción *lógica*, como tampoco lo hará la conjunción de su negación con los restantes axiomas euclídeos, lo que es tanto como decir que el postulado es lógicamente independiente de esos otros axiomas. Si alguien desea insistir en que el postulado es verdadero respecto de las líneas rectas que se dan en el espacio físico, nada hay que se lo impida; pero el matemático puro no necesitará ocuparse de esta última cuestión. Pues, en efecto, el desarrollo de las geometrías no-euclidianas ha conducido inevitablemente a un cambio de actitud entre los matemáticos hacia toda la geometría, incluida la de Euclides. Puesto que hay diversas alternativas, dignas todas de ser investigadas, la tarea del matemático no puede consistir en la aserción de los axiomas que hacen de una de esas alternativas lo que es. Su cometido es simplemente examinar cuáles sean los resultados que se siguen *lógicamente* de un conjunto dado de axiomas. La consideración de la geometría tradicional bajo esta nueva luz ha conducido de manera natural a la demanda de una explícita formulación de todos sus presupuestos, esto es, de una rigurosa ejecución del programa originariamente atribuido al propio Euclides. Los efectos de semejante enfoque se pueden apreciar en las modernas presentaciones de la geometría de Euclides, como por ejemplo la de las *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert de 1899. Pero este modo de considerar la geometría ha impuesto asimismo un tipo de abstracción muy alejado ya de los intereses euclídeos.

Cuando una proposición se sigue lógicamente de otra, tendría que ser posible formular las dos proposiciones de manera que quede claro que la relación entre ambas depende únicamente de su forma, esto es, de su estructura lógica en cuanto contrapuesta a su específico contenido. Ahora bien, esto es lo que se puede hacer precisamente con las proposiciones de la geometría. En las presentaciones al uso de la geometría euclidiana, la forma de los axiomas no es fácil de captar porque acostumbramos a hacer uso de un cierto número de signos específicos tales como «punto», «línea», «plano», «hallarse en», «entre», «paralela» y «congruente», pero podríamos formular todos los axiomas necesarios para la geometría euclidiana ordinaria sin recurrir a otros signos específicos que la palabra «punto» y la expresión «A dista de B como C dista de D», que expresa la congruencia como una relación tetrádica entre puntos. Así, en lugar de «C es colineal con (se halla en la misma línea recta que) A y B» podríamos decir «Si P y Q son dos puntos cualesquiera tales que A se halle a la misma distancia de P que de Q y B se halle a la misma distancia de P que de Q, entonces también C se hallará a la misma distancia de P que de Q». Y en lugar de «C se halla entre A y B» podríamos decir «C es colineal con A y B y hay tres puntos P, Q y R tales que (I) P es colineal con A y B, (II) P se halla a la misma distancia de A que de B, (III) Q se halla a la misma distancia de P que P de A, (IV) R se halla a la misma distancia de P que P de A, (V) C es colineal con Q y R, y (VI) C se halla a la misma

distancia de Q que de R». Y en lugar de «La línea AB es paralela a la línea CD» podríamos decir «La clase de los puntos colineales con A y B y la clase de los puntos colineales con C y D no poseen ningún miembro en común». La misma palabra «punto» no necesitaría ser usada, pues bastaría dejar establecido que las cosas o elementos a que nos referimos mediante nuestras letras son simplemente aquellas cosas o elementos cuya naturaleza, cualquiera que ésta pueda ser, les permita figurar como términos de la relación tetrádica mencionada en los axiomas. Resulta obviamente tedioso reescribir de esta guisa un conjunto de fórmulas axiomáticas que sea suficiente para la geometría euclidiana ordinaria, pero, una vez conseguido, se echará de ver que, aparte de la expresión «A dista de B como C de D», las únicas palabras usadas son aquellas que reservamos para expresar la forma lógica —el caso, por ejemplo, de «y», «o», «no», «si», «cualquier», «hay»— y letras que ofician de variables. Y ya que los teoremas pueden ser expresados asimismo mediante transcripciones semejantes, será posible establecer fuera de toda duda que la implicación de los teoremas por parte de los axiomas no depende para nada del significado que la expresión «A dista de B como C de D» pueda tener al aplicarse a las cosas que percibimos.

Llegados a este punto, podemos dar un paso más y añadir que el significado ordinario de esa expresión es absolutamente irrelevante para la geometría pura. Cualquier otra expresión con los mismos cuatro términos que la pudiese reemplazar consistentemente en todas las fórmulas axiomáticas, podría igualmente reemplazarla en las fórmulas teoremáticas sin que por ello se alterasen las relaciones de estas últimas con las primeras. Lo que el geómetra asevera no es más que la proposición notablemente abstracta de que cualquier relación tetrádica que satisfaga todas las condiciones lógicas prescritas en las fórmulas axiomáticas habrá asimismo de satisfacer cada una de las condiciones lógicas formuladas en las diversas fórmulas teoremáticas. E incluso, si lo deseara, podría servirse de una letra en sustitución de la expresión antes citada, tal y como Aristóteles se sirvió de letras para la formulación de sus principios silogísticos. Las condiciones expresadas por los restantes signos de las fórmulas geométricas revisten una complejidad inusitada para Aristóteles, pero por lo demás son puramente lógicas a todos los efectos.

Se dice a veces que las fórmulas axiomáticas de un sistema geométrico constituyen en su conjunto una *definición implícita* de los signos geométricos específicos que contienen. Este modo de hablar —introducido por J. D. Gergonne ya en 1818[4]— no es incorrecto, pero pudiera dar lugar a malentendidos. Las fórmulas axiomáticas de un sistema geométrico definen las expresiones extralógicas que continen únicamente en el sentido de delimitar el ámbito lógico a que se ha de constreñir el significado de tales expresiones. Pues, en efecto, únicamente imponen condiciones formales; y, aunque el geómetra que utiliza la expresión «A dista de B como C dista de D» en su trabajo profesional no necesita ocuparse en realidad de otra cosa que de las condiciones formales satisfechas por esta relación de congruencia, el caso es que esas condiciones no agotan el significado que la

4 "Essai sur la théorie des définitions", *Annales de mathématiques*, IX (1818), pp. 1-35, especialmente p. 23.

expresión reviste en su uso ordinario. Si así no fuera, no tendría sentido hablar de la aplicación de la geometría al mundo que percibimos, pues esta aplicación depende del hallazgo de una relación perceptible que satisfaga un conjunto de condiciones formales sin por ello reducirse exhaustivamente a estas últimas. En pocas palabras, una inteligencia pura que no tuviese percepción de las cosas en el espacio físico podría sin duda estudiar abstractamente geometría, mas su conocimiento de la geometría no bastaría para suplir su carencia de percepción. Una vez que se cae en la cuenta de ello, es fácil ver también que el desarrollo de la geometría no-euclidiana no entraña, como algunos filósofos han supuesto, la refutación de la vieja concepción euclídea y kantiana según la cual el postulado de las paralelas constituye una verdad necesaria acerca del espacio perceptivo. Pues, por lo menos, cabrá argüir que las condiciones lógicas prescritas por los axiomas de la geometría euclidiana rigen necesariamente para el caso de la relación perceptible de congruencia. Aunque lo hagan así, no obstante, el enunciado de que lo hacen no es una verdad lógica, ni es por lo tanto una verdad geométrica en el sentido en que los matemáticos puros entienden hoy ese adjetivo. Para los propósitos de la matemática basta con que las condiciones prescritas por los axiomas de una geometría no-euclidiana sean consistentes, esto es, no conduzcan a una contradicción; y el método de las representaciones «cartográficas» antes considerado ha demostrado que no puede haber inconsistencia en los axiomas de la geometría elíptica o hiperbólica a menos de que la haya asimismo en los axiomas de la geometría euclidiana.

Cuando en la matemática pura intervienen palabras como «espacio» y otras de origen similar, estas últimas se refieren únicamente a patrones abstractos de ordenación susceptibles de ser ejemplificados por sistemas de objetos ampliamente diversos. Los estudios geométricos comenzaron, por supuesto, con la reflexión acerca de relaciones que se dan en el espacio físico, pero han progresado hasta llegar a la consideración de modos de ordenación imposibles de visualizar. Esta tendencia a la abstracción puede apreciarse ya en las geometrías no-euclidianas que se acaban de mencionar, pero resulta aún más llamativa en las geometrías pluridimensionales. Tales geometrías pueden ser construidas a la manera «sintética» de Euclides, pero el modo más fácil de acceder a ellas consiste en la extensión de las *nociones* envueltas en la geometría «analítica» de Descartes. Cuando trazamos una gráfica, concebimos cada punto del papel cuadriculado como determinado por dos números, valores respectivamente de las variables x e y, y decimos que la línea del papel se corresponde con una cierta relación funcional entre esas variables. Así, una línea recta será la gráfica de una ecuación de la forma $y=ax+b$, puesto que cada punto de esa línea se halla asociado por el esquema de referencia a un par de números que satisfacen semejante ecuación. De este modo obtenemos una interpretación de la geometría euclidiana de dos dimensiones de acuerdo con la cual los puntos serán pares de números y las relaciones entre puntos relaciones del tipo de las que en álgebra se estudian. Una tal interpretación podría también ser aplicada fácilmente a la geometría euclidiana de tres dimensiones. Y la cosa no pararía ahí. Aplicando la analogía en la dirección opuesta, podríamos, si lo deseáramos, servirnos del lenguaje de

la geometría para describir un sistema en que las entidades relacionadas fuesen conjuntos de valores para cuatro o más variables. Así, si (x_1, y_1, z_1, w_1) y (x_2, y_2, z_2, w_2) representan dos conjuntos de valores para las cuatro variables x, y, z y w, tal vez convenga usar el término «distancia» para expresar la cantidad representada por

$$\sqrt{[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 + (w_1-w_2)^2]}.$$

Se aproximen o no a la geometría pluridimensional por la ruta abierta por Descartes, los matemáticos confían a la interpretación numérica de las fórmulas axiomáticas la prueba de la consistencia de cualquier geometría axiomática construida. Es cierto que la geometría elíptica e hiperbólica de tres dimensiones ha de resultar consistente en el supuesto de que lo sea la geometría euclidiana de tres dimensiones y que la exigencia de una prueba de la consistencia de esta última acaso pueda parecer una precaución excesiva. Pero no es en modo alguno obvio que el espacio físico sea euclidiano en el sentido de satisfacer la totalidad de los axiomas de Euclides. Sería difícil mantener, por ejemplo, que percibimos una infinidad de puntos, ya sea por adición, ya sea por división; y si insistiéramos, no obstante, en que el espacio físico es euclidiano en el pleno sentido de la palabra no tendríamos otro remedio que interpretar esta afirmación como una verdad necesaria revelada por la intuición espacial. Durante el siglo XIX tales interpretaciones acabaron tornándose sospechosas, por lo que se intentó liberar a la geometría de los últimos lazos que la hacían depender de la experiencia de los sentidos. Las pruebas matemáticas de la consistencia de un conjunto de axiomas por medio de su interpretación numérica revisten el gran mérito de no obligarnos para nada a salir del dominio de la matemática.

La consistencia es el requisito primordial de un conjunto de axiomas. Pues una conjunción de proposiciones inconsistentes implicaría —como ya apuntaron los cultivadores medievales de la teoría de las *consequentiae*— cualquier proposición, y nada ganaríamos con ocuparnos de un sistema en que la negación de cada uno de sus teoremas sea asimismo un teorema. La mutua independencia de los axiomas no es esencial en la misma medida. Esto es, un sistema deductivo no carecería enteramente de valor por el hecho de descubrirse que uno de sus axiomas puede ser derivado de los demás. Pero sería evidentemente inelegante introducir a título de axioma algo que quepa demostrar como un teorema. Y, aparte de ello, se necesita de las pruebas de independencia para una adecuada comprensión de la estructura del sistema investigado. Ambos extremos quedan claramente ilustrados por la historia del postulado de las paralelas. Ahora bien, para probar que un axioma es independiente de los demás axiomas de un conjunto dado basta con hacer ver que su negación es inconsistente con esos otros axiomas, y a estos efectos el geómetra cuenta una vez más con el método de la interpretación numérica.

Si cualesquiera dos interpretaciones diferentes de los signos extralógicos de un conjunto de fórmulas axiomáticas arrojan verdades por igual y los sistemas de cosas descritos por las fórmulas bajo esas interpretaciones se hallan relacionados entre sí de tal manera que a cada uno de los elementos de uno de ellos le corresponda un elemento del otro, ambas inter-

pretaciones se dirán isomorfas. Si, dando un paso más, *todos* los resultados de las posibles interpretaciones (o modelos, como a veces se las denomina) de un cierto conjunto de fórmulas axiomáticas son isomorfos entre sí, el conjunto de axiomas se dirá categórico o monomorfo. Esta noción era ya familiar a Dedekind en 1887 [5], pero el término «categórico» fue introducido por Veblen en 1904 a sugerencia del lógico Dewey [6]. Probablemente Dewey y Veblen tenían en su mente la idea del contraste entre las proposiciones categóricas y las disyuntivas; pero originariamente «categórico» quería decir «predicativo» más bien que «no-disyuntivo», aparte de lo cual el calificativo tiene el inconveniente de haber sido profusamente usado en otros contextos. Parece preferible, por lo tanto, seguir a Carnap hablando en su lugar del contraste entre conjuntos de axiomas monomorfos y polimorfos [7].

De un conjunto de axiomas monomorfo puede decirse que permite llevar enteramente a cabo el programa de la definición implícita. Pues, por más que las fórmulas de las que nos sirvamos para presentarlo pudieran admitir múltiples interpretaciones diferentes, estas últimas habrían de detentar idéntica estructura lógica, resultando así indistinguibles por medio de criterios puramente formales. Si un conjunto de axiomas es monomorfo, será ocioso tratar de introducir en su interior una ulterior especificación de los significados de los signos extralógicos que intervienen en sus fórmulas mediante la adición de nuevas fórmulas axiomáticas dentro del mismo simbolismo. Pues, para cualquier fórmula que decidamos elegir, o ella o su negación serán ya consecuencia de las fórmulas axiomáticas en el sentido de resultar verdaderas para cualquier interpretación que éstas admitan. No quiere ello decir, no obstante, que un conjunto de axiomas monomorfo no pueda nunca ser incrementado en ninguna medida. El monomorfismo es siempre relativo a un determinado aparato de conceptos primitivos, como podrá apreciarse claramente con la consideración de otro ejemplo extraído de la geometría.

Durante el siglo XIX, la geometría no sólo se desarrolló a partir de la consideración de alternativas al postulado euclídeo de las paralelas y la remoción de su confinamiento en la tridimensionalidad, sino asimismo gracias a la distinción entre diferentes niveles de propiedades geométricas. Desde hacía tiempo era sabido que existen propiedades de las figuras capaces de sobrevivir aun si estas últimas se someten a un cierto género de transformaciones. Así, Pascal (sirviéndose de ciertos procedimientos sugeridos por Desargues, en especial la asunción de puntos en el infinito) probó en el siglo XVII que, si se inscribe un hexágono en una sección cónica, los tres puntos en que sus lados opuestos se intersectan han de hallarse en línea recta. Ya que el teorema vale no sólo para el caso de un hexágono inscrito en un círculo, sino también para cualquier hexágono obtenido por la proyección de esa figura sobre un plano a partir de un punto, es claro que nos las habemos aquí con una propiedad proyectiva en cuanto diferente de una propiedad métrica. Es decir, el teorema pertenece a aquel nivel de la geometría en que consideramos posiciones relativas sin preocuparnos

5 *Was sind und was sollen die Zahlen?*, § 10, 134.
6 "A System of Axioms for Geometry", *Transactions of the American Mathematical Society*, V (1904), pp. 343-81.
7 *Einführung in die symbolische Logik*, § 42 C.

para nada de medidas. Hay otras propiedades de figuras que sobreviven a transformaciones aún más drásticas que la proyección. Si, por ejemplo, inscribimos un cuadrado en un círculo sobre un lámina de goma elástica y a continuación estiramos la goma a discreción, la figura originaria seguirá siendo interior al círculo aunque pueda dejar de ser cuadrada e incluso rectilínea. Nos las habremos ahora con una propiedad correspondiente al nivel todavía más profundo de la topología, en que es posible prescindir no sólo de la distancia sino también de la diferencia entre una línea recta y una curva. Para la definición de una geometría de un nivel dado es conveniente usar el lenguaje de Klein y decir que la geometría estudia todas las propiedades invariantes bajo las operaciones de un cierto grupo. Por «operaciones» entendemos aquí transformaciones tales como desplazamientos y rotaciones en el espacio, proyecciones, sean paralelas o centrales, y distorsiones como la antes descrita; y por «grupo» entendemos un conjunto de operaciones tales que (*a*) el resultado de las aplicaciones sucesivas de cualesquiera dos operaciones del conjunto constituya a su vez una operación del conjunto y (*b*) la inversa de cualquier operación del conjunto sea asimismo una operación del conjunto. Entre paréntesis, esta noción de grupo, concebida por vez primera por Galois (1811-1832), es una de esas abstracciones de superior nivel que encuentran hoy aplicación en muchos campos diferentes de la matemática [8].

Para nuestros propósitos, lo que importa es apuntar que el conjunto de axiomas de una geometría de nivel inferior puede ser monomorfo aunque no implique ciertamente todos los teoremas correspondientes a geometrías de nivel superior. Nosotros ya hemos visto que las proposiciones de la geometría euclidiana ordinaria de carácter métrico podían ser todos ellos formulados haciendo uso de un único signo específico para la relación tetrádica de congruencia. En el mismo trabajo en que introdujo el adjetivo «categórico» para describir un cierto tipo de conjuntos de axiomas, Veblen demostró que todas las proposiciones de un sistema más profundo denominado geometría descriptiva podían ser formuladas con la ayuda de un único signo específico para la relación triádica de hallarse entre (*betweenness*) u ordenación serial. Ya que la relación de hallarse entre se puede definir en términos de congruencia y la geometría métrica incluye teoremas no contenidos en la geometría descriptiva, cabría pensar que un conjunto de axiomas destinado a esta última haya de ser indefectiblemente polimorfo. Pero no es esto lo que ocurre. El conjunto de axiomas vebleniano para la geometría descriptiva es monoformo *respecto de la relación de hallarse entre*. Si sus axiomas fueran reformulados valiéndonos de la definición de hallarse entre más arriba mencionada, el conjunto resultante sería de hecho polimorfo, mas lo sería *respecto de la relación de congruencia*.

Ya que, a los efectos de su especificación, un conjunto de axiomas monomorfo no puede ser relevantemente incrementado por medio de nuevos axiomas expresados en el mismo simbolismo, el conjunto de axiomas en cuestión será de algún modo completo. Pero hay un sentido más fuerte del

---

8 En la teoría abstracta de grupos, cuyos elementos no necesitan ser invariablemente operaciones, se hace preciso especificar por separado que la combinación es asociativa y existe un elemento de identidad.

término «completo» en el que un sistema deductivo con un conjunto monomorfo de axiomas podría ser incompleto todavía. En orden a hacernos cargo de esta posibilidad, tendríamos que pensar en la completud como algo definido por referencia a la demostración y relacionado con el principio de tercio excluso de un modo análogo a como la consistencia se relaciona con el principio de no-contradicción. Escojamos cualquier proposisión cuya expresión no requiera de otros signos extralógicos primitivos que los de un conjunto dado de axiomas. En ese caso, si el conjunto de axiomas es consistente, no deberá permitir la demostración conjunta de esa proposición y de su negación. Y, si ha de ser completo en el sentido fuerte ahora considerado, tendrá que permitir o bien la demostración de esa proposición o bien la demostración de su negación. A primera vista, este último requisito de la completud parece asemejarse al requisito del monomorfismo arriba mencionado, a saber, el requisito de que la proposición o su negación haya de incluirse entre las consecuencias de los axiomas del sistema, pero su astringencia es en rigor mayor que la de éste. Pues podría haber una proposición, expresable en el simbolismo de un conjunto axiomático monomorfo, que sea una consecuencia de los axiomas del conjunto y, sin embargo, no resulte deductivamente demostrable a partir de ellos por entrañar su derivación un número infinito de pasos y no constituir, por consiguiente, una auténtica demostración. Más adelante veremos que esto es, de hecho, lo que ocurre con algunos apartados muy importantes de la matemática.

2. Números y funciones.

Hemos visto que los geómetras se sirven comúnmente para las pruebas de consistencia de interpretaciones numéricas de sus conjuntos de axiomas. Al hacerlo así alientan la esperanza de liberar a su ciencia de toda presuposición extramatemática. ¿Pero cuál es la base de ese otro apartado de la matemática que se ocupa de los números? En orden a lograr una interpretación numérica satisfactoria de cualquier sistema geométrico que envuelva la noción de continuidad tendremos que hacer uso de números tales como $\sqrt{2}$ y π, que suscitaron ya en la antigüedad una perplejidad considerable.

Por razones que todavía hoy no conocemos con exactitud, los pitagóricos creían haber encontrado la clave de la comprensión del universo en la noción de proporción, esto es, en el concepto de una relación entre dos números naturales. Sin duda les impresionaba la importancia de la proporción en la música, y quizá se dejaron influenciar por el hecho de que el vocablo griego λόγος, que designaba la noción de proporción, era también el término usual para designar la noción de razón o explicación. Es posible asimismo que fuesen los primeros en usar la palabra λόγος en un sentido matemático. Mas, cualquiera que haya podido ser el fundamento de sus concepciones metafísicas, el caso es que experimentaron una notable turbación ante el descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado. Pues esta sencilla particularidad mostraba que la idea de proporción entre las longitudes de dos líneas podía llevar a una contradicción, por más que el sentido común pareciera apoyar la insistencia filosófica en que ha de haber una determinada relación: la diagonal supera

obviamente al lado en más de un tercio, aunque no tanto como un medio. Eudoxo salvó la situación ofreciendo una caracterización general de la proporción que resultaba suficiente para la geometría, y su teoría (preservada en el libro V de los *Elementos* de Euclides) constituye una apreciable contribución a la filosofía de la matemática. Se trata esencialmente de una nueva definición de la igualdad de proporciones entre magnitudes:

> «Se dice que la primera de cuatro magnitudes guarda la misma proporción con la segunda que la tercera con la cuarta cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y de la segunda y la cuarta, si el múltiplo de la primera es menor que el de la segunda, entonces el múltiplo de la tercera es asimismo menor que el de la cuarta, y si el múltiplo de la primera es igual al de la segunda, entonces el múltiplo de la tercera es asimismo igual al de la cuarta, y si el múltiplo de la primera es mayor que el de la segunda, entonces el múltiplo de la tercera es asimismo mayor que el de la cuarta.»

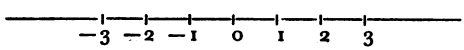
Ello quiere efectivamente decir que, donde no podamos hablar de proporción en el estricto sentido pitagórico (esto es, como una cierta relación entre números naturales), podremos sin embargo hablar de proporción, en un sentido más amplio, si es posible mostrar que toda proporción en el estricto sentido pitagórico es o demasiado pequeña o demasiado grande. Con otras palabras, la existencia de una proporción en sentido amplio se identifica con la posibilidad de distribuir todas las proporciones pitagóricas entre las dos clases mutuamente excluyentes de lo demasiado pequeño y lo demasiado grande. Veremos enseguida cómo esta sugerencia es todavía aprovechada en el análisis matemático, esto es, aquella rama de la matemática que se ocupa de magnitudes de variación continua. Pero en orden a emplazar la cuestión en la adecuada perspectiva, hemos primero de considerar el desarrollo del concepto de número desde los tiempos de los griegos.

Los primeros numerales debieron ser probablemente adjetivos como «uno», «dos», «tres». En griego y otros muchos idiomas tales palabras, o en cualquier caso algunas de ellas, se declinan como adjetivos ordinarios, pero es obvio que no pueden servir de calificativos de los nombres tal y como lo hacen otros adjetivos. Pues mientras una persona que diga que tiene dos perros grandes quiere decir que cada uno de los perros es grande, no quiere en cambio decir que cada uno de ellos sea dos. Esa característica de los numerales es ya ligeramente inquietante, pero aún resulta más curioso el hecho de que en ciertos idiomas, incluido el castellano, se empleen frecuentemente los mismos símbolos o sonidos como nombres propios. Nosotros decimos, por ejemplo, «Dos es el menor de los números primos». Al hablar así, hablamos de los números como de objetos a un tiempo diferentes de los conjuntos de cosas que contamos y de los numerales de los que nos servimos para contarlas; pues lo que es verdadero del número dos ni tan siquiera puede ser denegado con sentido de una pareja de perros o de una palabra. Y es difícil, por lo demás, que este modo de hablar pudiera haber surgido antes del desarrollo de la aritmética como cálculo. Tenemos, de hecho, pruebas de que su introducción entre los griegos de la época de Platón fue más bien ardua. En los *Theologumena Arithmeticae*, originariamente atribuidos a Jámblico, nos encontramos con una cita del discípulo de Platón Espeusipo que acredita una notable incer-

tidumbre en el uso del lenguaje [9]. El pasaje se refiere a la doctrina pitagórica de la perfección del número diez y contiene en unos pocos párrafos no menos de cuatro designaciones diferentes de ese número, a saber, *τὰ δέκα, ὁ τῶν δέκα ἀριθμός, ὁ δέκα,* y *δέκα.* La primera quiere decir literalmente «las diez (cosas)», la segunda «el número de las diez (cosas)», la tercera «el (número) diez» y la cuarta exactamente «diez». Más aún, cuando Espeusipo desea decir que cuatro es múltiplo de dos, compone una extraña oración en la que el símbolo de cuatro es tratado como un neutro plural y el de dos como un masculino singular.

Aparte de adjetivos como «uno», «dos», «tres», hasta las lenguas más primitivas poseen términos numéricos tales como «un medio», «un tercio», «un cuarto»; pero el empleo de signos tales como -1, $3/2$, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{-1}$ para representar números es una novedad de hace escasos siglos. Al igual que el uso de numerales como nombres propios, también este desarrollo se halla conectado con la elaboración de cálculos matemáticos y en concreto se inspira en la aplicación cartesiana del simbolismo algebraico a la geometría.

Supongamos en primer término que la consideración de un problema nos lleva a formular la ecuación $x+3=2$. Así ocurriría, por ejemplo, si deseáramos saber cuánto dinero tenía en el Banco un hombre cuya cuenta corriente presenta un saldo de dos libras tras haber ingresado tres. Es claro que la ecuación no puede resolverse en términos de números naturales, mas si nos permitiésemos hablar de números negativos podríamos escribir $x = -1$. Tales números pueden ser convenientemente representados mediante las secciones que, a intervalos iguales, se suceden en la línea que sigue a la izquierda de un punto designado por 0:



En segundo lugar, el intento de resolver ecuaciones como $2x-3=0$ nos enfrenta con números tales como $3/2$. Con ellos obtenemos un enorme incremento de los números susceptibles de ser representados por medio de una línea. Pues entre dos fracciones cualesquiera siempre es posible hallar otra fracción, y eso es tanto como decir que un intervalo finito —como el que media entre los números 0 y 1— contiene infinidad de fracciones. Sin embargo, no hemos de suponer que este incremento agote las posibilidades de representación de números en correspondencia con los puntos de la línea: si construímos un cuadrado cuyo lado sea una unidad de longitud y hacemos luego descansar su diagonal sobre la línea a partir de su origen, el punto final de la misma no se contará ya entre aquéllos a los que hasta el presente se ha asignado un número. Pero este hueco e infinitos otros huecos quedarán rellenados gracias a un tercer incremento del concepto de número que le permita abarcar a los números irracionales algebraicos tales como $\sqrt{2}$ y trascendentales (o no-algebraicos) tales como π. Los primeros nos permiten hablar de resolver ecuaciones algebraicas del tipo de $x^2-2=0$, y con los segundos podemos completar el continuo lineal. Finalmente, un

[9] Ed. de Falco, 82, 10 y ss., reproducidos en *Greek Mathematical Works*, ed. Ivor Thomas, 1, pp. 75 y ss.

cuarto incremento nos lleva al reconocimiento del número «imaginario» $\sqrt{-1}$ como una raíz propia de la ecuación $x^2+1=0$. El impulso para esta última ampliación parece haber venido enteramente del álgebra formal. No hay ningún punto de la línea recta que corresponda a $\sqrt{-1}$, y los matemáticos que en el siglo XVIII se sirvieron de números imaginarios lo hicieron sólo con el fin de simplificar sus cálculos y otorgarles una mayor generalidad. Pero en tanto hubieron de admitirse por esta única razón, los números imaginarios aparecerían rodeados de un halo de misterio. Si un alumno pedía una justificación de su uso, poca cosa podía responderle su maestro salvo que la fe adviene trabajando. Esta sensación de misterio se disipó cuando Wessel en 1797 y Argand en 1806 mostraron un modo de poner en conexión a los números imaginarios con el movimiento de un plano. En la geometría analítica de Descartes los números se hallan correlacionados con puntos de acuerdo con la *distancia* de estos últimos respecto de ciertas coordenadas; pero también era posible concebir a un número como un vector o medida del *desplazamiento* que ha de efectuar una partícula para alcanzar un punto dado, y dentro de este esquema la multiplicación de un vector por $\sqrt{-1}$ representa obviamente la inversión de la dirección del movimiento. ¿Qué cosa más natural y más satisfactoria que decir entonces que la multiplicación de un vector por $\sqrt{-1}$ representa una rotación de un ángulo recto, esto es, aquella operación cuya repetición determina una inversión completa? Así es por lo menos como los estudiantes de matemáticas han venido ideando la representación de $\sqrt{-1}$ hasta nuestros días, y el hecho de que semejante interpretación pueda reconfortarnos todavía nos suministra algún indicio de la desazón que los matemáticos hubieron de experimentar cuando aún no se conocía ningún modo de conectar a dicho símbolo con la intuición espacial.

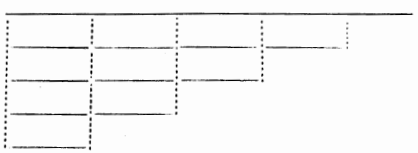
Cuando hablamos de todas estas sucesivas extensiones del concepto de número, nos inclinamos a pensar que la historia podría resumirse por medio de un esquema como el que ahora sigue, en que los números impresos en cursivas representan los nuevos géneros de números añadidos a nuestro repertorio originario:

Naturales
Negativos } Enteros
Fraccionarios } Racionales
Irracionales } Reales
Imaginarios } Números

Evidentemente, los números enteros se llaman así por oposición a los fraccionarios, los números racionales por oposición a los irracionales y los números reales por oposición a los imaginarios; y este sistema de denominación parece sugerir de modo natural una clasificación de especies en el seno de un género. Mas semejante manera de describir el despliegue de los números es equivocada. En su lugar, deberíamos hablar más bien de una jerarquía de cinco tipos diferentes de números en la que cada tipo superior contuviese un subconjunto correspondiente a cada uno de los tipos inferiores. En el siguiente esquema cada tipo se halla representado por una

línea horizontal de trazo continuo, en tanto las correspondencias se indican mediante líneas verticales de trazo discontinuo:

Números complejos
Números reales
Números racionales
Enteros con cualificación de signo
Números naturales



El entero positivo +2 no se identifica con el número natural 2, y nuestra costumbre de escribir el símbolo 2 en vez del símbolo +2 sólo se justifica por el hecho de que nuestras reglas del cálculo con enteros positivos se corresponden exactamente con nuestras reglas del cálculo con números naturales. De modo semejante, el número racional +2/+1 tendría que ser distinguido —en estricta teoría— del entero positivo +2 y del número natural 2, si bien es cierto que tampoco incurriremos en errores al ignorar la diferencia entre uno y otros a lo largo del cálculo. En la ecuación:

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 2,$$

tendríamos un nuevo uso del mismo signo 2, a saber, para designar un número real. Y en ciertos contextos podríamos todavía servirnos de él como una abreviatura del signo $2 + 0\sqrt{-1}$, esto es, como símbolo de un número complejo cuya parte imaginaria fuese nula.

En cada uno de los niveles superiores de nuestro diagrama la totalidad del tipo representado por una línea horizontal constituye una novedad radical, por más que los matemáticos —dejando de reconocerlo así— únicamente hayan previsto en ocasiones una nueva denominación para aquel apartado del mismo representado por la porción sobresaliente de la línea. Por lo demás, y salvo en uno de los casos, el orden de despliegue es fijo e irreversible, es decir, no podríamos elaborar un cálculo con números complejos sin contar antes con un cálculo con números reales ni un cálculo con números reales sin contar antes con un cálculo con números racionales. La excepción se refiere a los enteros con cualificación de signo: si lo deseáramos, se podría posponer la distinción entre números positivos y negativos hasta después de introducidos los números racionales o incluso hasta después de introducidos los números reales. Y parece ser que los hombres dispusieron, en efecto, de una notación específica para las fracciones antes de hallarse familiarizados con los números negativos. Pero el esquema que se acaba de sugerir es el más simple porque hace que el orden de aparición de los números negativos, fraccionarios e irracionales se corresponda con la ordenación usual de las operaciones inversas —esto es, la sustracción, la división y la extracción de raíces— a las que se hallan históricamente conectados.

El campo de los números naturales se halla clausurado por lo que se refiere a las operaciones de adición, multiplicación y exponenciación; esto es, con la excepción de ciertos casos especiales que envuelven el número 0 siempre obtendremos un número natural si sumamos entre sí dos números naturales, o multiplicamos uno de ellos por el otro, o elevamos el primero

a la potencia del segundo. Pero no se halla en cambio clausurado por lo que se refiere a la operación de sustracción. El campo de los enteros con cualificación de signo, por su parte, se halla clausurado por lo que se refiere a las cuatro operaciones mencionadas hasta ahora, mas no así por lo que se refiere a la operación de división. Para encontrar un dominio en el que siempre sea posible llevar a cabo dicha operación tendremos que pasar a la consideración de los números racionales. Pero en este nuevo campo no siempre se podrá llevar a cabo la operación de extraer una raíz. Y así somos llevados a la consideración del campo de los números reales, en que todos los números positivos poseerán raíces del grado que deseemos, y finalmente al de los números complejos, en que cabrá llevar a cabo sin restricción todas y cada una de las operaciones enumeradas. Hay, aparte de ellas, otras operaciones (tales como la de determinar el límite de una sucesión indefinida convergente) que pueden ya aplicarse en el dominio de los números reales, pero el de los números complejos resulta especialmente interesante por encontrar en él su más amplia aplicación la noción de *función*.

En el lenguaje matemático, el término «función» se usa para indicar aquella operación que, aplicada a una cierta entidad llamada su argumento (o a un conjunto ordenado de entidades, si se trata de una función de más de un argumento), arroja una cierta entidad descrita (un tanto curiosamente) como el valor de la función para dicho argumento. O bien, si la palabra «operación» sugiere en demasía la intervención humana, podríamos decir que hablar en matemáticas de una función equivale a hablar de una relación que una cierta entidad (que normalmente es única) llamada valor de la función puede guardar con una cierta entidad llamada argumento de la función. Muy a menudo dicha relación viene expresada por una ecuación funcional de la forma $y=f(x)$, donde la letra x representa la variable independiente, que toma por valores los argumentos de la función, y la letra y representa la variable dependiente, que toma por valores los valores de la función para los diversos argumentos posibles. También se dice a veces que una función lo es *de* una cierta clase, que constituye el campo de los posibles argumentos de la función, *respecto a* una cierta clase que constituye el campo de los posibles valores de esta última.

Esta moderna definición [10] ha sido formulada de tal suerte que pueda ya ser aplicada en el dominio de los números naturales. Podemos, por ejemplo, decir que la función expresada por n^2 toma el valor 4 para el argumento 2. Pero la terminología procede de la mecánica y se halla históricamente asociada a la idea de una variación continua. Originariamente el término «variable», usado ahora para referirnos a las letras que desempeñan un específico cometido en contextos matemáticos, se aplicaba a magnitudes físicas que varían con el tiempo, como por ejemplo la distancia entre dos partículas o la presión de un gas, de suerte que las letras x e y que intervienen en fórmulas del tipo de $y=f(x)$ eran consideradas como abreviaturas de expresiones tales como «el tiempo transcurrido» y «la distancia recorrida». Cuando los matemáticos puros comenzaron a hablar de variables y funciones, lo hacían así porque se hallaban interesados en los

[10] Los elementos fundamentales de nuestra discusión proceden de A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, § 03.

esquemas matemáticos exhibidos por algunas leyes físicas; pero no podían ya decir que las letras usadas fueran abreviaturas de expresiones como las que se acaban de citar, y el uso de las mismas que entonces adoptaron, en particular la costumbre de llamar a las letras mismas variables, ha dado lugar a un gran número de confusiones y perplejidades.

Por ejemplo, unas veces se ha dicho que las letras llamadas variables denotan números variables y otras que denotan variable y ambiguamente todos y cada uno de los números que constituyen sus valores. Ni una ni otra explicación hacen sentido. Pues los números no varían, y variaciones tales como las que pudieran concurrir en la denotación de los signos carecen por entero de interés para los matemáticos. Asimismo se ha dicho: «Una variable y es función de otra variable x si, para cada determinado valor de x, o siquiera para cada valor determinado dentro de un cierto campo, hay por lo menos un valor de y correlacionado con él por medio de una regla». Esta explicación podría haber resultado satisfactoria cuando el término «variable» se refería a una magnitud física; pero resulta en cambio sumamente insatisfactoria cuando se usa dicho término para referirse a una letra, ya que parece entonces sugerir que una función sea una letra, o en cualquier caso un símbolo de alguna especie, por más que esté bien claro que el matemático que se ocupa de la teoría de las funciones no está precisamente cultivando una rama de la filología. Probablemente ningún matemático se dejaría extraviar en su trabajo cotidiano por este tipo de dificultades, y en cualquier caso es demasiado tarde para tratar de abandonar la vieja terminología que las suscita. Pero valía la pena tomar nota de las mismas, ya que el uso del término «función» se ha extendido también en el dominio de la lógica moderna y ha dado allí lugar sin duda a más de un serio equívoco.

Por la misma razón merece señalarse que por lo menos hay dos modos diferentes como una expresión funcional podría intervenir con una variable en un contexto matemático. Cuando un matemático escribe

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

la letra x forma parte de un simbolismo destinado a la expresión de la universalidad, del que aquél se sirve en nuestro ejemplo para formular un enunciado acerca de todos los números. El simbolismo es extremadamente útil para dicho propósito, porque *sugiere* lo que de hecho ocurre en este caso, a saber, que el reemplazamiento de la letra x por cualquier numeral a lo largo de la ecuación ha de arrojar otro enunciado verdadero. Más aún, en la mayor parte de los contextos podemos libremente razonar con la ecuación *como si* la x fuera ella misma un numeral. Sin embargo, cuando un matemático escribe en letra impresa «Examinemos ahora la función tan x», la letra x no expresa ya universalidad y no está claro cuál sea el papel gramatical que habríamos de asignar al símbolo complejo tan x en su conjunto. Si, como a veces se dice, la letra x únicamente sirve aquí para indicar un espacio vacío, la expresión tan x difícilmente podría ser considerada como el nombre de una función más de lo que cabría considerar a «padre de ...» como el nombre de una relación en castellano

ordinario. Pero tendría sentido, en cambio, hablar de la función *expresada por* el símbolo complejo tan x, tal y como es posible hablar de la relación expresada por «padre de ...»; y la usual expresión matemática antes citada podría quizá considerarse como una abreviatura de este modo de hablar. Veremos más adelante que el no haberlo sabido apreciar así ha originado a veces confusiones y malentendidos entre los lógicos, al adoptar éstos la terminología de las funciones para sus propios propósitos.

Evidentemente, no nos es dado hacer uso de expresiones numéricas de tipos superiores del mismo modo como usamos los numerales ordinarios: carece de sentido, por ejemplo, decir que hay $5 + 3\sqrt{-1}$ hombres en la habitación. ¿Por qué entonces continuar hablando por igual de *números* a todos los niveles de nuestro cuadro precedente? Los sucesivos incrementos del concepto de número parecen consistir realmente en extensiones del término «número» hasta abarcar diversos tipos de entidades, lo que sólo se justifica por la posibilidad de calcular con los diversos tipos de símbolos correspondientes de acuerdo con las mismas reglas básicas del álgebra, esto es, las reglas conmutativas:

$$x + y = y + x \quad \text{y} \quad xy = yx,$$

asociativas:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{y} \quad (xy)z = x(yz),$$

y distributiva:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Un sistema de números en el amplio sentido de tales extensiones no es sino un conjunto de entidades respecto de las cuales rigen todas estas leyes, *una vez adecuadamente redefinidas la adición y la multiplicación*. Este último extremo es importante, ya que las nociones de adición y multiplicación apropiadas para el cálculo con números naturales no pueden ser aplicadas a un cálculo con números de otro tipo. Si, por ejemplo, deseamos hablar de la multiplicación de enteros con cualificación de signo, tendremos primero que explicar cómo usamos el término «multiplicación» en este nuevo contexto, a saber, de acuerdo con las reglas:

$$(+a)(+b) = +ab, \qquad (+a)(-b) = -ab, \qquad (-a)(-b) = +ab.$$

Esto es tanto como decir que las reglas básicas del álgebra son sistemáticamente ambiguas o, mejor dicho, que formulan abstractamente ciertas condiciones lógicas que han de ser satisfechas por las operaciones de cualquier cálculo al que deseemos calificar de cálculo numérico.

Hasta llegar a la introducción de los números complejos, e incluidos éstos, el despliegue del concepto de número fue un despliegue inconsciente en el sentido de que los matemáticos extendieron su uso del término «número» sin darse exacta cuenta de lo que hacían. Sin duda se dejaron guiar a este respecto por lo que G. Peacock denominó en 1833 «el principio de la permanencia de las formas equivalentes» [11], esto es, por el deseo de retener a todos los niveles las reglas generales del álgebra más arriba enunciadas. Mas concibieron cada una de esas sucesivas innovaciones como

---

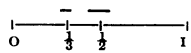
11 "Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis", *Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science, held in 1833*, pp. 185-352, especialmente pp. 198-207.

algo que se veían obligados a adoptar en orden a resolver una serie de problemas planteados en anteriores estadios, y no se interesaron por el tratamiento del álgebra con abstracción de sus ejemplificaciones ni procedieron a inventar sus nuevos cálculos con la simple finalidad de llevar el despliegue hasta sus últimas consecuencias. La situación había de cambiar en el siglo XIX. En primer lugar, un cierto número de distinguidos matemáticos comenzaron a interesarse abstractamente por el álgebra. Aparte del ya mencionado Peacock, D. F. Gregory escribió por ejemplo en 1838 un trabajo «On the Real Nature of Symbolical Algebra» [12] y De Morgan publicó entre 1839 y 1844 una serie de cuatro acerca de «The Foundations of Algebra» [13]. En segundo lugar, se intentó la elaboración de nuevos cálculos. H. Grassmann compuso por ejemplo en 1844 un libro sobre la *Ausdehnungslehre*, que ponía en práctica el proyecto leibniziano de construir un cálculo geométrico. Y a partir de 1844, año en que publicó su primer trabajo sobre los cuaternios (o cuaterniones), Sir William Rowan Hamilton, de Dublín, dedicó gran parte de sus esfuerzos a perfeccionar un nuevo álgebra de los números hipercomplejos. Es interesante reparar, no obstante, en que Hamilton no trabajó enteramente en el vacío. Sus esfuerzos se vieron inspirados por el deseo de elaborar un cálculo que consiguiera, respecto del movimiento en un espacio tridimensional, lo que la teoría de los números complejos parecía haber satisfactoriamente conseguido respecto del movimiento en un plano. Así como los números complejos son expresables de la forma $x + yi$, donde la letra i constituye una abreviatura de $\sqrt{-1}$, de la misma manera sus cuaternios son expresables de la forma $x + yi + zj + wk$, donde las letras i, j y k representan rotaciones en tres planos mutuamente perpendiculares. Pero, a diferencia de la teoría de los números complejos, su sistema no satisface ya todas las reglas básicas del álgebra. En orden a preservar las demás reglas, tuvo que abandonar la ley conmutativa de la multiplicación y declarar que $ij = -ji$. Por esta razón, los cuaternios no son universalmente reconocidos como números. Y lo mismo puede decirse de otras sugerencias, como la de las matrices, que acaso quepa considerar como una extensión del concepto de número más allá del dominio de las números complejos. Pues, como hoy es bien sabido, tales extensiones no son posibles sin sacrificar algunas de las reglas que determinan el significado del término «número» tal y como éste último ha venido siendo usado por los matemáticos hasta llegar al nivel de los complejos. No quiere ello decir que sea absurdo hablar de números hipercomplejos, pero hacerlo así tan sólo está justificado en virtud de una parcial analogía.

¿Qué es lo que los matemáticos pensaron en el curso de este proceso de ensanchamiento del reino de los números desde los naturales a los complejos? Cada uno de los pasos del mismo suscitó una cierta desazón en un primer momento para pasar después a ser considerado inevitable. Hasta por lo menos el nivel de los números reales, el proceso estuvo guiado por consideraciones espaciales; e incluso los números imaginarios, originariamente introducidos con el fin de preservar la generalidad de ciertos patrones calculatorios, no fueron aceptados como un capítulo respetable

12 *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, XIV (1840), pp. 208-16.
13 *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, VIII, pp. 173-87, 287-30; VIII, pp. 139-42, 241-54.

del discurso matemático sino tras su incorporación a una teoría de los números complejos provista de una interpretación espacial. Pero, a poco de rematado aquel proceso, comenzaron a surgir dudas sobre la fiabilidad de la intuición espacial como base para las aserciones acerca del continuo de los números reales. Tales dudas no se debían a ninguna dificultad en cuanto a la aplicación de la matemática ni tampoco al influjo de la geometría no-euclidiana, sino que obedecían más bien a ciertos descubrimientos realizados en el propio dominio del análisis matemático. Bolzano en 1830, y más tarde asimismo Weierstrass, habían demostrado, por ejemplo, que algunas funciones continuas no son diferenciables [14]. En el lenguaje geométrico ello parece equivaler a la admisión de la posibilidad de curvas continuas sin tangentes. Y habían de descubrirse paradojas aún más sorprendentes. Una de las más llamativas se refiere a la densidad de los puntos racionales de un línea. Supóngase que asignamos los números 0 y 1 a dos puntos de la línea y endoselamos con un pequeño trazo cada uno de los puntos que concurren entre los dos primeros, que se habrán hecho así corresponder a números racionales:



Ya que entre cualesquiera dos fracciones que podamos elegir hay infinitas otras fracciones, parece natural suponer que los trazos en cuestión acabarán solapándose entre sí y que la suma de sus longitudes excederá inevitablemente de una unidad, por pequeños que sean aquellos trazos. Sin embargo, no ocurre así. Pues si consideramos las fracciones que concurren entre 0 y 1 según el orden

$$1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, \ldots$$

y a continuación asignamos al primero un trazo de longitud igual a $1/10$ de una unidad, al segundo un trazo de longitud igual a $1/10^2$ de una unidad, al tercero un trazo de longitud igual a $1/10^3$ de una unidad, etcétera, la suma de las longitudes de todos los trazos arrojará tan sólo:

$$1/10 + 1/10^2 + 1/10^3 + \ldots = 1/9.$$

Cierto es que no podremos dibujar todos esos trazos con un lápiz, pero es evidente que nuestra regla de procedimiento asigna un trazo de una determinada longitud a cada una de las fracciones distinguibles, ya que a cada una de ellas corresponde un lugar en nuestra ordenación.

Una vez que se hubo puesto en duda la fiabilidad de la intuición espacial como fuente de conocimiento matemático, se hizo necesario reconsiderar todas las demostraciones usualmente aceptadas, lo que condujo a una radical reconstrucción de la matemática por obra de autores tales como Cauchy (1789-1857) y Weierstrass (1815-97). De hecho, se ha podido decir que nada había sido satisfactoriamente demostrado en el dominio del análisis hasta llegar el siglo XIX. Ahora bien, en el análisis, no menos

[14] La publicación de la prueba de Bolzano, en su ensayo *Funktionenlehre*, habría de esperar hasta 1930.

que en la geometría, el rigor exige la explícita formulación de todo cuanto pueda resultar esencial a los efectos de la demostración; y eso condujo la atención de los matemáticos de la época hacia aquellas fórmulas capaces de suministrar definiciones implícitas de los diversos tipos de expresiones numéricas. Que dichas fórmulas se consideren como reglas de cálculo específicas o como axiomas de los cuales hayan de derivarse los teoremas de acuerdo con las leyes generales de la lógica no reviste demasiada importancia siempre que sean exhaustivamente enumeradas y reconocidas como fundamentales. Pero parece natural preguntarnos por qué habríamos de elegir precisamente dichas fórmulas. ¿Hay algo de inherentemente necesario en el curso del proceso que nos ha llevado a adoptarlas? ¿O se trata más bien de convenciones creadas por nosotros, sugeridas acaso por nuestro interés en la descripción de la naturaleza o por nuestro deseo de alcanzar un cierto grado de generalidad abstracta en el propio dominio de la matemática, pero imposibles de justificar precisamente por tratarse de meras convenciones? Estos problemas se suscitaron en el siglo XIX y continúan debatiéndose aún en nuestros días. La manera apropiada de abordarlos consistiría quizá en hacer ver que la antítesis entre descubrimiento y convención ha sido en realidad mal concebida. Pues si bien es cierto que los matemáticos pueden construir sus cálculos a tenor de sus intereses específicos, no es menos cierto que no son absolutamente libres en la elección de sus convenciones. Cabe decir, si lo deseamos, que Hamilton inventó los cuaternios, pero hay que conceder que ni él ni nadie podría construir un sistema de números hipercomplejos que satisfaga todas las leyes algebraicas válidas para los complejos. Comoquiera que sea, el primer paso hacia la clarificación de la cuestión era la exacta formulación de las reglas de los diversos cálculos reconocidos hasta entonces, y este paso fue dado en el siglo XIX.

En cada una de las etapas de la ampliación del concepto de número nos enfrentamos con entidades de nuevo cuño implícitamente definidas por las reglas de operación de un nuevo cálculo. Pero en ciertos contextos en los que comúnmente se habla de números enteros con cualificación de signo o de números racionales será posible decir cuanto haya que decir sin necesidad de introducir un nuevo tipo de números. Así, en lugar de la ecuación $3 - 5 = -2$ podremos escribir $3 + 2 = 5$, y en lugar de $5/3 = 10/6$ podremos escribir $5 \times 6 = 10 \times 3$. E incluso si encontrásemos conveniente operar con números enteros con cualificación de signo o racionales, podríamos considerarlos como pares ordenados de números extraídos del nivel inmediatamente inferior y sujetos a reglas específicas de operación. El cálculo con enteros con cualificación de signo, por ejemplo, podría desarrollarse a partir de reglas tales como:

$$(a, b) = (c, d) \textit{ si, y sólo si, } a + d = b + c,$$
$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ac+bd, ad+bc).$$

A primera vista, ello resulta poco familiar, pero en orden a obtener el método usual de representación sólo necesitamos escribir $+a$ y $-a$ como abreviaturas de las dos formas tipo $(a, 0)$ y $(0, a)$ a las que nuestras nuevas expresiones numéricas resultan reducibles de acuerdo con nuestras reglas específicas de igualdad. Las reglas específicas del cálculo con números ra-

cionales son, por supuesto, diferentes, pero no más complicadas. Y no acaban aquí las posibilidades de explicación por medio de pares ordenados; pues Hamilton mostró en 1835 que el cálculo con números complejos podía ser presentado como un cálculo con pares ordenados de números reales con ayuda de reglas apropiadas para la igualdad, la adición, la multiplicación, etc. Si pudiera mostrarse que los números reales y los números racionales se relacionan entre sí de un modo semejante, habríamos completado la cadena y estaríamos en situación de afirmar, para decirlo en la terminología de Lord Russell, que todos los números de tipos superiores son construcciones lógicas a base de números naturales. Esto es, ya no sería necesaria por más tiempo la introducción de números de tipos superiores como entidades de nuevo cuño descubiertas por la intuición de la continuidad espacial o temporal, puesto que hablar de ellos equivaldría en principio a hablar —con mayor o menor grado de complicación— de los números naturales y sus propiedades. Este programa, que habría de servir de inspiración a buena parte de la filosofía ulterior, es lo que se conoce con el nombre de aritmetización del análisis.

Por desgracia, los números reales han resultado tan embarazosos para los matemáticos modernos como lo fueron para sus colegas de la escuela de Pitágoras. La razón de ello es que el cálculo con números reales no puede ser presentado como un cálculo con conjuntos *finitos* de números racionales. Tan pronto como comenzamos a operar con números reales, nos obligamos a hablar del infinito con todas las dificultades que comporta. Ello podría apreciarse claramente a partir de la consideración de dos teorías de los números reales formuladas en el siglo pasado.

La primera fue sugerida por Weierstrass y desarrollada por Cantor. Equivale, en efecto, a identificar un número real con una sucesión infinita de números racionales comúnmente considerados como aproximaciones graduales al primero. En la aritmética elemental contamos, por ejemplo, con un procedimiento para la extracción de raíces cuadradas, y mediante una reiterada aplicación de este último podríamos resolver el valor de $\sqrt{2}$ con tantos decimales como deseemos. Ya que $\sqrt{2}$ es un número irracional, el procedimiento nunca nos llevaría a un punto final, esto es, a una expresión decimal concluida en ceros o un período de cifras recurrente, por más que nuestro uso de la expresión «resolver el valor de $\sqrt{2}$» pueda incitarnos a pensar que haya de haber una expresión decimal completa, esto es, que $\sqrt{2}$ sea de la misma naturaleza que los números que llamamos sus aproximaciones. De acuerdo con Cantor, el número real $\sqrt{2}$ vendría a identificarse con la sucesión 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, etcétera, a través de la cual procederemos a dar primero entrada a un decimal, luego a dos, luego a tres, luego a cuatro y así indefinidamente. La secuencia decimal en cuestión es potencialmente infinita, pero nos será dado sentar reglas para operar con ella como un número puesto que la sucesión de sus términos se halla fijada por medio de una ley.

La segunda teoría de los números reales, propuesta por Dedekind en su *Stetigkeit und irrationale Zahlen* de 1872, constituye una moderna versión de la teoría de las proporciones de Eudoxo. Aunque no es posible hallar ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a dos, podremos dividir exhaustivamente el dominio de los números racionales en

aquellos que son números positivos con cuadrados mayores que dos y aquellos que no lo son. Según Dedekind, $\sqrt{2}$ es precisamente el «corte» que divide de esa manera a los números racionales. Si ello resuena demasiado paradójico, podríamos decir que $\sqrt{2}$ es el conjunto infinito de los números racionales que satisfacen la segunda condición, pues el lugar de la cortadura se halla unívocamente determinado por la constitución del conjunto inferior. Dicha formulación presenta la ventaja de facilitar la comparación de la definición con otras definiciones de números de tipo superior. Pues así como los números enteros con cualificación de signo, los racionales y los complejos se definen todos ellos como conjuntos de números del tipo inmediatamente inferior, de la misma manera se definen en esta teoría los números reales por relación a los racionales. Pero aquí, como en el esquema de Cantor, el conjunto empleado como *definiens* de un número real ha de ser infinito. Ambas teorías de los números reales son equivalentes en el sentido de que un cálculo de sucesiones infinitas construido siguiendo la prescripción de Cantor detentará la misma estructura que un cálculo de cortaduras construido siguiendo la prescripción de Dedekind. Lo que, por lo demás, no es sorprendente, ya que una sucesión indefinida convergente es el instrumento apropiado para localizar una cortadura dedekindiana.

La definición de los números reales por medio de conjuntos infinitos de números racionales resulta satisfactoria en el sentido de proporcionarnos cuanto cabía esperar del cálculo de números reales y relacionar a este último con el cálculo de números racionales que lo precede. Pero no basta para permitirnos la aritmetización del análisis, si por ella entendemos —como al parecer la entendía Kronecker— la reducción de todos los enunciados matemáticos a enunciados acerca de números naturales. Pues un enunciado que se refiera a un conjunto *infinito* de números racionales no puede ser reducido en el estricto sentido en que lo pueda ser un enunciado que únicamente se refiera a un conjunto finito de números racionales dados. Y, si abandonamos el programa de una completa reducción, tendremos todavía que hacer frente a la dificultad de probar la consistencia de las reglas específicas adoptadas para nuestro cálculo de números reales. ¿Cómo poder hacer tal cosa sin incurrir en una petición de principio, a saber, la de dar por sentada la existencia de los números que se supone habrían de definir las reglas en cuestión? Aun si estas críticas no llegaron a explicitarse formalmente durante el siglo XIX, estaban sin embargo bien presentes en la mente de algunos matemáticos a los que no podían por menos de causar inquietud. Frege, por ejemplo, al igual que Kronecker, nunca llegó a sentirse completamente satisfecho de las teorías de los números reales vigentes en su tiempo. En capítulos ulteriores tendremos ocasión de considerar más detalladamente algunas de esas dificultades.

3. Boole y el álgebra de la lógica.

La geometría y el álgebra han contribuido de diversa manera al desarrollo de la lógica matemática. La geometría, según vimos en la primera sección de este capítulo, proporcionó un campo para la elaboración de las nociones fundamentales de la axiomática, en tanto el álgebra suminis-

traría un modelo a imitar en la construcción de un cálculo lógico. Leibniz tuvo conciencia ya en el siglo XVII de la existencia de una cierta analogía entre la disyunción y la conjunción de conceptos, por una parte, y la adición y la multiplicación de números por otra, pero no encontró fácil formular esa analogía en términos precisos ni menos aún servirse de ella como base para un cálculo de la lógica. Esta fue la tarea que habría de llevar a cabo George Boole (1815-64) en su *Mathematical Analysis of Logic* [15]. La idea de que las fórmulas algebraicas pudieran ser usadas para expresar relaciones lógicas se le ocurrió por vez primera antes de los veinte años de edad, cuando trabajaba como bedel en una escuela privada de Lincoln y procuraba formarse por su cuenta mediante un amplio repertorio de lecturas. Pero el renovado interés por la lógica que le llevó a escribir su opúsculo en 1847 se debió a la aparición en publicaciones periódicas de una serie de cartas sobre la un día famosa controversia en que Sir William Hamilton de Edimburgo reclamaba para sí la prioridad en la adopción de la doctrina de la cuantificación de los predicados, acusando a Augustus De Morgan de plagiario y haciendo necias observaciones acerca de la falta de capacidad educativa de las matemáticas. Antes de la publicación de su obra Boole escribió a De Morgan, cuyos intereses compartía, pero este último se hallaba a la sazón dando los últimos toques a su *Formal Logic* y le sugirió que ambos debían publicar sus resultados antes de consultarse mutuamente. Los dos libros aparecieron simultáneamente y una anécdota cuenta que llegaron el mismo día a las librerías.

Aunque el interés de Boole por la lógica matemática se viese estimulado por una efímera disputa, no fue sin duda casual que poco antes de escribir su folleto hubieran tenido lugar vivas discusiones acerca de la naturaleza del álgebra. Podemos presumir que le eran conocidos por lo menos algunos de los trabajos de Peacock, Gregory, De Morgan y Sir William Rowan Hamilton mencionados en la última sección. Gregory, editor del *Cambridge Mathematical Journal*, era amigo personal suyo y había depositado su confianza en las posibilidades de nuestro autor como matemático. Aparte de ello, el interés estético de Boole por la matemática le llevaba a tener en alta estima cualquier intento en pro de la generalidad abstracta que comenzaba a caracterizar a aquella disciplina. Su misma reputación había quedado ya establecida por su ensayo *A General Method in Analysis* de 1844, en el que trataba de contribuir a la generalización del razonamiento algebraico haciendo un libre uso del cálculo de operadores, o de separación de símbolos, como por aquel entonces se le denominaba.

Las obras publicadas hasta la fecha arrojaban dos importantes resultados que habrían de servir a Boole de punto de partida: (I) el descubrimiento de la posibilidad de un álgebra de entidades que no fuesen números en ninguno de los sentidos convencionales del vocablo, y (II) el descubrimiento de que las leyes que rigen para cualquier clase de números hasta llegar a los complejos, e incluidos estos últimos, no necesitan ser conservadas en su totalidad por un sistema algebraico que no resulte aplicable a tales números Con su característico genio para la generalización,

---

[15] Para una sucinta biografía de Boole, cf. W. Kneale, "Boole and the Revival of Logic", *Mind*, LVII (1948), pp. 149-75.

Boole entrevió rápidamente que un álgebra podría ser desarrollada como un cálculo abstracto susceptible de interpretaciones diversas. La concepción de la lógica que derivó de esta intuición se halla claramente expuesta en la primera sección de su *Mathematical Analysis of Logic*:

«Quienes se hallan familiarizados con el estado actual de la teoría del Algebra Simbólica saben bien que la validez de los procesos de análisis no depende de la interpretación de los símbolos empleados, sino tan sólo de las leyes que regulan su combinación. Todos los sistemas de interpretación que dejen intacta la verdad de las relaciones supuestas resultan igualmente admisibles, y así es como un mismo procedimiento podría representar, bajo un esquema dado de interpretación, la solución a una cuestión acerca de las propiedades de los números, bajo otro la de un problema geométrico y bajo un tercero la de un problema de dinámica o de óptica... El rasgo distintivo de un auténtico Cálculo podríamos hacerlo consistir precisamente en el hecho de ser un método que descanse en el empleo de Símbolos cuyas leyes de combinación sean conocidas y generales y cuyos resultados admitan una interpretación coherente. La asignación de una interpretación cuantitativa a las formas de Análisis actualmente existentes no es sino el fruto de las circunstancias que han determinado la imposición de dichas formas, por lo que no cabe erigirla en una condición universal del Análisis. El Cálculo de la Lógica que me propongo elaborar tiene por fundamento este principio general, sobre el que me baso para recabar a su favor un puesto entre las formas reconocidas del Análisis Matemático, con independencia de que por el momento haya de ser clasificado por separado en razón de sus objetos e instrumentos.»

Los ejemplares de la primera edición del folleto de Boole escasean hoy, y no cabe pensar que se vendieran muchos en su tiempo. Un año más tarde, sin embargo, el autor publicó un breve compendio de su Cálculo de la Lógica en el *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, que alcanzaría probablemente una mayor difusión entre los matemáticos que el folleto originario. El compendio no añade nada a la teoría contenida en este último, pero es algo más fácil de seguir y concluye con un párrafo que resume con meridiana claridad la posición de Boole:

«La concepción de la naturaleza del lenguaje que presentan estas investigaciones es sumamente interesante. Aquél es exhibido no como una mera colección de signos, sino como un sistema de expresiones cuyos elementos se hallan sujetos a las leyes del pensamiento que representan. Que estas leyes son tan rigurosamente matemáticas como las leyes que gobiernan las concepciones puramente cuantitativas del espacio y el tiempo, del número y la magnitud, es una conclusión que por mi parte no dudo en someter al más estricto de los escrutinios.»

En 1849 obtuvo Boole la cátedra de matemáticas en el Queen's College de Cork, recientemente fundado, y comenzó inmediatamente la preparación de un libro más extenso acerca de su teoría lógica. De este período de su vida dijo luego que la ciencia de la mente constituía durante el mismo su dedicación principal, sirviéndole las matemáticas sólo de pasatiempo. No quiere ello decir que abandonara su producción en el campo de la matemática (por esta época redactó algunas notas sobre los cuaternios), pero invirtió gran parte de su esfuerzo en familiarizarse con lo que habían escrito los filósofos acerca de los fundamentos de la lógica. El resultado de estos años de trabajo fue *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded The Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Esta obra, publicada en 1854 a expensas de Boole y de un amigo, no se vendió muy bien, pero pudo ser leída por muchas personas que desco-

nocían su *Mathematical Analysis of Logic* y a menudo se la considera como la obra maestra de Boole. La novedad más importante del libro la constituye la aplicación de sus ideas al cálculo de probabilidades. Dicha aplicación se halla bien traída; pero, por lo demás, la obra no es demasiado original. No encierra modificaciones importantes en su aspecto formal, y no puede decirse que sus ideas capitales se hallen expuestas con mayor lucidez que en su obra primitiva. Algunos ejemplos, no obstante, son objeto en ella de un detallado tratamiento y ciertos pasajes metafísicos revisten interés aunque sólo sea por la luz que arrojan sobre el horizonte de lecturas del autor.

Hacia el fin de su vida, Boole se declaraba insatisfecho de la articulación y exposición de sus *Laws of Thought* y hubiera deseado invertir el doble de tiempo y espacio en la elaboración de las ideas primeramente presentadas en su *Mathematical Analysis of Logic*. Un año antes de su muerte informó a Jevons en una carta de que se hallaba muy ocupado con los preparativos de una nueva edición de su libro sobre las ecuaciones diferenciales, pero esperaba retornar a la lógica tan pronto como se viera libre de esas obligaciones y proponía diferir la lectura de la obra de Jevons con el fin de evitar todo posible equívoco acerca del origen de los puntos de vista que en la suya habría de expresar. Resulta interesante especular con los cambios que podría haber introducido en una revisión de las *Laws of Thought*, pero las selecciones de sus borradores de estos últimos años que han sido publicadas parecen sugerir que lo que Boole tenía *in mente* era más bien un desarrollo de sus concepciones epistemológicas que no una alteración de los aspectos formales de su obra. En estos trabajos se menciona en particular una distinción entre la Lógica de Clases (esto es, su cálculo de la lógica) y una lógica de orden superior y más vasto alcance, que no cabría ya reducir a un cálculo pero podría ser entendida como «la Filosofía de *todo* pensamiento expresable en signos, cualquiera que sea el objeto de dicho pensamiento» [16]. Parece improbable, por lo tanto, que una mayor perseverancia en su proyecto hubiese dado lugar a una obra de mayor calidad. Pues lo cierto es que Boole había elegido un mal camino al tratar de buscar los fundamentos de la lógica en la constitución del intelecto humano. De hecho, una de las razones más justas de su fama es el haber contribuido a liberar a la lógica de su servidumbre respecto de la epistemología, haciendo así posible su renacimiento como una ciencia independiente. El primer paso en la ruptura con la confusa tradición de los siglos diecisiete y dieciocho fue dado por Bolzano, filósofo matemático él mismo, pero correspondió a la obra de Boole mostrar con claridad por vía de ejemplo que la lógica podía ser provechosamente estudiada sin referencia alguna a nuestros procesos mentales. Sin duda Boole creía estarse ocupando de las leyes del pensamiento en algún sentido psicológico de esa ambigua expresión, pero de lo que se ocupaba en realidad era de algunas de las leyes más generales de lo pensable.

---

16 G. Boole, *Studies in Logic and Probability* (ed. R. Rhees), 1952, p. 14. Aparte de opúsculos publicados en vida —como, por ejemplo, el *Mathematical Analysis of Logic*—, esta colección contiene extractos de los trabajos en posesión de la Royal Society (9 f) y en particular un borrador "On the Mathematical Theory of Logic and the Philosophical Interpretation of its Methods and Processes". Al parecer, Boole no se mostraba suficientemente satisfecho con ninguno de estos trabajos para darlos a una publicación periódica, y De Morgan —que los revisó tras la muerte de Boole— se pronunció contra su impresión. Agradecemos al Dr. W. Mays habernos facilitado copias de la correspondencia entre Boole y Jevons durante los años 1863 y 1864.

En la exposición del sistema de Boole es conveniente comenzar por aquella interpertación que, con toda probabilidad, hubo de suscitar su idea de un cálculo de la lógica. Supongamos que letras tales como x e y representan clases y que el uso del símbolo $=$ entre dos símbolos de clases indica que las clases en cuestión poseen los mismos miembros. En ese caso, la intersección o solapamiento de dos clases, es decir, la clase integrada por todas las cosas que pertenecen por igual a aquellas dos, podría ser representada mediante un símbolo complejo tal como xy. Esta convención se halla sugerida por el modo como ensartamos adjetivos cuando tratamos de especificar alguna clase más o menos estrictamente delimitada. Así, cuando hablamos por ejemplo de la clase de las cosas cuadradas, rojas y grandes. De hecho, Boole no distingue demasiado tajantemente entre adjetivos y símbolos de clases, llamando a veces a las letras x, y, z, etc., símbolos *electivos* por concebirlos como símbolos que eligen —esto es, seleccionan— determinadas cosas sometidas a nuestra atención.

Entre todas las clases distinguibles hay, sin embargo, dos casos límites para los que resulta conveniente contar con símbolos especiales. Se trata de la clase *universo*, o clase de la que toda cosa es miembro, y la clase *nula*, o clase de la que nada es miembro. Ambas clases se hallan respectivamente representadas en el simbolismo de Boole por medio de los símbolos 1 y 0. El empleo de estos últimos puede haberle sido sugerido por las convenciones vigentes en la medida de las probabilidades, pero reviste el gran mérito de acomodarse a su deseo de retener hasta donde sea posible en su nuevo cálculo de la lógica el formalismo algebraico de uso normal. Pues, en efecto, las dos ecuaciones $1x=x$ y $0x=0$ son tan válidas en la interpretación en términos de clases a que se acaba de aludir como lo puedan ser en la interpretación numérica ordinaria. Lo apropiado de esta notación no debe, empero, hacernos olvidar que la introducción de las nociones de clase universo y clase nula entraña una interesante novedad. Aristóteles, como vimos, había confinado su atención a los términos generales que no son ni universales en el sentido de aplicarse a toda cosa ni tampoco nulos en el sentido de carecer enteramente de aplicación. Cuando Boole introdujo las nociones de clase universo y clase nula extendió, pues, notablemente el uso ordinario de la palabra «clase». Y si hubiera desarrollado consistemente su nuevo uso de la misma, se habría visto llevado bastante más lejos del esquema aristotélico de lo que nunca pensó ir. Por otra parte, desde su introducción a nuestros días se ha descubierto que el empleo irrestricto de la noción de clase universo pudiera conducir a serias paradojas. Pero, en la práctica, Boole siempre interpretó su signo 1 de modo que significase lo que llamara De Morgan el *universo del discurso*, esto es, no la totalidad de los objetos concebibles, cualquiera que sea su género, sino más bien todos los miembros de una determinada categoría de cosas sobre las que en un momento dado recae la discusión. Así, en un contexto en que los términos «británico» y «extranjero» determinasen clases complementarias, el universo del discurso sería el género humano [17].

Ya que hay una evidente similitud entre el simbolismo booleano para la intersección de clases y el tradicional simbolismo de la multiplicación de números, se ha hecho habitual la descripción de la intersección de dos clases

17 A. De Morgan, *Formal Logic*, p. 55.

como su producto lógico. En las reglas del simbolismo de la intersección concurre, no obstante, una importante peculiaridad que se halla en cambio ausente en las reglas que presiden la multiplicación numérica. Si x denota una clase, la intersección de dicha clase consigo misma será la propia clase en cuestión, de suerte que tendríamos $xx=x$ como una ecuación básica. En su *Mathematical Analysis of Logic* Boole expresa a menudo semejante circunstancia por medio de la fórmula $x^n=x$, considerándola el rasgo distintivo de su cálculo. Enseguida volveremos a encontrarnos con ella bajo otra formulación.

La división aparece en el álgebra numérica como la operación inversa de la multiplicación, pero en su tratamiento de las clases Boole no da entrada comúnmente a una operación análoga a la división. A este respecto apunta que, si las letras x, y, z denotan clases, no podremos pasar de la ecuación $xz=yz$ a la ecuación $x=y$. La clase de los arcedianos solteros quizá sea coextensa con la clase de los arcedianos pelirrojos, pero de ahí no se sigue que todos los solteros sean pelirrojos. No hay que olvidar, sin embargo, que hasta en el álgebra numérica se imponen limitaciones al uso de la operación de división para poder considerarlo correcto o apropiado. Nadie podría pasar, pongamos por caso, de la ecuación $2\times0=3\times0$ a la ecuación $2=3$. Hasta aquí, pues, acaso quepa la posibilidad de encontrar, después de todo, algún analogado de la división en la teoría de las clases, y el propio Boole llegó a sugerir que dicho analogado podría ser la abstracción (operación que Leibniz representó en una ocasión como una sustracción). Supongamos que x, y, z denotan clases relacionadas entre sí del modo que se indica mediante la ecuación $x=yz$. Lo que sugiere Boole es que habríamos de escribir $x/y=z$ para expresar el hecho de que z denota una clase obtenida al abstraer de la pertenencia a la clase llamada x la restricción de hallarse incluida en la clase llamada y. Por ejemplo, cabría decir tal vez que, así como la clase de los hombres es el producto lógico de la clase de los seres racionales y la clase de los animales, con esta nueva notación tendremos que

$$\frac{\text{la clase de los hombres}}{\text{la clase de los seres racionales}} = \text{la clase de los animales.}$$

Pero es importante tomar nota de dos limitaciones a dicha convención. En primer lugar, la expresión x/y carecerá de todo posible significado en el cálculo de clases si la clase denotada por x no forma de hecho parte de la clase denotada por y. Esta limitación se asemeja a la que impide que la expresión x/y pueda poseer significado en el álgebra de los enteros si el número denotado por x no es un múltiplo del número denotado por y. En segundo lugar, la expresión x/y se hallará generalmente indeterminada en el cálculo de clases, pues puede haber una pluralidad de clases diferentes cuyas intersecciones con la clase denotada por y sean todas ellas coextensas con la clase denotada por x. En lugar del ejemplo antes citado cabría igualmente bien haber escrito, pongamos por caso, este otro ejemplo

$$\frac{\text{la clase de los hombres}}{\text{la clase de los seres racionales}} = \text{la clase de los primates,}$$

por más que la clase de los primates no sea ciertamente idéntica a la clase de los animales. Esta nueva limitación al uso de la notación sugerida es bastante más seria que la anterior y acaso explique la renuncia de Boole a asignar una interpretación lógica a la expresión x/y.

En el álgebra de clases puede usarse el signo complejo $x+y$ para significar la clase de las cosas que pertenecen a la clase denotada por x o a la clase denotada por y. Ahora bien, la partícula «o» posee en castellano ordinario dos significados perfectamente distinguibles según que se la use en un sentido inclusivo o exclusivo. La mayor parte de los lógicos matemáticos que sucedieron a Boole han acostumbrado a interpretar $x+y$ como el signo de la unión, o suma lógica en un sentido inclusivo, de las clases designadas mediante x e y, esto es, de suerte que la clase designada mediante $x+y$ contenga a la clase designada mediante xy. Esta última convención reporta considerables ventajas desde el punto de vista formal, dado que nos permite aseverar la ecuación $x+x=x$ y, de este modo, elaborar todo el cálculo de acuerdo con un principio de dualidad para la unión y la intersección. En particular, nos sería dado adoptar ahora las dos reglas de De Morgan

$$\overline{xy} = \bar{x}+\bar{y}$$
$$\overline{x+y} = \bar{x}\,\bar{y}$$

en las que el signo $\bar{x}$ representa el complemento de la clase designada mediante x, esto es, representa la clase de todas las cosas que no pertenecen a la clase designada mediante x. Boole establece en cambio que, si las letras x e y designan clases, no habremos de escribir $x+y$ a menos que las clases en cuestión sean mutuamente excluyentes; y, en orden a precisar que dicha condición se halla satisfecha, expresa en ocasiones una suma lógica de la forma $x+\bar{x}y$, donde $\bar{x}$ reviste el sentido antes indicado [18]. El efecto de dicha restricción es la eliminación en su sistema de la ecuación $x+x=x$ y, con ella, de las dos reglas generales arriba mencionadas. No sería correcto, sin embargo, afirmar que adoptó una interpretación exclusiva del signo $+$ si por ello se entiende la introducción de $x+y$ como un signo de la clase de todas las cosas que pertenecen a la clase designada por x o a la clase designada por y, pero no así a la clase designada por xy. Lo que asumía era más bien que, si es correcto escribir $x+y$, la ecuación $xy=0$ ha de ser verdadera.

La razón de que Boole adoptase aquella restricción en su uso del símbolo $+$ fue probablemente su deseo de servirse del símbolo $-$ para aludir a la operación inversa de la primera. Tendríamos con ello una situación un tanto similar a la que antes veíamos a propósito de la división. Cuando x, y, z denotan clases, resulta tentador suponer que nos es dado derivar la nueva ecuación $x-y=z$ de la ecuación $x=y+z$. Pero de nuevo tropezamos con dos limitaciones a este uso en el álgebra de clases. En primer lugar, no podremos asignar significado alguno a la expresión $x-y$ si la clase denotada por y no forma parte de la clase denotada por x. Esta limitación se asemeja a la que impide dar sentido a la expresión $x-y$ en el cálculo de los números naturales a menos de que el número denotado por y sea menor que el número denotado por x. En segundo lugar, la expresión $x-y$ restará indeterminada

18 *Mathematical Analysis of Logic*, p. 52; *Laws of Thought*, pp. 38, 48, 55-56, 119.

si se toma el símbolo + en un sentido inclusivo sin especificar expresamente que los signos entre los cuales se establece representan clases no-intersectantes. Pues la ecuación $x=y+z$ pudiera resultar, en dicho caso, perfectamente compatible con la ecuación $x=y+w$ aun si las letras z y w no representan clases coextensas. Cualesquiera que hayan podido ser sus auténticos motivos, el caso es que Boole adopta la convención de que el símbolo + únicamente pueda intervenir entre signos de clases mutuamente excluyentes, lo que en definitiva le permite servirse del símbolo — como su inverso. En particular, escribe $1-x$ para designar el complemento de la clase denotada por x, introduciendo el signo $\bar{x}$ únicamente a título de abreviatura. Esta práctica le permite expresar el principio característico de su sistema por medio de la fórmula $x(1-x)=0$, que a veces deriva de la ecuación $x=x^2$, la cual no es sino un caso especial de su ley básica; pero otras veces prefiere considerarla directamente como básica, interpretándola como una formulación del principio de no-contradicción que tanto Aristóteles como Leibniz describieron como el más fundamental de todos los principios.

Con los elementos que acaban de enumerarse, este sistema de notación resulta suficiente para la expresión de las proposiciones A, E, I y O de la lógica tradicional, con la única condición de que las proposiciones A y E se consideren desprovistas de alcance existencial [19]. Suponiendo que la letra x represente la clase de las cosas X y que la letra y represente la clase de las cosas Y, tendríamos el siguiente esquema:

Todo X es Y	$x(1-y)=0$
Ningún X es Y	$xy=0$
Algún X es Y	$xy\neq 0$
Algún X no es Y	$x(1-y)\neq 0$.

Cada una de las cuatro proposiciones podría representarse de diversos otros modos algebraicamente equivalentes a los anteriores aunque algo más complicados. Se observará, no obstante, que, mientras las proposiciones universales se hallan expresadas en este esquema por medio de ecuaciones, las proposiciones particulares se expresan mediante inecuaciones. Mas Boole prefiere homogeneizar la expresión de los cuatro tipos tradicionales de proposiciones categóricas y propone, en sustitución de las dos últimas fórmulas del esquema, las dos siguientes ecuaciones:

Algún X es Y	$xy=v$
Algún X no es Y	$x(1-y)=v$.

La letra v, que se introduce aquí con el propósito de expresar las proposiciones particulares, parece corresponder a la palabra castellana «algún»; pero se dice que representa una clase «indefinida en todos los respectos menos uno», a saber, el de contener un miembro o miembros (esto es, no ser coextensa con la clase nula). Esta explicación no es muy satisfactoria. Si alguna cosa X es Y, la clase denotada por xy contendrá, en efecto, por lo menos un miembro. Pero no hay modo de aseverar tal cosa mediante la

---

[19] Esta caracterización de las proposiciones categóricas fue ofrecida por Franz Brentano en su *Psychologie vom empirischen Standpunkt* (1874), II, c. 7, siendo las consecuencias de la misma desarrolladas en detalle por su discípulo F. Hillebrand en *Die neuen Theorien der kategorischen Schlüsse* de 1891.

ecuación entre la clase denominada xy y aquella cuya única característica definitoria sea la de contener un miembro o miembros, por la sencilla razón de que no existe semejante clase.

Dentro del sistema de Boole cabe, ciertamente, operar en algunos casos con la letra v como si se tratara de un símbolo de clase. Pero esto es un defecto de la notación más bien que un mérito, ya que sugiere inferencias erróneas. Podríamos, por ejemplo, sentirnos tentados de suponer que las ecuaciones $ab=v$ y $cd=v$ implican conjuntamente la conclusión $ab=cd$. Y, aunque el propio Boole no llega a incurrir en tales falacias, el caso es que sólo consigue soslayarlas imponiendo determinadas restricciones al uso de la letra v, restricciones que por su parte son inconsistentes con la descripción ofrecida por él mismo de esa letra como un símbolo de clase. Así nos dice, por ejemplo, que podemos pasar de la ecuación $x(1-y)=0$, que significa «Todo X es Y», a la ecuación $vx(1-y)=0$, que habría entonces de ser interpretada como «Algún X es Y», pero tan sólo en el supuesto de que las ecuaciones $v(1-x)=0$ y $v(1-y)=0$ sean verdaderas, esto es, de que la clase denotada por v se halle contenida como subclase en cada una de las clases denotadas por x e y. Ya que v se supone que denota una clase que tiene por lo menos un miembro, aquella condición equivaldrá en efecto a la presuposición de que las clases denotadas por x e y no son nulas. Es obvio que el propósito de Boole con todo ello no es otro que legitimar aquellas inferencias aristotélicas que dependen del alcance existencial de los enunciados categóricos universales, pero lo cierto es que ha elegido a tal efecto un recurso poco afortunado. Pues si la letra v representase una clase, aunque lo haga en el amplio sentido en que se dice que los símbolos 0 y 1 representan clases, no habría necesidad de sentar reglas específicas para su interpretación en los diversos contextos en que se hace uso de ella. Es interesante, no obstante, reparar en que Leibniz concibió alguna vez una idea similar [20].

En orden a la interpretación del sistema en términos de clases y operaciones con clases es evidente que las fórmulas que siguen, explícita o implícitamente asumidas por Boole como premisas, expresan todas ellas proposiciones verdades:

(1) $xy=yx$
(2) $x+y=y+x$
(3) $x(y+z)=xy+xz$
(4) $x(y-z)=xy-xz$
(5) *Si* $x=y$, *entonces* $xz=yz$
(6) *Si* $x=y$, *entonces* $x+z=y+z$
(7) *Si* $x=y$, *entonces* $x-z=y-z$
(8) $x(1-x)=0$.

Las siete primeras son formalmente semejantes a las reglas del álgebra numérica ordinaria, siendo la octava regla la distintiva del sistema. Mas, según Boole, hasta esta última resultaría numéricamente interpretable mediante una oportuna restricción de los valores de la variable x. Para expresarlo con sus propias palabras:

---

20 Couturat, *La Logique de Leibniz*, pp. 345-50.

«Imaginemos, pues, un Algebra en que los símbolos *x*, *y*, *z*, etc., admitan indiferentemente los valores 0 y 1 y sólo ellos. Las leyes, axiomas y procedimientos de semejante Algebra serán idénticas en toda su extensión a las leyes, axiomas y procedimientos del Algebra de la Lógica, siendo las diferencias de interpretación lo único capaz de distinguirlas. Es sobre este principio sobre el que descansa el método de la siguiente obra»[21]:

Este y otros pasajes por el estilo han llevado a algunos comentaristas a describir el sistema de Boole como un álgebra bivalente. Semejante descripción es equivocada; pues, al tratar su sistema como un cálculo de clases, estamos lejos de asumir que toda clase sea coextensa con la clase universal o con la clase nula. Pero no deja de ser cierto que podríamos convertir el sistema de Boole en un álgebra bivalente mediante la adición del nuevo principio:

$$(9) \quad O\,x=1\,ó\,x=0.$$

El cálculo resultante podría seguir siendo interpretado numéricamente (esto es, atribuyéndose a los símbolos 1 y 0 sus sentidos numéricos ordinarios); pero no admitiría ya por más tiempo una interpretación en términos de clases. Boole no distingue tajantemente entre su sistema originario y el más restringido que envuelve el principio (9), como se desprende del hecho de que asigne a sus fórmulas dos nuevas interpretaciones lógicas sin reparar en que únicamente una de ellas satisface (9) en tanto que la otra no lo hace así. Esas dos nuevas interpretaciones revisten en sí mismas gran interés y merecen ser mencionadas a continuación.

En su *Mathematical Analysis of Logic*, y de nuevo en sus *Laws of Thought*, Boole sugiere una convención por medio de la cual la ecuación $x=1$ podría significar que la proposición X es verdadera y la ecuación $x=0$ podría significar que X es falsa. De acuerdo con esta práctica, los valores de verdad de proposiciones más complicadas podrían presentarse mediante combinaciones de letras minúsculas, como cuando se representa por ejemplo el valor de verdad de la conjunción de las proposiciones X e Y mediante la combinación xy y el valor de verdad de la disyunción exclusiva de X e Y mediante la combinación $x+y$. Como puede pensarse, tendríamos con ello todo lo necesario para una interpretación del sistema de Boole en términos de valores veritativos de las proposiciones, representando los símbolos 1 y 0 respectivamente la verdad y la falsedad. Y esta interpretación, como la interpretación numérica anteriormente mencionada, satisfaría el principio (9).

La interpretación en términos de proposiciones se halla elaborada por Boole tal y como se acaba de indicar, aunque sin hacer uso de la expresión «valor de verdad» que inventaría Frege más tarde. Pero se la acompaña a cada paso de observaciones que podrían hacernos esperar algo ligeramente diferente y acaso más interesante. En su *Mathematical Analysis of Logic* escribe Boole:

«Los símbolos electivos *x*, *y*, *z* podrían hacerse corresponder a los símbolos X, Y, Z, representativos de Proposiciones, en el siguiente sentido. El Universo hipo-

21 *Laws of Thought*, pp. 37-38.

tético, 1, comprenderá todos los casos y complejos de circunstancias concebibles. El símbolo electivo x aplicado a cualquier contenido expresivo de tales casos seleccionará aquellos casos en los que la Proposición X es verdadera, y otro tanto sucederá respecto de Y y Z. Si concentramos nuestra atención en una Proposición X dada, y procedemos haciendo abstracción de toda otra consideración, sólo serán entonces concebibles los dos siguientes casos, a saber, que la Proposición dada sea verdadera y que sea falsa. Ya que estos dos casos componen conjuntamente el Universo de la Proposición, y dado que el primero de ellos viene determinado por el símbolo electivo x, el segundo vendrá determinado por el símbolo electivo $1—x$. Mas si se admiten otras consideraciones, cada uno de dichos casos será resoluble en nuevos casos, particularmente menos extensos, cuyo número dependerá del número de consideraciones introducidas. Así, si asociáramos las Proposiciones X e Y, el número total de casos concebibles vendría exhibido por el siguiente esquema:

Casos	Expresiones electivas
1.° X verdadera, Y verdadera . . .	xy
2.° X verdadera, Y falsa	$x(1—y)$
3.° X falsa, Y verdadera	$(1—x)y$
4.° X falsa, Y falsa	$(1—x)(1—y)$

...Y se apreciará que, cualquiera que sea el número de circunstancias a tener en cuenta, la suma de las expresiones electivas que representan cada caso concebible arroja la unidad»[22].

En sus *Laws of Thought*, Boole abandona esta prometedora vía para pasar a proponer en su lugar que la letra x representa el *tiempo* durante el cual es verdadera la proposición X. Se trata de un retorno a la insatisfactoria caracterización temporal de la verdad propuesta por algunos lógicos antiguos y medievales, que tal vez le haya sido sugerida por lo que pudo leer acerca de las verdades eternas en obras de metafísica y teología. Pero tanto en un libro como en otro parece estar preparando el camino para un esquema en que los símbolos 1 y 0 no se limiten a representar la verdad y la falsedad sino representen más bien la verdad necesaria y la imposibilidad. Como la interpretación en términos de clases, este modelo tampoco satisfará el principio (9), ya que en él no es obligado que toda expresión electiva admita la ecuación con 1 ó 0.

Al final de su *Mathematical Analysis of Logic*, Boole aventura un tanto oscuramente la posibilidad de tratar la teoría de las proposiciones hipotéticas como un capítulo de la teoría de las probabilidades, dedicando varios capítulos de las *Laws of Thought* a la aplicación del nuevo álgebra a aquellas últimas. Ello equivale en definitiva a otra interpretación más del cálculo, de acuerdo con la cual la letra x representaría la probabilidad de la proposición X por relación a toda la información disponible, a saber, K. Adaptando y simplificando el simbolismo de Boole tendríamos

$$\text{Prob}_k\ (X\ e\ Y)=xy$$

si X e Y son independientes, dada K, y

$$\text{Prob}_k\ (X\ o\ Y)=x+y$$

si X e Y son mutuamente excluyentes. Es obvio que este esquema no satis-

---

22 *Mathematical Analysis of Logic*, pp. 49-50.

face el principio (9), pues no podemos conceder que toda probabilidad sea igual a 1 ó 0.

En un pasaje de las *Laws of Thought* más arriba citado, Boole afirmaba que su método se funda en la identidad del cálculo de la lógica con el álgebra numérica de 0 y 1. Más adelante, y en el mismo libro, añade enfáticamente:

«Se podría en realidad dejar a un lado la interpretación lógica de los símbolos de la ecuación propuesta, convertirlos en símbolos cuantitativos que únicamente admitan los valores 0 y 1, ejecutar con ellos todas las operaciones y transformaciones requeridas y por último restaurarles su interpretación lógica»[23].

Nosotros ya sabemos que el álgebra numérica de 0 y 1 constituye un sistema más restringido que el álgebra de clases, puesto que envuelve el principio (9) que no rige para estas últimas. Mas todo lo que pueda ser probado en el álgebra de 0 y 1 sin recurso al principio (9) como premisa tendrá, por descontado, su correspondiente analogado en el álgebra de clases; y lo cierto es que Boole no se sirve del principio (9), ni de ningún otro principio que lo implique, cuando manipula los símbolos de su cálculo. Si a veces se permite considerar a éstos como símbolos numéricos, se trata simplemente de una concesión a la costumbre que le hace, por así decirlo, sentirse entre ellos como en su casa. Pero lo esencial de su método consiste en realidad en la derivación abstracta de consecuencias, esto es, en su derivación con absoluta independencia de toda posible interpretación. Boole puso ya este punto en claro en la primera sección de su *Mathematical Analysis of Logic*, aunque por lo demás proceda luego alguna que otra vez como si se olvidara de ello.

El procedimiento fundamental en el despliegue formal del sistema de Boole es lo que éste llama una «expansión» (*development*) *. Supongamos que la expresión $f(x)$ constituya la abreviatura de una expresión que envuelva la letra x y posiblemente otros símbolos electivos, pero que aparte de ellos no contenga sino los signos algebraicos usuales que ya conocemos. En ese caso, y tomando a y b por coeficientes, tendríamos $f(x)=ax+b(1-x)$. Y, en orden a determinar los valores de a y b, únicamente necesitaríamos suponer que x admite los valores 1 y 0. Pues de este modo obtendríamos por sustitución las ecuaciones $f(1)=a$ y $f(0)=b$, de donde cabría ahora inferir

$$f(x)=f(1)x+f(0)\,(1-x).$$

Se dice de esta fórmula que constituye la *expansión* de la expresión $f(x)$ respecto de x. En su *Mathematical Analysis of Logic*, Boole considera este procedimiento como un caso degenerado del teorema de Maclaurin acerca de la expansión de funciones de potencia ascendente; pero en las *Laws of Thought* relega esta interpretación un tanto caprichosa a una nota a pie de página [24].

---

[23] *Laws of Thought*, p. 70. El párrafo aparece subrayado en el original en su totalidad.

* El término inglés *development*, traducido aquí por "expansión", se traduce más adelante (págs. 502 y ss.) por "desenvolvimiento". Aun si el uso que los autores hacen allí de dicho término se halla de algún modo emparentado con el de Boole, resulta conveniente por múltiples razones —entre ellas, la de hacer hincapié en su relación con la noción inversa de "envolvimiento"— reservar para entonces nuestra segunda traducción. *(N. del T.)*

[24] *Mathematical Analysis of Logic*, p. 60; *Laws of Thought*, p. 72.

Supongamos ahora que la expresión $\phi(x,y)$ constituya la abreviatura de una expresión que, aparte de los símbolos electivos x e y, únicamente envuelva los signos algebraicos usuales. Considerándola en primer término como un signo funcional con x por argumento, podríamos escribir

$$\phi(x,y)=\phi(1,y)x+\phi(0,y)\ (1-x).$$

Considerando ahora el resultado como un signo funcional con y por argumento, podríamos proseguir escribiendo

$$\phi(x,y)=\phi(1,1)xy+\phi(1,0)x(1-y)+\phi(0,1)(1-x)y+\phi(0,0)(1-x)(1-y),$$

que constituye la expansión completa de la expresión $\phi(x,y)$. Es fácil imaginar cómo expresiones funcionales con un número mayor de símbolos electivos podrían ser expandidas de manera similar. Si, por ejemplo, tuviéramos que habérnoslas con una función electiva de tres argumentos, su expansión contendría $2^3=8$ términos, cada uno de ellos integrado por un coeficiente igual a 0 ó 1 y una expresión producto extraída de la lista: xyz, $xy(1-z)$, $x(1-y)z$, $x(1-y)(1-z)$, $(1-x)yz$, $(1-x)\ y\ (1-z)$, $(1-x)(1-y)z$, $(1-x)(1-y)(1-z)$. Aquellos términos cuyos coeficientes sean iguales a 0 podrán naturalmente ser omitidos sin alteración del sentido de la expresión en su conjunto.

Ya que toda ecuación electiva puede ser expresada de la forma $\phi(x,y\ldots)=0$, es claro que podrá también ser expresada como la ecuación de una suma de términos y 0. De una tal ecuación podría entonces inferirse que cada uno de los términos incluidos en la suma es separadamente igual a 0, ya que los términos con valores negativos no resultan admisibles en este cálculo. Por otra parte, si tuviéramos dos ecuaciones electivas $\phi(x,y,\ldots)=0$ y $\psi(x,y,\ldots)=0$, ambas podrían ser transformadas sin merma de su potencia en una única ecuación $\chi(x,y,\ldots)=0$ que incluiría entre los términos de su forma expandida todos y cada uno de los términos incluidos en la forma expandida de cada una de las dos ecuaciones originarias. Se dirá en tal caso que esas dos ecuaciones han sido *reducidas* a una sola.

Sobre esta base sería también posible definir otra importante operación, a saber, la *resolución*. Supongamos que la información con que contamos se halle toda ella contenida en una ecuación $f(x)=0$, en la que la expresión $f(x)$ constituya la abreviatura de una expresión que envuelva símbolos electivos otros que x, y se desee encontrar una ecuación de la forma $x=\phi(y,z,\ldots)$, donde y, z, etc., sean los otros símbolos electivos. Expandiendo nuestra ecuación originaria respecto de x, tendríamos

$$f(1)x+f(0)\ (1-x)=0,$$

que podría ser reescrita de la forma

$$[f(1)-f(0)]x+f(0)=0,$$

de donde será fácil inferir

$$x=\frac{f(0)}{f(0)-f(1)}.$$

Hay que hacer notar que Boole introduce aquí la operación de división a la que hasta el presente no le ha sido asignada una interpretación fija en su cálculo de la lógica. En orden a posibilitar con carácter general la resolución de ecuaciones electivas, Boole establece, pues, algunas reglas de decodificación basadas en el supuesto de que —por lo menos en este caso— el simbolismo de la división podría interpretarse en el sentido de lo que antes llamamos abstracción. La cosa no es tan difícil como a primera vista pudiera parecer. Cuando se expande una expresión de la forma $\frac{f(0)}{f(0)-f(1)}$ respecto de los símbolos electivos en ella contenidos, el resultado es una suma de productos donde el signo de división sólo aparece en los diversos coeficientes, cada uno de los cuales habrá de revestir una de estas cuatro formas: 1/1,0/0,0/1,1/0. La primera y la tercera de ellas son sumamente fáciles de entender, puesto que cabría reducirlas a 1 y 0 respectivamente y ello no sólo en el álgebra numérica ordinaria, sino asimismo en un sistema en el que el signo de división indique la abstracción. De modo semejante, tampoco la cuarta crea grandes complicaciones, ya que puede mostrarse que no le es dado intervenir sino como coeficiente de un producto que resulte por separado igual a 0. Mas la segunda, en cambio, sí es un tanto curiosa. Boole afirma que se trata de un símbolo de cantidad perfectamente indeterminado, cuyo sentido vendría a ser el de «todo, algún o ninguno». A veces lo equipara al símbolo v de que se sirve para la expresión de proposiciones particulares, pero tal equiparación es insatisfactoria, ya que la letra v se supone que representa una clase no-nula. En su lugar quizá cupiera usar a título de abreviatura la letra w. Así, si la aplicación de las reglas de resolución condujese a un resultado de la forma

$$x=\frac{1}{1}p+\frac{0}{0}q+\frac{0}{1}r+\frac{1}{0}s,$$

donde p,q,r y s serían las diversas expresiones-productos cuya inclusión en la expresión final habría que considerar, podríamos escribir

$$x=p+wq.$$

De acuerdo con la interpretación en términos de clases, la fórmula precedente vendría a significar que la clase denotada por x consta de la clase denotada por p junto con una parte indeterminada de la clase denotada por q (a saber, todos, algunos o ninguno de sus miembros). En uno de los tardíos borradores que no llegó a publicar, Boole afirmaba que los cuatro posibles coeficientes arriba reseñados podrían interpretarse como respectivamente representativos de las cuatro categorías de universalidad, indefinición, inexistencia e imposibilidad, que en su opinión habrían de reemplazar con ventaja a la lista kantiana [25].

Boole establece, finalmente, las reglas de la operación de *eliminación*. Supongamos que nuestra información se halla representada de forma abreviada por la ecuación $f(x)=0$ y se desea averiguar qué relaciones, si las

25 *Studies in Logic and Probability*, pp. 220-6.

hay, rigen —independientemente de la clase denotada por x— entre las demás clases simbolizadas en la versión expandida de $f(x)$. Valiéndonos del procedimiento de resolución, obtendremos

$$x=\frac{f(0)}{f(0)-f(1)},$$

de donde asimismo podremos obtener

$$1-x=-\frac{f(1)}{f(0)-f(1)}.$$

Mas, por una de las reglas básicas del cálculo, tenemos

$$x(1-x)=0,$$

de donde, conjuntamente con los dos resultados anteriores obtenidos por resolución, podremos inferir ahora según Boole

$$-\frac{f(0)f(1)}{[f(0)-f(1)]^2}=0,$$

esto es,

$$f(0)f(1)=0.$$

Si el miembro izquierdo de esta última ecuación arrojase únicamente $0=0$, la ecuación originaria no permitiría la vigencia de relación alguna independientemente de la clase denotada por x. Si, no obstante, arrojase algo de la forma $\phi(y,z,\ldots)=0$, habríamos establecido que la versión completa de la ecuación $f(x)=0$ permite la vigencia de alguna relación o relaciones independientemente de la clase denotada por x.

Este argumento, ofrecido por Boole en el capítulo de sus *Laws of Thought* dedicado a la eliminación, resulta un tanto farragoso por envolver el uso de expresiones desprovistas de interpretación lógica. Pero cabría obtener el mismo resultado mediante un argumento intuitivamente más satisfactorio. Ya que la expansión de la expresión funcional $f(x)$ respecto de x arroja $f(1)x+f(0)(1-x)$, donde $f(1)x$ constituye la abreviatura de la suma de aquellos términos de la expansión completa que tienen a x por factor y $f(0)(1—x)$ constituye la abreviatura de la suma de aquellos términos que tienen por factor a $(1—x)$, $f(1)$ y $f(0)$ tendrán cada una que representar una suma de términos expresables sin recurso al símbolo x, representando $f(1)f(0)$ la expresión abreviada de su parte común, esto es, de la suma de aquellos términos que intervienen en ambos totales. Si las versiones completas de $f(1)$ y $f(0)$ no presentasen parte alguna en común, es obvio que la ecuación $f(x)=0$ no permitiría el establecimiento de relación alguna con independencia de la clase denotada por x. Si las versiones completas de $f(1)$ y $f(0)$ presentasen, en cambio, una parte común, su ecuación con 0 habría de indicar la posibilidad de establecer alguna relación con independencia de la clase denotada por x.

Mediante una serie de combinaciones de estos procedimientos calculatorios Boole se hallaba en situación de ofrecer representaciones algebrai-

cas de los diversos tipos de razonamiento reconocidos por la lógica tradicional. En particular, el razonamiento silogístico podría ser presentado como la reducción de dos ecuaciones de clases a una sola ecuación, seguida de la eliminación del término medio y la resolución respecto del término sujeto de la conclusión. Así, por citar un sencillo ejemplo, si h representase la clase de los seres humanos, a la de los animales y m la de los mortales, las premisas «Todo ser humano es un animal» y «Todo animal es mortal» podrían ser reemplazadas por las ecuaciones

$$h(1-a)=0$$
$$a(1-m)=0,$$

que cabría expresar por reducción mediante la ecuación

$$h-ha+a-am=0,$$

de donde obtendríamos a su vez, por expansión respecto de a,

$$(h-h1+1-1m)a+(h-h0+0-0m)(1-a)=0$$

o, lo que es lo mismo,

$$(1-m)a+h(1-a)=0.$$

A continuación, eliminando a de acuerdo con las reglas correspondientes, podríamos concluir

$$(1-m)h=0.$$

Esta ecuación final se halla ya formulada de manera que cabría interpretarla como si su significado fuese el de «Todo ser humano es mortal»; pero, para continuar ejercitándonos en los métodos de Boole, podríamos proceder a la resolución:

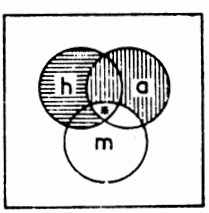
$$h=\frac{(1-m)0}{(1-m)0-(1-m)1}$$
$$=\frac{(1-1)0}{(1-1)0-(1-1)1}\,m+\frac{(1-0)0}{(1-0)0-(1-0)1}(1-m)$$
$$=\frac{0}{0}\,m+0(1-m)=wm+0(1-m).$$

Verbalmente expresado, nuestro resultado quiere decir que la clase de los seres humanos consta de una selección indeterminada (que podría ser acaso nula) de la clase de los mortales junto con una selección nula de la clase de los inmortales; en orden a excluir la posibilidad de una selección nula de la clase de los mortales, sería necesario asegurar expresamente el alcance existencial del término «hombre» en las premisas. Desde luego, no deja de ser cierto que, para romper la cáscara de esta menuda almendra, no se necesitaba de un martillo tan pesado; pero es interesante reparar en que los métodos introducidos por Boole resultan susceptibles de aplicación mecánica. Se trata, en efecto, de lo que hoy día llamaríamos un procedimiento de decisión.

4. Ulteriores desarrollos del álgebra booleana.

La novedad más importante del sistema de Boole es su teoría de las funciones electivas y su expansión, o —como diríamos hoy en día— su teoría de las funciones de verdad y su expresión en forma normal disyuntiva. Filón de Megara examinó ya algunas concretas funciones electivas, explicando cómo cabría desarrollarlas, mas corresponde a Boole el mérito de haber sido el primero en ocuparse de este punto sistemáticamente y con carácter general. Nosotros hemos citado más arriba un pasaje de su *Mathematical Analysis of Logic* que quedaba a un paso del uso de las tablas de verdad (esto es, de la tabulación de posibilidades alternativas de verdad) por parte de Frege, en su *Begrifisschrift* de 1879, con el fin de exhibir más claramente las expansiones booleanas [26]. En un trabajo de 1885, el lógico americano C. S. Peirce añadiría la observación de que una fórmula necesariamente verdadera es aquella que resta verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad a sus elementos constitutivos: «En orden a averiguar si una fórmula es necesariamente verdadera hay que sustituir las letras de la misma por *F* y *V* y comprobar si cabe suponerla falsa para alguna de estas asignaciones de valores» [27]. Y con estas nociones tendremos ya los ingredientes esenciales del método tabular de la lógica primaria que Post y Wittgenstein habrían de popularizar en 1920.

En su *Symbolic Logic* de 1881, J. Venn —otro admirador de Boole— se serviría de diagramas a base de espacios intersectantes (esto es, de modelos topológicos) para ilustrar las relaciones entre clases o las condiciones de verdad de las proposiciones. Sus diagramas difieren de los de Euler en que en los mismos parte de representar todas las posibles combinaciones por medio de áreas diferentes para pasar luego a indicar, dentro de estas últimas, cuáles de esas combinaciones han de ser nulas —y cuáles no— para que sea posible hacer valer una proposición determinada. Como Jevons, Venn creía estar elucidando uno de los principales descubrimientos de Boole; y sus diagramas, en efecto, podrían considerarse como ilustraciones de la teoría de la expansión mediante la que Boole justificaba sus diversos procedimientos de cálculo. Así, el ejemplo considerado al término de la última sección podría ser presentado, sin necesidad de recurrir al enojoso aparato booleano de los coeficientes numéricos, por medio de la siguiente figura, en la que el cuadrado representa el universo del discurso y las áreas de los tres círculos representan por su parte las tres clases de los seres humanos, los animales y los mortales:



[26] En su *Elementary Lessons of Logic* de 1870 y obras posteriores, W. S. Jevons confeccionó tabulaciones de combinaciones permisibles de términos generales, mostrando cómo cabía hacer uso de las mismas en el cálculo lógico.

[27] *Collected Papers*, III, § 387. En lo que sigue se aludirá a esta colección por medio de las siglas *C.P.*

El sombreado de un área indica la vaciedad de la clase correspondiente tal y como cabría estipularla en una posible premisa —el caso, por ejemplo, de los seres humanos que no son animales—, y la presencia de un asterisco en una de esas áreas indicará a su vez que la correspondiente clase no es vacía. En su *Symbolic Logic* de 1896, Lewis Carroll se sirvió de un esquema similar en un procedimiento por él introducido para determinar la validez de los silogismos.

Ya que los métodos de Boole son reducibles a procedimientos mecánicos, supusieron un incentivo para la mecanización de la lógica. Jevons fue el primero en reparar en dicha posibilidad, logrando construir en 1869 una máquina lógica que presentó al año siguiente ante la Royal Society [28]. En una de sus descripciones de la misma nos dice que por sus trazas parece un pequeño piano en posición vertical; pero, vista con ojos modernos, se asemeja más bien a una caja registradora, dado que los signos indicativos de las diversas combinaciones posibles de elementos (a saber, clases o proposiciones) son hechos aparecer y desaparecer mediante pulsaciones del teclado. Allan Marquand sugirió en 1885 una versión eléctrica de la máquina de Jevons, y en 1947 se construyó en Harvard —sobre un diseño diferente— un computador eléctrico, obra de T. A. Kalin y W. Burkhart, especialmente destinado a la resolución de problemas booleanos que podrían envolver hasta doce variables lógicas (esto es, letras designativas de proposiciones o clases) [29].

Cualquier moderno computador electrónico diseñado para realizar cometidos de carácter general ha de poder operar con el álgebra booleana. Pues si, en efecto, está llamado a reproducir la articulación lógica del cálculo matemático ordinario, tendrá que contar con recursos que le permitan expresar la conjunción, la disyunción, la negación y la dependencia condicional. Sus instrucciones podrían ser, por ejemplo, las de pasar, si las condiciones A y B son ambas satisfechas mediante la ejecución de ciertos procesos, a realizar C, en cuyo caso, si el resultado de C es D o E, se pasaría a realizar F, realizándose G en caso contrario, etcétera. Todo ello se consigue mediante el empleo de válvulas termoiónicas o transistores, en diversas combinaciones de montaje en serie y paralelo, como conmutadores para la canalización de los impulsos eléctricos. La posibilidad de construir a estos efectos los circuitos apropiados no es demasiado sorprendente, dado que el álgebra booleana se utilizaba ya en 1936 para el estudio de los circuitos relé y de conmutación en la ingeniería de las comunicaciones eléctricas [30]. Si la conexión de un conmutador, que ha de encontrarse en uno u otro de dos posibles estados, se hace equivaler a la afirmación de una proposición, su desconexión podría hacerse equivaler a la negación de la misma proposición, y la disposición sucesiva de dos conmutadores ven-

---

28 *The Substitution of Similars*, 1869; "On the Mechanical Performance of Logical Inference", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, CIX (1870), pp. 497-518. Puede encontrarse una descripción de la máquina, junto con un gráfico de la misma, en *The Principles of Science*, publicados por Jevons en 1874. La propia máquina se conserva en el Museum of the History of Science de Oxford. W. Mays y D. P. Henry han ofrecido un resumen de la obra de Jevons al respecto en "Jevons and Logic", *Mind*, LXII (1953), pp. 484-505.

29 B. V. Bowden, *Faster Than Thought*, pp. 333 y ss. Esta obra sobre computadoras electrónicas contiene información acerca de otras máquinas lógicas, pero el tratamiento más completo del asunto es el de Martin Gardner en su entretenido libro *Logic Machines and Diagrams*, que comienza con R. Lull.

30 C. E. Shannon, "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits", *Transactions of the American Institute of Electrical Enginners*, LVII (1938), pp. 713-23.

dría a corresponderse con la conjunción de dos proposiciones, en tanto su disposición paralela se correspondería con la disyunción de estas últimas. Una vez descrito un circuito complejo de conmutadores y relés de acuerdo con estas analogías, será posible determinar algebraicamente si ciertos cursos de conducción quedan o no abiertos en determinadas condiciones y hasta cabrá hallar un circuito que permita obtener los mismos resultados con mayor sencillez y menos aparato.

Aunque el sistema de Boole permite, como vemos, su fácil manipulación, hay que admitir que contiene defectos no sólo desde el punto de vista de la elegancia —como la restricción que nos impide escribir $x+y$ a menos de conocer la verdad de la ecuación $xy=0$—, sino asimismo del rigor, como el uso de la letra v para la expresión de las proposiciones existenciales, la admisión de coeficientes numéricos otros que 1 y 0 y el recurso a la operación de división sin haberle antes asignado un significado constante en el dominio de la lógica. A lo largo de medio siglo tras la publicación de las *Laws of Thought*, todas estas deficiencias serían subsanadas por los seguidores de Boole. Jevons inició las reformas en 1864 con su *Pure Logic, or the Logic of Quality apart from Quantity*, en la que sugería el uso del símbolo + en el sentido del «o» inclusivo sin imponer ninguna restricción acerca de la índole de los signos entre los que pudiera intervenir. Tal modificación facilitaba una considerable simplificación, por lo que habría de merecer la bienvenida de todos los autores subsiguientes con la única excepción de Venn. Como apuntó C. S. Peirce en un trabajo de 1867, permitía establecer un exacto paralelismo entre los teoremas que envuelven la adición lógica y aquellos otros que envuelven la multiplicación lógica [31]. E. Schröder sacó el mayor partido de dicha ventaja al ordenar esos teoremas en columnas paralelas en sus *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890-1905). En un trabajo de aproximadamente 1880, Peirce fue aún más lejos en esa simplificación, mostrando cómo cabía expresar todas las funciones electivas de Boole por recurso a un único signo primitivo cuyo significado fuese el de «ni ..., ni ...» [32]. Pero, como muchos otros descubrimientos de Peirce, tal reducción pasó por largo tiempo desapercibida y no se hizo uso de ella hasta su redescubrimiento por H. M. Sheffer en 1913 [33]. A Peirce le corresponde asimismo el mérito de haber reintroducido un signo con el sentido del *inest* leibniziano, idea ésta —aunque no su signo— adoptada por Schröder.

El paso más importante en esta dirección consiste, sin embargo, en la presentación del cálculo en forma estrictamente axiomática. Mientras que Boole se había contentado con caracterizar su sistema mediante un único principio que pareciera diferenciarlo del álgebra numérica ordinaria, sus sucesores intentaron explicitar todos sus presupuestos. Donde mejor cabe estudiar los resultados de esta empresa es en los dos trabajos de E. V. Huntington sobre «Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic» [33]. Aunque Huntington habla de álgebra de la lógica, presenta sus postulados abstractamente, esto es, sin referencia a ninguna interpretación en especial; y merece la pena reseñar que, aparte de su utilidad para

31 *C.P.*, III, §§ 1-19.
32 Ibid., IV, §§ 12-20.
33 *Trans. Amer. Math. Soc.* XIV (1913), pp. 481-8.
33 Ibid. V (1904), pp. 288-309, y XXXV (1933), pp. 274-304, 557-8, 971.

la lógica, esta versión reformada del álgebra booleana ha revestido un interés considerable para los matemáticos modernos. Para facilitar su comparación, el primero, segundo y cuarto de los conjuntos de Huntington se exponen a continuación formulados, hasta donde ello es posible, en el simbolismo de Boole. No es preciso insistir, por lo demás, en que los diversos signos empleados —incluidos 1 y 0— no tienen otro sentido que el asignado a los mismos por dichos postulados.

El primero de esos conjuntos de postulados es una adaptación del presentado por A. N. Whitehead en su *Universal Algebra* de 1898, siendo el que más se aproxima al sistema de Boole por tomar como primitivas las dos operaciones de la adición y la multiplicación. Ambas operaciones se suponen aplicables a cualquier par de miembros de una clase de objetos que, para abreviar, llamaremos elementos del álgebra. A la hora de suministrar una interpretación lógica a los postulados, se entenderá que dichos elementos son clases o proposiciones.

Ia. *Si a y b son elementos, también lo es* $a+b$.
Ib. *Si a y b son elementos, también lo es* $a \times b$.
IIa. *Hay un elemento 0 tal que* $a+0=a$ *para todo elemento a.*
IIb. *Hay un elemento 1 tal que* $a \times 1=a$ *para todo elemento a.*
IIIa. $a+b=b+a$ *para todos los elementos a y b cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*
IIIb. $a \times b=b \times a$ *para todos los elementos a y b cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*
IVa. $a+(b \times c)=(a+b) \times (a+c)$ *para todos los elementos a, b y c cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*
IVb. $a \times (b+c)=(a \times b)+(a \times c)$ *para todos los elementos a, b y c cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*
V. *Si los elementos 0 y 1 existen y son únicos, habrá un elemento a tal que* (I) $a+\bar{a}=1$ *y* (II) $a \times \bar{a}=0$.
VI. *Hay al menos dos elementos x e y tales que* $x \neq y$.

Se observará que dichos postulados se hallan formulados de manera que exhiban la correspondencia existente en el sistema entre la adición y la multiplicación. La independencia de cada postulado respecto de los restantes puede probarse mediante la construcción de un modelo que satisfaga todos los demás sin satisfacer el postulado bajo consideración. Algunas condiciones que pudieran parecer redundantes a primera vista se hallan incluidas con el específico propósito de preservar la independencia. Así, los postulados IIa. y IIb. podrían ser falsos cuando V. sea verdadero simplemente por el incumplimiento de la condición estipulada en el antecedente.

El segundo conjunto de postulados de Huntington se asemeja a las sugerencias de Leibniz, Peirce y Schröder en que hace uso de una relación de inclusión entre elementos más bien que de cualquier operación con estos últimos. El signo de que vamos a servirnos para expresar tal relación se emplea en la matemática numérica con el sentido de «es menor que», pero ha de entenderse aquí en un sentido tal que la fórmula $a<b$ no excluya la fórmula $a=b$. Si, como es usual, se supone que los elementos del álgebra son clases, el signo en cuestión podría interpretarse como una inclusión en el sentido en que una subclase se incluye en una clase superior, pero *no* como una pertenencia.

1. $a<a$ *para todo elemento* a.
2. *Si* $a<b$ *y* $b<a$, *entonces* $a=b$.
3. *Si* $a<b$ *y* $b<c$, *entonces* $a<c$.
4. *Hay un elemento 0 tal que* $0<a$ *para todo elemento* a, $\neq 0$.
5. *Hay un elemento 1 tal que* $a<1$ *para todo elemento* a, $\neq 1$.
6. *Si* $a\neq b$ *y ni* $a<b$ *ni* $b<a$, *habrá un elemento* s *tal que* (I) $a<s$, (II) $b<s$ *y* (III) *si* y, $\neq s$, *es tal que* $a<y$ *y* $b<y$, *entonces* $s<y$.
7. *Si* $a\neq b$ *y ni* $a<b$ *ni* $b<a$, *habrá un elemento* p *tal que* (I) $p<a$, (II) $p<b$ *y* (III) *si* x, $\neq p$, *es tal que* $x<a$ *y* $x<b$, *entonces* $x<p$.
8. *Si los elementos 0 y 1 existen y son únicos, entonces habrá para todo elemento* a *un elemento* $\bar{a}$ *tal que* (I) *si* $x<a$ *y* $x<\bar{a}$, *entonces* $x=0$ *y* (II) *si* $a<y$ *y* $\bar{a}<y$, *entonces* $y=1$.
9. *Si se cumplen los postulados (1), (4), (5) y (8) y no es el caso que* $a<b$, *habrá entonces un elemento* x, $\neq 0$, *tal que* $x<a$ *y* $x<b$.
10. *Hay al menos dos elementos,* x *e* y, *tales que* $x\neq y$.

En este conjunto, los postulados (1) a (7) son independientes entre sí y los postulados (8) y (9) son independientes de los siete primeros, pero o bien (6) o bien (7) podrán ser deducidos de los restantes. Aquí los retenemos a los dos en gracia a la simetría. Las letras s y p que intervienen en su enunciado han de entenderse, desde luego, como abreviaturas de «suma» y de «producto» respectivamente.

Los postulados (4) y (8) relativos a la inclusión explicitan un principio de la teoría de las clases que a menudo ha causado cierta perplejidad, a saber, el principio de que la clase nula es una subclase de todas las clases. A primera vista, pudiera parecer algo curioso hablar de una clase que carece de miembros; pero, una vez aceptada semejante extensión técnica del término «clase», el citado principio resulta natural y fácilmente inteligible. Pues, en efecto, es obvio que la intersección de cualesquiera dos clases constituye una subclase de cada una de ellas, de donde sin más se sigue que la clase designada por $a\times\bar{a}$, esto es, la clase nula, ha de ser una subclase de la clase designada mediante a, cualquiera que ésta sea.

El cuarto conjunto de postulados de Huntington se halla destinado a mostrar la posibilidad de formular todo el sistema tomando las operaciones de adición y complementación como únicas nociones indefinidas. Otras nociones, tales como la operación de multiplicación y la relación de inclusión, podrían, si se desea, introducirse por definición.

(I) *Si* a *y* b *son elementos, también lo es* $a+b$.
(II) *Si* a *es un elemento, también lo es* $\bar{a}$.
(III) $a+b=b+a$ *para todos los elementos* a *y* b *cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*
(IV) $(a+b)+c=a+(b+c)$ *para todos los elementos* a, b *y* c *cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*
(V) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}+b=a$ *para todos los elementos* a *y* b *cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*

Este, y el correspondiente conjunto para las operaciones de multiplicación y complementación, son quizá los más simples de entre los conjuntos de postulados construibles.

Pero, con ayuda del recurso de Peirce y Sheffer arriba mencionado, sería posible todavía construir un conjunto de postulados más sencillo que únicamente envuelva una operación primitiva.

(1) *Hay por lo menos dos distintos elementos.*
(2) $a|b$ *es un elemento para todos los elementos a y b.*
(3) $(a|a)|(a|a)=a$ *para todo elemento cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*
(4) $a|\{b|(b|b)\}=a|a$ *para todos los elementos a y b cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*
(5) $\{a|(b|c)\}|\{a|(b|c)\}=\{(b|b)|a\}|\{(c|c)|a\}$ *para todos los elementos a, b y c cuyas combinaciones aquí mencionadas sean también elementos.*

Este conjunto de postulados aparece en el trabajo de Sheffer antes citado, y la expresión $a|b$ se llama a menudo función barra de Sheffer. No se puede por menos de reconocer que la completa transcripción de los tres últimos postulados resulta un tanto complicada, pero cabría hacerla más natural si la expresión $a|b$ se tradujera por $\bar{a}\times\bar{b}$ o $\bar{a}+\bar{b}$ y se introdujera el signo $\bar{a}$ como abreviatura de $a|a$. El hecho de que la barra resulte por igual interpretable en dos sentidos diferentes es una interesante consecuencia del principio de dualidad.

Más recientemente, A. Tarski ha ofrecido varios conjuntos equivalentes de postulados para una extensión del álgebra booleana cuya presentación descansa en dos operaciones de carácter no-finitista, a saber, la suma lógica o unión y el producto lógico o intersección de todos los elementos de un conjunto especificado de elementos [34]. El sistema resultante se relaciona estrechamente con la teoría de la relación parte-todo desarrollada por S. Lesniewski bajo la denominación de «mereología» [35]. En realidad, la única diferencia entre ambos es simplemente que el sistema de Lesniewski excluye la posibilidad de un elemento nulo incluido en todo otro elemento.

Como se habrá podido apreciar, una característica común a todos los conjuntos de axiomas antes transcritos es el empleo que en ellos se hace de palabras corrientes como «si», lo que en definitiva exige que presupongan un sistema de lógica capaz de albergar reglas de inferencia entre proposiciones y conjuntos de proposiciones. Esto no basta para excluir la posibilidad de interpretar el álgebra de Boole como un sistema de lógica, pero sugiere por lo menos que no cabe considerarla como el apartado más simple o más fundamental de la lógica. Si los elementos del álgebra se interpretan como clases, estará claro que ha de haber una teoría más básica relativa a la derivación de unas proposiciones a partir de otras. Pero, a su vez, esta teoría más básica no podrá ya considerarse como un álgebra booleana interpretada en términos de proposiciones, dado que esta versión del álgebra entraña exactamente los mismos presupuestos que su interpretación en términos de clases. La *Begriffsschrift* de Frege fue, en 1879, el primer tratado de lógica en el que nuestra ciencia fue presentada de manera completa, comenzando por un cálculo de proposiciones

[34] "Zur Grundlegung der Booleschen Algebra", *Fundamenta Mathematicae*, XXIV (1935), pp. 177-88. Hay traducción inglesa de este trabajo en la recopilación del autor *Logic, Semantics, Metamathematics*, pp. 320-41.
[35] "O podstawach matematyki", *Przeglad Filozoficzny*, XXXIII (1930), pp. 77-105.

semejante al de Crisipo y procediendo luego en el debido orden a desarrollar un cálculo de clases. Pero ya en 1877, H. McColl había adelantado la idea de un cálculo de proposiciones cuyos principios consistiesen en implicaciones más bien que en ecuaciones, por lo que —aunque el sistema por él desarrollado no era completo en la medida que el cáculo fregeano de proposiciones— le corresponde, no obstante, la prioridad a este respecto [36].

5. La teoría de las relaciones: De Morgan y Peirce.

El éxito de Boole en la construcción de un álgebra que incluyese todos los teoremas de la lógica tradicional condujo a algunos lógicos a pensar en la posibilidad de presentar algebraicamente toda la lógica, por lo que en la generación siguiente se abordaría la tarea de elaborar una lógica de relaciones sobre el patrón de la de clases. El desarrollo más pormenorizado de esta línea de pensamiento se encuentra en las *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (vol. III, 1895) de Schröder, pero la idea originaria y la mayor parte de las proposiciones más relevantes fueron primero sugeridas por Peirce en una serie de trabajos compuestos entre 1870 y 1903 de los que puede hoy disponerse en el tercer volumen de sus *Collected Papers*. Por desgracia, la personalidad de Peirce se asemeja extraordinariamente a la de Leibniz no sólo por su originalidad como teórico de la lógica, sino asimismo por su constitutiva incapacidad para rematar los múltiples proyectos ideados.

En precedentes capítulos nos hemos referido a un cierto número de intentos esporádicos en pro del tratamiento de aquellas argumentaciones que descansan en las propiedades de las relaciones, mas la consagración del interés por la materia data de un trabajo redactado por Augustus De Morgan en 1859 [37]. El autor sostiene en él que la doctrina del silogismo, examinada en su *Formal Logic* de 1847 y otros trabajos anteriores, no es sino un caso especial de la teoría de la composición de relaciones, por lo que desea proceder a una consideración más general de la cuestión. Los cánones del razonamiento silogístico constituyen, en efecto, una proclamación del carácter convertible y transitivo de la relación de identidad. Una relación es convertible cuando se identifica con su propia conversa (como sucede, por ejemplo, con la relación de asemejarse a), y es transitiva cuando un relativo de un relativo respecto de la relación en cuestión es a su vez un relativo de la misma especie (como sucede, por ejemplo, con la relación de ser un antepasado de). El adjetivo «convertible» expresa aquí lo mismo que «simétrica» en los escritos de los lógicos posteriores. La distinción, por otra parte, no era nueva; pues, como Peirce puso de relieve, Ockham ya había descrito tales relaciones como equiparantes por contraposición a las relaciones inequiparantes cual la relación de ser padre de [38]. Mediante la expresión «relativo», de que se sirve en su definición de las relaciones transitivas, quiere dar a entender De Morgan lo que algunos lógicos han

---

[36] "The Calculus of Equivalent Statements", *Proceedings of the London Mathematical Society*, IX (1878), pp. 9-10, 177-86; X (1879), pp. 16-28; XI (1880), pp. 113-21.

[37] "On the Syllogism IV and on the Logic of Relations", *Cambridge Philosophical Transactions*, X (1864), pp. 331-58.

[38] *Summa Totius Logicae*, I, c. 52, citado por Peirce en *C.P.*, III, § 136. El término *aequiparantia* aparece ya en las *Summulae Logicales* de Pedro Hispano (ed. Bochenski, § 3.19).

llamado un término relativo, esto es, un término tal que se aplica a algo únicamente por el hecho de hallarse relacionado con algo otro. Tanto De Morgan cuanto Peirce y Schröder concibieron siempre las relaciones como expresadas mediante formas de la suerte de «— es un antepasado de ...», y pensaron que su tarea era la de mostrar cómo los términos relativos podían combinarse unos con otros y con los no-relativos.

En el cuerpo de su trabajo, De Morgan propone simbolizaciones para el converso y el contradictorio (al que llama «contrario») de un relativo, así como para tres diferentes modos de combinación de un par de relativos a los que presta especial atención. Tras de haber mostrado que el converso del contradictorio y el contradictorio del converso son idénticos, pasa a exponer en una tabla el converso, el contradictorio y el converso del contradictorio de cada una de las tres combinaciones. Su notación no es muy satisfactoria y no necesitamos reproducirla aquí. Los tres modos de combinación examinados podrían formularse por medio de expresiones del tipo de (I) *x es a de un s de y* (por ejemplo, «Juan es admirador de un superior de Pedro»), (II) *x es a de todo s de y*, (III) *x no es a de nadie más que un s de y*. Y demuestra que el converso o el contradictorio o el converso del contradictorio de cada una de esas combinaciones es a su vez una combinación de una de las especies consideradas, pero una combinación tal que un relativo simple pudiera ser en ella el converso o el contradictorio o el converso del contradictorio de un relativo simple en la combinación originaria. Así, el converso del contradictorio de la combinación «admirador de un superior de» es «no-subordinado de toda persona admirada por» o «subordinado de nadie más que una persona no-admirada por».

En su primer trabajo sobre la lógica de los relativos, publicado en 1870, Peirce enjuicia así la obra de De Morgan:

> «Este sistema deja todavía algo que desear. Más aún, el álgebra lógica de Boole posee, en su mismo estado actual, tan singular belleza y perfección que sería interesante preguntarse si no cabría extenderla a todo el ámbito de la lógica formal en vez de restringirla a ese apartado más elemental y menos útil de la misma que es la lógica de los términos absolutos, la única conocida cuando compuso aquél su obra... Al extender así el uso de los viejos símbolos a estas nuevas materias, deberemos guiarnos ciertamente de algunos principios de analogía, que una vez formulados pasarán a convertirse en nuevas y más amplias definiciones de esos símbolos» [39].

Es muy posible que la idea de un álgebra de relativos le fuera sugerida por la convención instituida por De Morgan al escribir *as* como abreviatura de *a de un s de;* pues Peirce continuó haciendo uso de semejante yuxtaposición de signos relativos, que entendía como la expresión de un producto relativo. En lo que sigue nos serviremos del símbolo $a \times_r s$ en lugar de *as* con el fin de hacer resaltar la novedad de esta concepción, así como el peligro de suponer que la multiplicación relativa sea conmutativa, esto es, que de *x es admirador de un superior de y* quepa inferir *x es superior de un admirador de y*. Prosiguiendo la misma analogía, Peirce introdujo más tarde la noción de suma relativa. Ya que el signo especial de que se sirve a estos efectos es difícil de reproducir, expresaremos dicha idea mediante el símbolo $a +_r s$. Nada había en la práctica o las convenciones de

[39] *C.P.*, III, §§ 45-46.

los lógicos anteriores que sugiriera una interpretación de un signo de esta índole, y la elección de Peirce parece haber sido guiada por el deseo de preservar el modelo de las reglas de De Morgan para las sumas y productos lógicos de términos no-relativos. Pues, en efecto, afirma que la suma relativa de «admirador» y «superior» tendría que ser «admirador de todo no-superior de». Es difícil que a nadie se le hubiera ocurrido considerar a una expresión de este jaez como un adecuado candidato al título de suma, pero esa formulación reviste el mérito de permitirnos aseverar las dos ecuaciones

$$\overline{a+_r s}=\bar{a}\times_r\bar{s}$$

y

$$\overline{a\times_r s}=\bar{a}+_r\bar{s}.$$

Los productos y sumas relativos que Peirce define de esta suerte han de ser cuidadosamente distinguidos, por supuesto, de los ordinarios productos y sumas lógicos de relativos. Por ejemplo, el signo $a\times s$ podría interpretarse como «admirador y superior», donde ambas relaciones tendrían los mismos términos; pero el signo $a\times_r s$ vendría a significar «admirador de un superior de», donde las relaciones en cuestión únicamente se combinarían de manera que el segundo término de la primera resulte ser el primer término de la segunda. Tal distinción complica inevitablemente el nuevo cálculo, en que no sólo se dará por ejemplo

$$a\times_r(b\times_r c)=(a\times_r b)\times_r c,$$

sino también

$$a\times_r(b\times c)<(a\times_r b)\times(a\times_r c),$$

donde $<$ tiene el sentido de «se incluye en» y los términos entre los cuales se establece se supone que representan clases.

¿Constituye el resultado de todo ello una extensión del álgebra booleana? Además de las tres operaciones de adición, multiplicación y negación (o complementación) que intervienen en el álgebra booleana ordinaria, el nuevo sistema cuenta también ahora con las operaciones de adición y multiplicación relativas y conversión; y, aunque no faltan las analogías entre estas tres últimas operaciones y las anteriores operaciones clásicas del álgebra, quienquiera que profundice en los detalles de la obra de Schröder estará en su derecho de dudar de que el intento de presentación algebraica de la teoría de las relaciones merezca la pena del esfuerzo que requiere. No deja de ser cierto que, como Schröder apunta, la noción de producto relativo reviste importancia para el estudio de las series, como puede apreciarse por ejemplo en la obra de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888). Pues, dentro de una serie, cada objeto precedente se halla relacionado con cada objeto subsiguiente por medio de una relación transitiva, es decir, por medio de una relación cuyas potencias son siempre equivalentes a sí mismas dado que satisface la condición $t\times_r t=t$. Pero el apartado de la teoría de las relaciones que cabría presentar de esta manera no es sino un reducido fragmento de la totalidad, e incluso para éste resulta inapropiado el estilo de presentación que impone la teoría. Cuando ya Schröder había llevado hasta sus últimas consecuencias las primitivas sugerencias de Peirce, el propio Peirce reconoció abiertamente esas limitaciones.

En un trabajo de 1883, impreso como apéndice a los *Johns Hopkins Studies in Logic*, Peirce introdujo el uso de subíndices acompañando a sus signos relacionales con el fin de indicar los términos de la relación y el orden de los mismos [40]. Así, el signo compuesto a_{ij} indicaría que la persona llamada i es un admirador de la persona llamada j. Esta notación ofrece considerables ventajas. Si, por ejemplo, deseáramos hablar acerca de una persona que se admira a sí misma lo podríamos hacer muy fácilmente con sólo escribir a_{ii}, donde la aparición por dos veces de la misma letra como subíndice indicaría que nos las habemos con el uso reflexivo —o autorrelativo, como gustaba Peirce de denominarlo— del signo relacional. Y si deseáramos hablar, como a veces hizo Peirce, de relaciones con más de dos términos, nos sería dado construir expresiones tales como a_{ijk} y b_{ijkl}. Pero el uso más importante de tales subíndices es aquel en que éstos se combinan con las mayúsculas griegas Σ y Π introducidas por Peirce en el mismo artículo. Dichos cuantificadores, como los llamó Peirce, son operadores con los significados de «algún» y «todo», que obviamente tratan de sugerir la adición y la multiplicación lógicas de todos los objetos de un cierto dominio, si bien —como él mismo reconocería más tarde— no lo podrán hacer en un sentido estricto cuando los individuos del universo considerado sean innumerables [41]. Gracias a estos recursos, estaremos ahora en situación de ofrecer definiciones claras y simples de las nociones de producto relativo y suma relativa, a saber,

$$(a \times_r s)_{ij} = \Sigma_x (a_{ix} \times s_{xj})$$

y

$$(a +_r s)_{ij} = \Pi_x (a_{ix} + s_{xj}).$$

Por el momento, éste era quizá el principal servicio que Peirce encomendaba a su nueva notación, pero al cabo de un par de años volvió a ocuparse de ella con más detenimiento [42] y con el tiempo acabaría considerándola de gran utilidad para enfrentarse a toda clase de problemas que no cupiese formular en el lenguaje de la multiplicación y la adición relativas. He aquí cómo enjuicia en 1897 su propia álgebra de los relativos diádicos:

«El profesor Schröder valora en demasía, a mi entender, los méritos de este álgebra. Aquello que a sus ojos aparece como lo más estimable de la misma —a saber, el hecho de permitirnos expresar bajo la apariencia externa de ecuaciones proposiciones cuyo auténtico significado es harto más sencillo que el de una ecuación— difícilmente cabría considerarlo como algo positivo. Pero, además del álgebra que acaba de describirse, he inventado aún otra a la que tengo por bastante más valiosa. ... Cada proposición consta en ella de dos partes: sus cuantificadores y su parte booleana. Su parte booleana consta a su vez de un cierto número de relativos enlazados por medio de la multiplicación y la agregación no-relativa. No se requieren al efecto operadores relativos (aunque, si se desea, cabría introducirlos). Cada relativo elemental se halla representado en ella por medio de una letra en línea con los cuantificadores y provista de subíndices que denotan las hecceidades [esto es, los individuos] llamados a rellenar los espacios reservados a sus términos. Un trazo sobre uno de dichos relativos indicará su negación. En cuanto a los cuantificadores, se escribirán a la izquierda de la parte booleana de la proposición. Cada uno de ellos viene a representarse por medio de una Π o una Σ acompañada de

40 Ibid. III, §§ 328-58.
41 Ibid., § 393.
42 Ibid., §§ 359-403.

uno de los subíndices, cuya misión es indicar que en la parte booleana todo objeto del universo considerado ha de poderse imaginar sucesivamente sustituido por la letra índice en cuestión y el producto no-relativo (si el cuantificador es Π) o el agregado (si el cuantificador es Σ) de los resultados sobre los que recae nuestra atención. Así,

$$\Pi_i \Sigma_j a_{ij} = (a_{11} + a_{12} + a_{13} + \text{etc.}) \,.\, (a_{21} + a_{22} \,.\, + a_{23} + \text{etc.}) \,.\, \text{etc.}$$

significará que todo el mundo admira algo. Pero

$$\Sigma_j \Pi_i a_{ij} = a_{11} \,.\, a_{21} \,.\, a_{31} \,.\, \text{etc.} + a_{12} \,.\, a_{22} \,.\, a_{32} \,.\, \text{etc.} + \text{etc.}$$

significará que algo es admirado por todo el mundo»[43].

En su trabajo de 1883 y en su más detallado estudio de 1885, Peirce atribuye estas innovaciones a su discípulo O. H. Mitchell. En su contribución a los *Johns Hopkins Studies in Logic*, éste se había servido efectivamente de signos relacionales con subíndices, así como de los operadores Π y Σ mas no de ambos recursos conjuntamente ni tampoco con el sentido que Peirce les otorgara. Lo que Peirce creó es un simbolismo aplicable a la totalidad de la lógica e idéntico por su sintaxis a los sistemas hoy en uso. Por su parte, rotuló a su sistema como Algebra General de la Lógica[44]; pero aquél no es ya un álgebra en el mismo sentido en que lo era la de Boole. Hoy en día se acostumbra a reservar el título de «álgebra de la lógica» para aquel apartado de la teoría lógica que puede ser presentado sin hacer uso de cuantificadores y que, por consiguiente, incluye toda la lógica primaria y un fragmento de la lógica no-primaria isomórfico con la primera, a saber, la teoría de los atributos o de las clases. Cuando nos ocupemos de proposiciones que en el simbolismo definitivo de Peirce quedarían expresadas mediante fórmulas tales como $\Pi_i(a_i < b_i)$, podremos prescindir de los subíndices y los cuantificadores sin riesgo de ambigüedad; pero dichos recursos resultan esenciales para la teoría general de las relaciones, y el hecho de haberlo sabido ver así constituye una muestra del talento lógico de Peirce. Vale la pena recordar asimismo que Peirce llegó a formular algunos principios muy importantes relativos al uso de cuantificadores en el proceso de la deducción. Así, cayó en la cuenta por ejemplo de que toda proposición podría ser expresada de manera que la totalidad de sus cuantificadores figuren al comienzo de la misma; y recomendó que, en la medida de lo posible, los cuantificadores existenciales precedan a los universales, lo que constituye una notable anticipación de las ventajas de lo que hoy se conoce con el nombre de forma normal prenexuada skolemiana[45]. Cierto es que no podemos atribuir a Peirce el mérito de haber sido el primero en concebir una teoría omnicomprensiva de la lógica general, pues ese honor recae sobre Frege, que publicó su *Begriffsschrift* en 1879. Mas, por lo que sabemos hasta hoy, Peirce nunca había oído hablar de Frege cuando publicó su trabajo *The Logic of Relatives* de 1883, de modo que sus logros merecen ser recordados.

Dado que fue llevado a su concepción de la lógica por sus investigaciones en el dominio de la teoría de las relaciones, no es de extrañar que Peirce atribuyera especial importancia a la noción de relación en sus últimos es-

[43] Ibid., §§ 498-502.
[44] Ibid., § 499.
[45] Ibid. III, § 505.

critos lógicos, tratando en ocasiones de extender la terminología de su teoría hasta límites ligeramente paradójicos. No contento con hablar de relativos *poliádicos*, esto es, expresiones relativas que en su notación requerirían más de dos subíndices, pasó a proponer para una expresión atributiva como «... es blanco» la denominación de relativo *monádico* y hasta llegó a llamar relativo *medádico* a una expresión proposicional completa sin lugares vacíos para subíndices [46]. Para ciertos propósitos, este modo de hablar acaso ofrezca la ventaja de su simplicidad teórica y ésta es sin duda la razón por la que lo han adoptado con posterioridad algunos lógicos, pero difícilmente cabría considerarlo como filosóficamente esclarecedor. En cambio sí que cabe extraer algún provecho de las observaciones de Peirce acerca de dos modos diferentes como su notación de los relativos podría ser puesta en conexión con la vieja terminología de sujetos y predicados:

«En el enunciado de una relación, las designaciones de los términos correlacionados han de considerarse como otros tantos *sujetos lógicos*, considerándose al relativo como el *predicado*. También podría considerarse a la totalidad del conjunto de los sujetos lógicos como un *sujeto colectivo*, cuyo *predicado* sería el enunciado de la relación» [47].

Otro interesante desarrollo de la teoría de las relaciones de Peirce es lo que éste califica como lógica secundo-intencional, a saber, la teoría de nociones tales como la identidad y la inherencia, que introduce como sigue:

«Consideremos ahora la lógica de los términos tomados en sentido colectivo. Nuestra notación, tal y como hasta aquí la hemos desarrollado, ni tan siquiera nos indica cómo expresar que dos subíndices, *i* y *j*, denotan una y la misma cosa. A estos efectos podemos adoptar una especial expresión-caso (*token*) de segunda intención, por ejemplo I, con el fin de expresar la identidad, de suerte que podamos escribir I_{ij}. Pero esta relación de identidad posee propiedades notablemente peculiares. La primera de ellas es que, si *i* y *j* son idénticos, lo que sea verdad de *i* será verdad de *j*. Podríamos formular tal propiedad de la siguiente manera

$$\Pi_i \Pi_j \{\bar{I}_{ij} + \bar{x}_i + x_j\}.$$

El uso de *x* como índice genérico de una expresión-caso indica que la fórmula es icónica. La otra propiedad es que, si todo lo que es verdad de *i* es verdad de *j*, entonces *i* y *j* serán idénticos. Ello puede expresarse como sigue de un modo sumamente natural. Sea la expresión-caso *q*, que significará la relación de una cualidad, característica, hecho o predicado a su sujeto. En ese caso, la propiedad que deseamos expresar será

$$\Pi_i \Pi_j \Sigma_k (I_{ij} + \bar{q}_{ki} q_{kj}),$$

y la identidad quedará entonces definida

$$I_{ij} = \Pi_k (q_{ki} q_{kj} + \bar{q}_{ki} \bar{q}_{kj}).$$

Esto es, decir que dos cosas son idénticas es lo mismo que decir que todo predicado es verdadero de ambas o falso de ambas. Acaso pueda parecer una petición de principio la introducción de la idea de cualidad para expresar la identidad, pero tal impresión se desvanecerá al reflexionar sobre que $q_{ki} q_{kj}$ quiere decir tan sólo que *i* y *j* se hallan ambos dentro de la clase o colección *k*. Si gustamos, podríamos prescindir de la expresión-caso *q*, sirviéndonos del índice de una expresión-caso y

46 Ibid., § 465.
47 Ibid., § 467.

refiriéndonos al mismo en nuestro Cuantificador como si se tratara de un subíndice. Es decir, podríamos escribir

$$I_{ij}=\prod_x(x_ix_j+\bar{x}_i\bar{x}_j)\text{»}^{48}.$$

El término «expresión-caso» no reviste en este pasaje el específico sentido de «locución concreta y particular» que Peirce habría de conferirle más adelante, sino que significa aquí un símbolo general de los que con frecuencia llama un relativo, en tanto que «índice» se refiere a cualquier signo cuyo único cometido sea dirigir nuestra atención hacia otra cosa e «icono» a cualquier signo que represente algo por medio de una imagen [49]. Así, cuando nos dice que una cierta fórmula es icónica por contener el índice genérico de una expresión-caso, lo que nos trata de decir es que esa fórmula encierra el patrón o modelo de una diversidad de fórmulas posibles, por lo que desempeña una función que hoy calificaríamos de esquemática. La letra *q* de que se sirve para significar la relación de una característica a un sujeto o de una clase a un miembro es obviamente un signo constante de gran importancia. Peirce lo introduce con el fin de facilitar la generalización acerca de todo el campo de los posibles predicados de *i* y *j* sin por ello abandonar la convención de que los cuantificadores únicamente se refieran a los índices subyacentes o subíndices. Pero a continuación procede a conceder que, si lo deseamos, podríamos abandonar tal convención y permitir que un cuantificador se refiera a un índice de una expresión-caso, lo que es tanto como decir en la terminología hoy en boga que podemos emplear los cuantificadores para ligar variables predicativas. En ulteriores capítulos tendremos ocasión de examinar más detenidamente las implicaciones de estos dos modos de generalización susceptibles de recaer sobre cualidades o clases. Por el momento únicamente es menester que resaltemos la notable penetración de que hizo gala Peirce al distinguir esta nueva investigación de la del resto de la lógica, apellidándola de secundo-intencional. Se trata, en efecto, de los primeros pasos de lo que hoy día llamamos la teoría de conjuntos.

48 Ibid. III, § 398; cf. IV, §§ 80-84.
49 Ibid. III, §§ 361 y ss.

VII. NUMEROS, CONJUNTOS Y SERIES

1. Frege y sus contemporáneos.

El siguiente gran paso en la historia de la lógica tras la obra de Boole fue dado por Gottlob Frege (1848-1925). Pero mientras que Boole trataba de presentar a la lógica como una parte de la matemática, Frege intentó mostrar que la aritmética se identifica con la lógica. A primera vista, los dos programas parecen contrapuestos, y los filósofos poco propicios a uno y otro han apuntado burlonamente esta aparente contradicción. Sin embargo, no hay entre ellos una auténtica contradicción. Cuando Boole programaba el análisis matemático de la lógica, pensaba únicamente en la presentación de la lógica como un cálculo bajo ciertos aspectos semejante al álgebra numérico. Como Leibniz, consideraba que el cometido específico de la ciencia matemática era la construcción de cálculos y confiaba en la posibilidad de elaborar interesantes cálculos susceptibles de ser interpretados sin referencia al número o la cantidad. Frege no deseaba, por su parte, negar tal posibilidad. Por el contrario, fue mucho más lejos que cualquiera de sus predecesores en su exigencia de rigor formal en el estudio de la lógica, y el cálculo o sistema deductivo por él elaborado es la mayor hazaña consumada por autor alguno en la historia de nuestra disciplina. Pero trató también de hacer ver que los números podían ser definidos sin referencia a otras nociones que las envueltas en la interpretación de su cálculo como un sistema de lógica. De estar Frege en lo cierto, la lógica incluiría la aritmética y con ella todas aquellas ramas de la matemática que quepa reducir a la aritmética en el sentido de poderse demostrar que no envuelven tampoco otras nociones que las que ya se encuentran en esta última o la lógica.

La sugerencia de que la aritmética constituye una extensión de la lógica había ya sido adelantada por otros autores antes de Frege, como éste mismo sabía bien [1]. Pero nadie hasta él había mostrado nunca con detalle cómo desarrollar la lógica por medio de un sistema que asimismo mereciera la denominación de aritmética. Y Frege reparó tempranamente en que esta tesis no se podía satisfactoriamente hacer valer hasta haber introducido dos importantes mejoras en la presentación de la lógica. En primer lugar, había que organizar tanto el material tradicional cuanto las nuevas contribuciones de Leibniz y Boole de forma tal que en ellas se transparentase la verdadera estructura de nuestra ciencia, así como la compleja variedad de formas proposicionales a considerar dentro de la lógica general. En segundo lugar, había que explicitar desde un comienzo todo cuanto pudiera requerirse para la demostración de los teoremas, reduciendo el procedimiento de la deducción a un corto número de pasos perfectamente controlables de suerte que no exista el peligro de inconscientes subrepciones de lo que se desea probar en cada caso [2]. Fue en orden a satisfacer estos dos requisitos de

---

1 *Die Grundlagen der Arithmetik*, §§ 15-17. Esta obra, citada en adelante como *Gl.*, ha sido traducida al inglés por J. L. Austin bajo el título de *The Foundations of Arithmetic*.

2 *Gl.*, §§ 90-91.

rigor y sistematización como en 1879 compuso Frege su *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Como su nombre indica, el opúsculo de Frege constituye un manual de ideografía o escritura conceptual. El autor afirma en su prefacio que la relación de su lenguaje simbólico con el habla ordinaria es semejante a la del microscopio con el ojo, reclamando para ella los merecimientos que Leibniz y otros predijeron en el siglo XVII para un posible *calculus philosophicus et ratiocinator.* Una de las tareas de la filosofía —según nos dice— es liberar a la mente humana de la tiranía de la palabra, y su propia contribución constituye ya un paso en la emancipación de la lógica de una servidumbre demasiado estrecha a la gramática del lenguaje ordinario. En particular, hay que esperar que la confusa y ambigua terminología de «sujeto» y «predicado» ceda ahora su lugar en la lógica a una más satisfactoria distinción entre diversas formas proposicionales sobre la base de su teoría de la función. Mediante la adición de unos cuantos signos específicos que contribuyan a hacer más intuitivas determinadas relaciones, cabría incluso la posibilidad de aplicar su ideografía a la confección de un cálculo geométrico como aquel a que los matemáticos aspiran cuando hablan de un *analysis situs.* Pero por el momento su intento se reduce a demostrar que dicho lenguaje simbólico resulta ya adecuado, en su estado actual, para la presentación de la aritmética, pudiendo considerarse la tercera parte de su libro como un avance preliminar de este programa.

Por desgracia, el opúsculo de Frege, que marcaba un hito en la evolución de la lógica y abría una nueva época para esta última, pasó igualmente desapercibido a los matemáticos y filósofos del momento. Como el propio Frege apuntaría más tarde, nada había que esperar de muchos matemáticos que —al tropezar con expresiones lógicas como «concepto», «relación» o «juicio»— se excusaban diciendo *Methaphysica sunt, non leguntur;* así como tampoco cabía esperar nada de muchos filósofos que, al tropezar con una fórmula, se apresuraban a decir *Mathematica sunt, non leguntur* [3]. En 1884 compuso Frege un nuevo libro bajo el título de *Die Grundlagen der Arithmetik,* en el que ofrecía una exposición informal de sus puntos de vista junto con abundantes críticas de las ideas vigentes acerca de la naturaleza de la aritmética. El libro no tenía otra finalidad que contribuir a la verosimilitud de su tesis central, y —aunque bastante desanimado por la indiferencia con que había sido acogida su anterior obra— continuaba confiando en poder aducir una rigurosa demostración de la identidad de la aritmética y la lógica. Hacia el final de la década retornó, pues, a esta tarea, y en 1893 aparecía el primer volumen de su obra maestra *Die Grundgesetze der Arithmetik.* Durante la preparación de esta última tuvo ocasión de modificar en algunos aspectos sus primitivas concepciones en materia de filosofía de la lógica, publicando algunos de sus resultados en los tres importantes artículos «Ueber Funktion und Begriff» (1891) [4], «Ueber Begriff und Gegenstand» (1892) [5] y «Ueber Sinn und Bedeutung» (1892) [6].

3 *Grundgesetze der Arithmetik,* I, p. XII. Esta obra, de la que no hay traducción completa a otros idiomas, se citará en lo sucesivo como *Gg.*

4 *Berichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizinische und Naturwissenschaftliche Forschung,* 1891.

5 *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie,* XVI (1892), pp. 192-205.

6 *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik,* C (1892), pp. 25-50. Hay traducción inglesa de los tres artículos por P. Geach y M. Black en *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege.* Dicha traducción se acompaña de la paginación originaria de los mismos, a la que recurriremos en nuestras ulteriores referencias.

En la medida en que resultan relevantes al efecto, todas estas novedades se hallan incorporadas en sus *Grundgesetze,* mas para una adecuada comprensión de su pensamiento continúa siendo necesario referirse a los textos originarios. De nuevo en este caso la recepción de la obra de Frege resultó descorazonadora, y el segundo volumen de la misma no llegó a publicarse hasta 1903. Su autor se ocupa en él especialmente de la teoría de los números reales, pero buena parte de sus páginas se dedican a la crítica de las doctrinas al uso, concediéndose como conclusión que queda aún mucho por hacer antes de poder ofrecer una adecuada definición de los números reales. En un *Nachwort* o apéndice, escrito cuando ya la mayor parte de la obra había sido impresa, admite melancólicamente la ruina de la misma a causa del descubrimiento por Bertrand Russell de una contradicción implícita en sus premisas. Pero mantiene aún, no obstante, que su concepción de las relaciones entre aritmética y lógica es correcta en líneas generales, y trata de buscar algún procedimiento que le permita superar aquel inconveniente.

En los últimos veintidós años de su vida, Frege continuó trabajando en filosofía de la lógica y la matemática, pero publicó poco, sin duda por no haber podido dar con una solución satisfactoria a sus problemas. Algunos artículos sobre los fundamentos de la geometría publicados en 1906 demuestran escasa simpatía, y acaso también una cierta falta de comprensión, hacia el desarrollo del método axiomático en manos de Hilbert [7]. En cambio, algunos comentarios a la obra de Russell en 1910 [8], así como diversos trabajos sobre cuestiones epistemológicas publicados años más tarde, acreditan que su inteligencia conservaba todavía su vigor y su capacidad crítica. Es lamentable, pues, que sus albaceas literarios no hayan aún dado la debida cuenta del material inédito confiado a su custodia *.

En el próximo capítulo tendremos ocasión de ocuparnos de aquellos descubrimientos lógicos de Frege que gozan de la estimación universal, incluida la de sus oponentes filosóficos o matemáticos. Pero, antes de entrar en detalles, podrá sernos de utilidad esbozar aquí las líneas generales de su programa, tal y como el propio autor lo expuso en la más popular de sus obras —*Die Grundlagen der Arithmetik*—, comparando sus tesis capitales con las de sus ilustres contemporáneos J. W. R. Dedekind (1831-1916), G. Cantor (1845-1918) y G. Peano (1858-1932). Dedekind, el más veterano de todos ellos y el primero también en alcanzar la fama, había ya publicado su *Stetigkeit und irrationale Zahlen* en 1872, mas Cantor es el único del grupo que había adelantado una teoría «lógica» de la aritmética antes de Frege, por lo que habremos de comenzar por él.

---

7 "Über die Grundlagen der Geometrie", *Jahresbericht des Deutschen Mathematiker Vereins,* XV (1906), pp. 293-309, 377-403, 423-30.

8 P. E. B. Jourdain, "The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics", *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics,* XLIII (1912), pp. 237-69.

* Los inéditos de Frege habían sido inventariados con anterioridad a la Segunda Guerra Mundial por H. Scholz y F. Bachmann en "Der wissenschaftliche Nachlass von Gottlob Frege", *Actes du Congrès international de philosophie scientifique Paris 1935,* VIII, pp. 24-30. Recientemente se ha emprendido, por fin, su publicación: G. Frege, *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel,* edición con introducción y notas de H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach, Hamburgo, 1969, vol. I, *Nachgelassene Schriften. (N. del T.)*

2. La teoría cantoriana de conjuntos.

La introducción de la teoría de los números reales constituye un jalón transcendental en la matemática moderna no sólo por comportar, como ya se apuntó en un capítulo anterior, la referencia a conjuntos infinitos de números racionales, sino también porque parece requerir el reconocimiento de un nuevo género de infinitud. Mientras los números racionales pueden hacerse corresponder biunívocamente con los números naturales y se dice por ello que integran un conjunto numerablemente infinito, el simple subconjunto de los números reales comprendidos en un intervalo como el que discurre entre 0 y 1 parece ya ejemplificar un orden superior de infinitud. Cantor fue el primero en demostrarlo así valiéndose de su famoso «procedimiento diagonal». Para simplificar, consideremos a los números reales entre 0 y 1 como decimales infinitos, de suerte que 1/4 quede expresado por 0,24999..., 1/2 por 0,4999..., etcétera; y supongamos que debemos disponerlos a todos en una tabla infinita de la forma

$$0,a_1a_2a_3\ldots$$
$$0,b_1b_2b_3\ldots$$
$$0,c_1c_2c_3\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de modo que podamos hablar del primero, el segundo, el tercero de ellos y así sucesivamente. Será entonces posible construir un número real comprendido en el intervalo entre 0 y 1 por el procedimiento de colocar en el lugar de la primera cifra decimal un número cualquiera excepto a_1, 0 ó 9, en el lugar de la segunda un número cualquiera excepto b_2, 0 ó 9, en el lugar de la tercera un número cualquiera excepto c_3, 0 ó 9, y así sucesivamente. Pero este número real no sería ya idéntico a ninguno de los incluidos en la tabla, ya que ha de diferir de cada uno de ellos en por lo menos una de sus cifras decimales. Y eso es tanto como decir que la tabla no contiene todos los números reales comprendidos en el intervalo o, con otras palabras, que la totalidad de los números reales comprendidos en el intervalo no es numerable.

Con el fin de hacer frente a semejante situación, Cantor elaboró entre los años 1874 y 1897 una nueva disciplina matemática conocida bajo el nombre de teoría de conjuntos. Su obra conquistó la apasionada admiración de muchos matemáticos y concitó no menos sobre sí la apasionada condena de otros tantos. Ya que, como se habrá de ver más adelante, los debates relativos al desarrollo de la teoría de conjuntos se hallan estrechamente conectados con algunas cuestiones importantes acerca de la lógica, es necesario revisar en este punto algunas de las principales ideas puestas por Cantor en circulación.

De acuerdo con la propia definición de Cantor, un conjunto (*Menge*) es «una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto» [9]. En anteriores trabajos había empleado en su lugar el término «multiplicidad» (*Mannigfaltigkeit*) y sus sucesores se han servido indistintamente de

9 "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", I, *Mathematische Annalen*, XLVI (1895), pp. 481-512, reproducidos en *Gesammelte Abhandlungen*, ed. Zermelo, p. 282.

los vocablos *ensemble*, «totalidad», «agregado» y «clase». Un conjunto se dice que contiene sus elementos (o miembros), y de éstos se dice a su vez que pertenecen al conjunto. Un subconjunto de un conjunto dado S es aquel cuyos elementos son todos elementos de S, y de él —en cuanto diferente de sus elementos— puede decirse que es una parte de S. Un conjunto puede ser indicado enumerando sus elementos, por ejemplo el conjunto {Pedro, Pablo}, u ofreciendo una descripción general que resulte apropiada para todos sus elementos y no otros. Pero, tanto en un caso como en otro, conjuntos en posesión de los mismos elementos se considerarán idénticos, ya que un conjunto no es por definición sino una colección de elementos. Hasta aquí la teoría cantoriana de los conjuntos se asemeja a la teoría booleana de las clases, pero en rigor admite una complejidad mayor que la de esta última.

Dos conjuntos S y T se dicen equivalentes si se da entre ellos una correspondencia biunívoca, esto es, si hay alguna relación tal que mediante ella cada elemento de S se halle correlacionado con uno y sólo uno de los elementos de T y cada elemento de T se halle correlacionado con uno y sólo uno de los elementos de S. Así, el conjunto de los maridos será equivalente, en este sentido técnico, al conjunto de las mujeres casadas en una sociedad monogámica.

La potencia (*Mächtigkeit*) o número cardinal de un conjunto podrá entonces ser introducida como aquello que éste posee en común con todos los conjuntos equivalentes pero no así con otros. De acuerdo con Cantor, se trata del «concepto general que con ayuda de la actividad de nuestra inteligencia resulta de un conjunto cuando hacemos abstracción de sus diversos elementos así como del orden en que éstos vienen dados» y puede representársele mediante el signo «$\bar{\bar{S}}$», donde los dos trazos horizontales dan idea de la doble abstracción a que S es sometido. Si S es finito, $\bar{\bar{S}}$ será un número natural; mas la teoría pretende abarcar asimismo a los conjuntos infinitos, cuyas potencias no serán ya por cierto números naturales, y el mejor modo de facilitar dicha extensión consiste en ofrecer una nueva definición de infinitud. Un conjunto es infinito, diremos ahora, si puede hacerse corresponder biunívocamente con un subconjunto propio (esto es, con un subconjunto que no sea idéntico al conjunto mismo). Así, el conjunto de los números enteros positivos —1, 2, 3, etc.— podrá hacerse corresponder biunívocamente con el conjunto de los cuadrados de los enteros positivos —1, 4, 9, etc.—, por más que los cuadrados sean sólo algunos números de entre los enteros positivos. Esta definición fue por primera vez expresamente formulada por Dedekind, amigo de Cantor, en 1888 [10], pero ya Peirce había definido en 1885 un conjunto finito como aquel que no podría hacerse corresponder biunívocamente con un subconjunto propio [11], y se encuentran interesantes anticipaciones de esta idea en Plutarco [12], Proclo [13], Adán de Balsham (ya mencionado con anterioridad), Galileo [14] y Bolzano [15].

10 *Was sind und was sollen die Zahlen?*, §§ 5, 64.
11 *Collected Papers*, III, § 402.
12 *De Communibus Notitiis*, § 38 (=*Moralia* 1079A).
13 *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, Def. XVII.
14 *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, I* (*Opera*, ed. nazionale, vol. VIII, p. 78).
15 *Paradoxien der Unendlichkeit*, § 20. La introducción histórica a la traducción inglesa de esta obra, debida a D. A. Steele, contiene interesante información sobre este punto, incluidas las referencias a Plutarco y a Proclo antes citadas.

Así como los conjuntos finitos pueden ser comparados entre sí por referencia a sus números cardinales, de la misma manera podrán serlo los conjuntos infinitos. Pues, en efecto, cualquier conjunto S poseerá un número cardinal menor que el de un conjunto T si S es equivalente a un subconjunto de T pero no así al propio T. Así, N, el conjunto de los números naturales, posee un número cardinal transfinito menor que el de C, el conjunto de los números reales (lo que se llama a veces el continuo), esto es, $\overline{\overline{N}}<\overline{\overline{C}}$, ya que N es equivalente a un subconjunto de C pero no a la totalidad de este último.

Pasamos a continuación a definir un cierto número de operaciones con conjuntos a partir de las cuales se podrían construir nuevos conjuntos. En cada uno de estos casos, los conjuntos sobre los que recaen esas operaciones podrán ser por igual finitos o infinitos. (1) S+T, llamado la suma lógica (o la unión o asociación) de S y T, contiene todas aquellas cosas que son elementos de S o de T y ninguna otra. (2) ST, llamado el producto interno (o la intersección o confluencia) de S y T, contiene todas aquellas cosas que son a la vez elementos de S y de T y ninguna otra. Estas dos nociones son ambas booleanas, mas las que siguen son de nuevo cuño. (3) S×T, llamado el producto externo (o cruzado, o cartesiano) de S y T, es aquel conjunto cuyos elementos son todos los posibles pares que contienen un elemento de S y un elemento de T. (4) S^T, llamado a veces la inserción de S en T, es el conjunto de todas las posibles ordenaciones (o funciones monovalentes) por medio de las cuales cabe asignar elementos de S a todos los diversos elementos de T cuando (*a*) T no es nulo, (*b*) se concede la posibilidad de asignar un elemento de S a más de un elemento de T y (*c*) dos ordenaciones se consideran diferentes si hay al menos un elemento de T al que asignan diferentes elementos de S. Así, si T es un conjunto de tubos de ensayo y S un conjunto de sustancias químicas, S^T será el conjunto de los posibles modos de insertar las sustancias en los tubos de manera que ningún tubo contenga más de una sustancia.

De entre los conjuntos constituidos por inserción en S reviste especial importancia el denominado conjunto-potencia (*Potenzmenge*) de S. Se trata del conjunto de todos los subconjuntos de S (entre los que se cuentan S mismo y el conjunto nulo) y se le representa a menudo por «$\mathscr{U}$S», donde la letra «$\mathscr{U}$» es la inicial de la palabra alemana *Untermenge*. En orden a comprobar que $\mathscr{U}$S es de hecho un conjunto constituido por inserción en S, sólo necesitamos reparar en que un subconjunto de S se hallará determinado tan pronto como para cada uno de los elementos de S se haya decidido si se incluye o no en el subconjunto sujeto a consideración. En pocas palabras, $\mathscr{U}S=\{\text{dentro, fuera}\}^S$, donde $\{\text{dentro, fuera}\}$ será el conjunto de las posibilidades abiertas a cada elemento de S en el curso de la selección de un subconjunto dado.

Cantor declara ahora que $\mathscr{U}$S posee un número cardinal más alto que S, cualquiera que S sea; y esta proposición tiene tal importancia en su teoría que se la ha distinguido con el nombre de «teorema de Cantor». Es obvio que S equivale a una parte de $\mathscr{U}$S, a saber, al conjunto de todos los conjuntos unitarios cuyos elementos se hallen extraídos de S, por lo que para los propósitos de Cantor bastará demostrar que S no equivale a la totalidad de $\mathscr{U}$S. Supongamos, en gracia a nuestra argumentación,

que S y $\mathscr{U}$S fuesen equivalentes. Eso sería tanto como decir que hay algún esquema de correlación en el que los elementos de S se correlacionan uno a uno con los elementos de $\mathscr{U}$S. Ahora bien, los elementos de $\mathscr{U}$S son todos ellos subconjuntos de S, por lo que sería razonable preguntarnos si cada elemento de S constituye o no un elemento de su correlato en el esquema. Consideremos ahora el conjunto que contenga a todos aquellos elementos de S, y sólo a ellos, que no sean elementos de sus correlatos. Dicho conjunto tendría a su vez que ser un elemento de $\mathscr{U}$S, llamémosle u*, con lo que —de acuerdo con nuestra hipótesis originaria— habría de hallarse correlacionado con algún elemento de S, llamémosle s*. ¿Es s* un elemento de u*? Si respondemos que sí, nos estaríamos contradiciendo; pues, de acuerdo con nuestra definición, u* únicamente contendría aquellos miembros de S que no fueran elementos de sus correlatos. Pero si respondemos que no, incurriríamos igualmente en una contradicción; pues, de acuerdo con nuestra definición, cualquier elemento de S no contenido en u* tendría que ser un elemento de su correlato. Y, puesto que nos vemos abocados a un absurdo, tendremos que rechazar la suposición de que S sea equivalente a $\mathscr{U}$S. En resumidas cuentas, pues, $\overline{\overline{\mathscr{U}\mathrm{S}}} > \overline{\overline{\mathrm{S}}}$. El patrón general de esta demostración es similar al de la prueba de la no-numerabilidad del continuo, ya que muestra la imposibilidad de una determinada correlación propuesta de elementos haciendo ver que esta última permitiría la definición de un elemento no incluido en la correlación. Eso ha llevado a veces a decir que el argumento precedente es una muestra del típico procedimiento diagonal cantoriano, si bien el caso anómalo introducido para refutar la hipótesis de la equivalencia no constituye literalmente una ejemplificación de aquel procedimiento.

Como sus símbolos lo sugieren, las operaciones por medio de las cuales se constituyen nuevos conjuntos a partir de los originariamente dados tienen por cometido preparar el camino para una aritmética general de los números cardinales. Así, si S y T son mutuamente excluyentes (o disyuntos), $\overline{\overline{\mathrm{S}+\mathrm{T}}} = \overline{\overline{\mathrm{S}}} + \overline{\overline{\mathrm{T}}}$, donde la segunda intervención del signo «+» expresa la adición de números cardinales. De modo semejante, $\overline{\overline{\mathrm{S}\times\mathrm{T}}} = \overline{\overline{\mathrm{S}}}\times\overline{\overline{\mathrm{T}}}$ y $\overline{\overline{\mathrm{S}^{\mathrm{T}}}} = \overline{\overline{\mathrm{S}}}^{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}$. En tanto confinemos nuestra atención a conjuntos finitos, los resultados no serán en ningún caso sorprendentes. Mas, tan pronto tomemos en consideración conjuntos infinitos, la aritmética a que nuestras definiciones nos conducen tendrá que resultar inevitablemente diferente en múltiples aspectos de la aritmética de los números naturales. Así tendremos, por ejemplo,

$$\aleph_0 = \aleph_0 + n = n\aleph_0 = \aleph_0{}^n,$$

donde $\aleph_0$ será el número cardinal del conjunto de los números naturales y n cualquier número natural mayor que 0. En cambio, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, tal y como $2^n > n$ para cualquier número natural n; y en general $2^c > c$ para cualquier cardinal c, sea finito o transfinito. Este último es un corolario que inmediatamente se desprende del teorema de Cantor; pues, en efecto, $\overline{\overline{\mathscr{U}\mathrm{S}}} > \overline{\overline{\mathrm{S}}}$ y $\overline{\overline{\mathscr{U}\mathrm{S}}} = 2^{\overline{\overline{\mathrm{S}}}}$, de modo que $2^{\overline{\overline{\mathrm{S}}}} > \overline{\overline{\mathrm{S}}}$, cualquiera que S pueda ser. Tendremos por lo tanto una inacabable sucesión de cardinales transfinitos (o alefs) de magnitud siempre creciente: $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, etcétera. El primero de ellos será por definición el número cardinal de N, el conjunto de todos los números naturales, y el segundo se puede demostrar que habrá de ser el número

cardinal de C, el conjunto (o continuo) de todos los números reales considerado al comienzo de esta sección. Pero se ignora si $2^{\aleph_0}$ es $\aleph_1$, esto es, el número transfinito *inmediatamente siguiente* a $\aleph_0$. Cantor conjeturó que sí lo era, y Gödel ha demostrado que la hipótesis generalizada del continuo —esto es, la proposición de que $2^{\aleph_n}=\aleph_{n+1}$ para cualquier número ordinal n— es por lo menos consistente con algunos de los axiomas de la teoría de conjuntos que gozan de más amplia aceptación [16]. Con todo, nadie ha podido demostrar hasta la fecha la imposibilidad de un conjunto que no sea equivalente ni a N ni a C pero posea un subconjunto equivalente a N y sea a su vez equivalente a un subconjunto de C.

Como todos los grandes matemáticos, Cantor concebía su obra como el descubrimiento de leyes no creadas por el hombre, de las cuales se limitaría a dar un testimonio fidedigno sin aspirar a otra contribución de su cosecha que el estilo y la economía en su exposición [17]. Mas sus admiradores se han referido a veces a su teoría de los conjuntos como si se tratara de un producto visionario similar al *Kubla Khan* de Coleridge, y sus enemigos la han considerado como el fruto de una pesadilla más bien que de una ensoñación. Lo que de ella suscita una mayor fascinación o repelencia es su doctrina de la inacabable sucesión de cardinales transfinitos, doctrina que depende, según vimos, de su teorema acerca de los conjuntos-potencia. La demostración de dicho teorema constituye un argumento *ad absurdum* construido por medio del característico procedimiento diagonal, por lo que no es extraño que las sospechas despertadas por la teoría cantoriana en general hayan llevado a algunos matemáticos a cuestionar el empleo irrestricto de argumentaciones *ad absurdum* en las demostraciones de existencia.

3. Frege y sus predecesores.

Frege fue uno de los pocos admiradores con que contó la obra de Cantor en el momento de su aparición. En sus *Grundlagen* escribió por ejemplo:

«Sólo recientemente han sido introducidos los Números infinitos en una notable obra de G. Cantor (*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, 1883). Por mi parte comparto cordialmente su desprecio por la tesis de que en principio únicamente los Números finitos habrían de admitirse como dotados de realidad. Los primeros no son por cierto perceptibles mediante los sentidos, ni espaciales, más de lo que lo puedan ser las fracciones o los números negativos, irracionales o complejos; y, si restringimos el dominio de lo real al de aquellas cosas capaces de actuar sobre nuestros sentidos o por lo menos de producir efectos cuyas consecuencias próximas o remotas sean percepciones sensibles, ninguno de esos números podría en efecto gozar de realidad. Pero no menos cierto es que no necesitamos recurrir a ningún género de percepción sensible para la demostración de nuestros teoremas ... Coincidiendo, como creo, con Cantor en este punto, mi terminología difiere de la suya en alguna medida. Cantor llama 'potencia' a lo que yo considero un Número, mientras que su concepto de Número envuelve referencia a la idea de ordenación... Pero ninguno de los dos necesitamos de ulteriores extensiones de su significado, dado que ambos admitimos de entrada que el concepto de Número abarca por igual a los números infinitos que a los finitos» [18].

---

16 *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-hypothesis with the Axioms of Set Theory (Annals of Mathematics Studies*, n. 3).
17 *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 282, 477, 480.
18 *Gl.*, § 85.

Y a continuación, tras algunos comentarios acerca de la concepción cantoriana de los números ordinales, no mencionada en nuestra última sección, prosigue afirmando:

«Nada de cuanto llevo dicho pretende en modo alguno cuestionar su legitimidad y su fertilidad. Por el contrario, creo poder saludar las investigaciones de Cantor como un ensanchamiento de las fronteras de la ciencia, ya que abren una ruta puramente aritmética para el tratamiento de los Números (potencias) transfinitos de orden superior»[19].

Estas observaciones resultan especialmente dignas de mención por insertarse al término de un libro en el que abundan las críticas hostiles hacia otros autores. Las objeciones que Frege tiene que oponer a la caracterización de la aritmética por parte de sus predecesores son en rigor tan numerosas que no cabría compendiarlas en esta sección. Pero, en orden a sugerir las líneas directrices de su pensamiento, así como explicarnos las razones de su alineación junto a Cantor, habremos de detenernos en su crítica a tres filosofías rivales de la aritmética, a saber, las de J. S. Mill, Kant y los formalistas.

Desde los tiempos de Grecia, la interpretación de la matemática como una ciencia *a priori* —esto es, como una ciencia cuyas proposiciones todas se hallan establecidas sin necesidad de acudir a la experiencia en busca de información acerca de objetos particulares— ha gozado de aceptación punto menos que universal. Y fue, en rigor, la reflexión sobre la naturaleza de la investigación matemática la que llevó por vez primera a los filósofos a concebir la posibilidad de incrementar nuestro conocimiento al margen de la experiencia. Pero, en el siglo XIX, el filósofo J. S. Mill fue más allá del empirismo de Hume, tratando de sostener que la aritmética descansa en la inducción a partir de hechos relativos a agrupaciones concretas de cosas. Mill concedía que la demostración de la ecuación «5+2=7» pudiera depender del axioma según el cual «lo que se compone de partes se compone de las partes de esas partes», así como de las definiciones «7=6+1» y «6=5+1». Pero advertía que dicho axioma, siendo como es «obvio a los sentidos en todos aquellos casos a los que quepa referirnos para su decisión y de carácter, pues, tan general que vendría a coincidir con la propia naturaleza», habría de ser considerado como «una verdad inductiva o ley de la naturaleza de máxima amplitud»; y, en cuanto a las definiciones, argüía que también ellas envuelven aserciones acerca de hechos físicos relativos a colecciones susceptibles de diversos modos de descomposición[20]. Frege juzgó por tanto necesario comenzar sus *Grundlagen* defendiendo la índole apriorística de la aritmética.

Contra la caracterización de la definición ofrecida por Mill, Frege apunta que, si el uso correcto de la definición de un número de reducida magnitud requiriese el conocimiento de algún hecho físico específico, otro tanto tendría que suceder con el uso correcto de la definición de un número de elevada magnitud. Así, nadie podría establecer, pongamos por caso, que

$$1.000.000 = 999.999 + 1,$$

a menos de haber observado que una colección de un millón de cosas se descompone justamente de ese modo; en cuyo caso, un hombre capaz de

[19] Ibid., § 86.
[20] *A System of Logic*, III, XXIV, § 5.

calcular con números de nueve cifras tendría que poseer un envidiable conocimiento de la naturaleza [21]. A la sugerencia de que las leyes generales de la aritmética constituyen verdades inductivas, Frege opone la objeción de que la misma inducción parece requerir algunas proposiciones generales de la aritmética, ya que —en la medida en que se la entienda como un método científico y no como un simple proceso de habituación— dependerá en última instancia de la teoría de la probabilidad [22]. Pero su objeción más penetrante frente a la teoría empirista en su conjunto es la de que ésta envuelve la confusión de suponer que el signo «+» se refiere a la adición física [23]. Cuando nosotros decimos que 5+2=7, lo que queremos decir no es que, si vertimos dos unidades volumétricas de líquido en cinco unidades volumétricas de líquido, obtendremos siete unidades volumétricas de líquido. Pues, en efecto, este último enunciado constituiría a lo sumo una aplicación de la proposición matemática originaria, aplicación que, por lo demás, solamente tendría validez en el supuesto de no haber concurrido ninguna alteración de volumen como resultado, pongamos por caso, de alguna reacción química. Y, por descontado, cabrían otras aplicaciones de la fórmula —como al aplicar ésta, por ejemplo, a sucesos, virtudes o raíces de ecuaciones— en las que ni siquiera haría al caso hablar de agregación física alguna.

Tras haber despachado de esta suerte la teoría empirista, Frege pasa a preguntarse si las leyes de la aritmética son analíticas o sintéticas. La cuestión había ya sido antes planteada por Kant, y Frege considera a Kant como el principal exponente de la tesis de que las proposiciones matemáticas son sintéticas, si bien no acepta la versión kantiana de la distinción entre ambos tipos de juicios. De acuerdo con su propia caracterización, una verdad será analítica si para su demostración sólo necesitamos retrotraernos a definiciones y leyes lógicas de carácter general, siendo sintética si a tal efecto tenemos que echar mano de premisas que no compartan dicha condición [24]. Kant se aproximó notablemente a semejante concepción cuando trató de conectar la verdad de los juicios analíticos con el principio de no-contradicción [25], mas por desgracia trabajaba sobre la base de una idea harto insuficiente de la lógica. Cuando se preguntaba si el concepto-predicado de un juicio se halla o no contenido en el concepto-sujeto, se servía de un criterio que únicamente es aplicable a los juicios universales afirmativos del esquema aristotélico, dado que en los juicios singulares y existenciales no hay concepto-sujeto. Por otra parte, parecía entender la definición de un concepto complejo como una mera lista de características, cuando lo cierto es que las definiciones realmente importantes en el dominio de la matemática —como, por ejemplo, la de continuidad de una función— no pertenecen a aquel género [26]. Frege pone aquí el dedo en un defecto de la lógica tradicional en el que no habían reparado ni tan siquiera aquellos de entre sus predecesores con intereses más cercanos a los suyos. Leibniz, por ejemplo, había considerado a los conceptos y proposiciones en los términos presupuestos por la caracterización kantiana de

21 *Gl.*, § 7.
22 Ibid., § 10.
23 Ibid., § 9.
24 Ibid., § 3.
25 *Crítica de la Razón Pura*, B. 191.
26 *Gl.*, § 88.

las verdades analíticas, lo que, como ya vimos, hubo de constituir la razón principal de su fracaso en el intento de ofrecer una muestra convincente de las grandes conquistas proclamadas en sus escritos sobre lógica. Por su parte, Boole se había contentado con investigar aquellos patrones estructurales relativamente simples susceptibles de ser representados por los círculos de Euler. Frege se hallaba en situación de alimentar más vastas pretensiones para la lógica precisamente por haber prestado a la complejidad de la forma lógica una atención mucho mayor de lo que ningún otro autor pudiera haber imaginado antes que él. En su obra, el adjetivo «analítico» se ha de entender por referencia a su propia concepción de la lógica, y no se trata en modo alguno de un sinónimo del adjetivo «trivial» en la terminología de Locke.

Aunque Frege criticara los términos kantianos de la distinción entre verdades analíticas y sintéticas y rechazara la caracterización de la aritmética sugerida por Kant, no pudo por menos de escribir hacia el final de sus *Grundlagen*:

> «Por mi parte, no deseo hacerme acreedor al reproche de importunar con minucias a un genio a quien todos debemos mirar con agradecido respeto; me veo, por tanto, en la obligación de llamar asimismo la atención sobre el alcance de mis coincidencias con él, que supera con mucho al de mis discrepancias. Para aludir tan sólo a lo que ahora se discute, considero que Kant prestó un gran servicio al establecer la distinción entre juicios analíticos y sintéticos. Al calificar a las verdades de la geometría de sintéticas y *a priori*, puso en verdad de manifiesto su auténtica naturaleza. Y ello merece aún repetirse, dado que en nuestros propios días no siempre se le reconoce así. Si Kant se equivocó por lo que a la aritmética respecta, ello no resta en mi opinión valor a su obra. Su propósito era hacer ver la posibilidad de juicios sintéticos *a priori* en el dominio de la matemática; que éstos se den únicamente en la geometría, o de igual modo en la aritmética, tiene ya menos importancia» [27].

En un pasaje anterior había afirmado que la geometría se basa de hecho en la intuición, como lo quería Kant, y sus axiomas gobiernan todo cuanto resulta espacialmente intuible, incluidas las más estrafalarias visiones del delirio y las más audaces invenciones de la poesía:

> «Unicamente el pensamiento conceptual tiene un modo de escapar a su yugo, cuando supone por ejemplo un espacio de cuatro dimensiones o una curvatura positiva. El estudio de tales concepciones no es en modo alguno inútil, pero equivale a dejar completamente atrás el fundamento de la intuición... A los efectos del pensamiento conceptual siempre podremos suponer lo contrario de tal o cual axioma geométrico, sin por ello obligarnos a incurrir en contradicciones en el curso de la subsiguiente deducción y a despecho del conflicto entre nuestra intuición y esas suposiciones. Semejante posibilidad demuestra que los axiomas de la geometría son independientes entre sí y de las leyes primitivas de la lógica, por lo que en consecuencia son sintéticos» [28].

Se sigue de estas explicaciones que Frege no deseaba denegar la posibilidad de geometrías no-euclidianas (en un amplio sentido de la palabra «geometría»); y, de habérsele preguntado, habría presumiblemente respondido que las aserciones de los matemáticos que investigan tales siste-

27 Ibid., § 89.
28 Ibid., § 14.

mas constituyen verdades analíticas, ya que —de acuerdo con su propia caracterización de la cuestión— no serían otra cosa que enunciados condicionales garantizados por su forma lógica. De aquí se le podría haber llevado a conceder que la misma geometría euclídea, considerada como una rama de la matemática pura, es analítica. Pues el hecho, si realmente es un hecho, de que los axiomas de Euclides se apliquen necesariamente a relaciones que se dan en el espacio intuido es por entero irrelevante a la hora de estudiar la sistematización por ellos determinada. Pero Frege se atuvo a la vieja práctica de emplear la expresión «verdades de la geometría» para designar por igual a los axiomas y teoremas geométricos que a los enunciados en los que se establecen sus mutuas conexiones, lo que en definitiva explica el diferente estatuto otorgado por él a la geometría y la aritmética. Quienquiera que pretenda saber que los axiomas geométricos de Euclides son necesariamente verdaderos en el sentido que éste les confería, esto es, en tanto que enunciados generales acerca de relaciones que tienen lugar en el espacio ordinario, se comprometerá a aceptar una doctrina de la intuición como la que Frege tomó de Kant. Recíprocamente, quienquiera que se resista a hablar de la intuición como una fuente de conocimiento *a priori* tendrá que renunciar a retener la clásica concepción de las verdades geométricas respecto de *cualquier* axioma euclídeo. En resumidas cuentas, pues, la tesis que interesaba a Frege no queda refutada por una simple alteración en nuestro uso del vocablo «geometría».

Hay que admitir, no obstante, que —como el propio Frege apunta— «todos nos hallamos demasiado propicios a invocar la intuición interna cuando no nos es dado basar nuestro conocimiento en otra cosa» [29]. Y en verdad es difícil asignar un sentido preciso a cuanto Kant nos dice acerca de la intuición en su caracterización de la aritmética. En uno de sus más explícitos pronunciamientos afirma que, para sumar los números 7 y 5, hemos de ir más allá de sus conceptos «llamando en nuestra ayuda a la intuición correspondiente a uno de ellos, pongamos por caso la de nuestros cinco dedos»; y concluye que «los juicios aritméticos son, pues, siempre sintéticos, y ello tanto más evidentemente cuanto mayores sean los números considerados» [30]. Pero sería seguramente absurdo mantener que la verdad de la igualdad

$$135.664+37.863=173.527$$

se puede establecer llamando en nuestra ayuda a la intuición de 173.527 dedos. ¿Habremos de decir entonces que la doctrina de Kant, pese a su expresa declaración, únicamente tiene aplicación a números reducidos? [31]. Pero lo cierto es que, a este respecto, no hay ninguna distinción fundamental entre números reducidos y elevados. Si las fórmulas que envuelven números, pongamos por caso, de 10 en adelante resultan demostrables sin recurso a la intuición, ¿por qué no habría de suceder lo mismo con aquellas que envuelvan números menores? Y, en última instancia, ¿en qué habría de consistir esa supuesta intuición correspondiente a un número dado? La aritmética no versa sobre dedos en la misma medida en que

29 Ibid., § 12.
30 *Prolegomena*, § 2.
31 *Gl.*, § 5.

se dice que la geometría versa acerca de puntos, líneas y planos; y no hay intuición que garantice la aplicabilidad de las verdades aritméticas a todo lo numerable. Más aún, si las verdades aritméticas únicamente fuesen derivables a partir de la intuición, serían presumiblemente independientes entre sí y de las leyes de la lógica, tal y como sostenía Frege que lo eran los axiomas de Euclides. Mas si tratáramos de prescindir de alguna de las proposiciones fundamentales de la ciencia del número, el resultado no sería un sistema aritmético alternativo sino la más completa confusión [32].

De todas estas consideraciones Frege extrae la conclusión de que los fundamentos de la aritmética yacen a más profundidad que los de cualquiera de las ciencias empíricas e incluso que los de la geometría tal y como él la concibe. El dominio de lo numerable es el más vasto de todos los dominios; pues no se halla confinado a lo intuible, y ni siquiera a lo existente, sino que abarca todo lo pensable. ¿No será razonable entonces suponer que las leyes numéricas han de hallarse íntimamente conectadas con las leyes del pensamiento? Al plantearse esta pregunta, Frege no está tratando ciertamente de sugerir que la aritmética sea una rama de la psicología. Pues una y otra vez insiste en que la lógica, y con ella la aritmética que desea presentar como una extensión de la lógica, es por entero independiente de la psicología. En el prólogo a sus *Grundlagen*, por ejemplo, establece que el primero de los principios rectores de su obra es el de distinguir rígidamente entre lo lógico y lo psicológico. Y en el prefacio de sus *Grundgesetze* ataca expresamente todo intento de presentar las leyes del pensamiento como generalizaciones psicológicas, confiando en que su obra contribuya a purgar a la lógica de la infección psicologista que parecía haber contaminado a todos los libros contemporáneos sobre la materia. Lo que expresaba la pregunta antes citada lo expresa Frege en otra parte asegurando que las leyes de la aritmética no son leyes de la naturaleza, sino leyes de las leyes de la naturaleza, esto es, principios fundamentales acerca de lo pensable [33].

La tesis de Frege es, pues, que las verdades de la aritmética son analíticas porque en orden a demostrarlas únicamente se requieren definiciones y leyes lógicas. Pero en sus tiempos abundaban también los matemáticos que, aceptando esa sentencia, defendían todavía una teoría de la aritmética que Frege se consideraba en la obligación de rechazar. La cuestión en litigio a este respecto se centraba en la naturaleza de las definiciones matemáticas, a la que Frege concedía la mayor importancia. Prueba de ello es que el espacio que dedica a aquella posición en sus *Grundlagen* y sus *Grundgesetze* supera al dedicado a todas las demás concepciones de la matemática sometidas a crítica.

Cuando los matemáticos del siglo XIX pasaban revista a los progresos de su ciencia desde el Renacimiento, experimentaban a veces la impresión de que las novedades introducidas a lo largo de ese proceso habían sido creadas por el hombre más bien que descubiertas. Como su nombre implica, los números imaginarios venían siendo concebidos de esta guisa desde tiempo atrás; pero algunos matemáticos opinaban ahora que todos los tipos superiores de números, y hasta los propios números naturales,

32 Ibid., § 14.
33 Ibid., § 87.

podrían no menos ser objeto de semejante consideración. Este enfoque encajaba, por lo demás, con el talante positivista, o antimetafísico, de la época. En su *Theorie der complexen Zahlensysteme* de 1867, el matemático Hankel escribía:

«El número ya no es hoy por más tiempo una cosa, una substancia que exista por derecho propio aparte del sujeto que lo piensa y los objetos que dan lugar a él, un elemento subsistente por sí mismo como lo fue para los pitagóricos. La pregunta acerca de si un número existe sólo resulta inteligible por referencia al sujeto pensante o los objetos pensados, cuyas relaciones representan los números. Como imposible en un sentido estricto el matemático tan sólo considera a lo que es lógicamente imposible, esto es, contradictorio en sí mismo. Que los números imposibles en tal sentido son matemáticamente inadmisibles es algo que no necesita de más pruebas. Mas si los números en cuestión son lógicamente posibles, si su concepto se halla clara y precisamente definido y por lo tanto libre de contradicción, la pregunta por su existencia únicamente puede equivaler a esta otra: ¿hay en la realidad, o en el mundo que se nos da a nuestra intuición, algún substrato de esos números, esto es, objetos en los que ellos —a saber, relaciones inteligibles del tipo definido— puedan hacerse fenoménicos?» [34].

El modo de expresarse del pasaje no es demasiado claro, mas su sentido parece ser que en la matemática pura, a diferencia de la aplicada, las cuestiones existenciales se hallan fuera de lugar por tratarse de una libre construcción de la mente humana sujeta únicamente a las restricciones impuestas por la lógica.

Contra esta doctrina, Frege mantiene que es absurdo hablar de definiciones creativas:

«Con el mismo fundamento podríamos decir esto: entre los números hasta la fecha conocidos no hay ninguno que satisfaga simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{cases} x+1=2 \\ x+2=1, \end{cases}$$

pero nada hay que nos impida introducir un símbolo que resuelva el problema. A lo que cabe replicar que sí existe un tal impedimento: la satisfacción simultánea de ambas ecuaciones envuelve una contradicción. Esto es, en efecto, lo que ocurriría si para satisfacerlas estuviésemos requiriendo un número real o un número complejo ordinario. Mas frente a esto se podría redargüir que todo lo que se necesita en aquel caso es ampliar nuestro sistema numérico, creando nuevos números de acuerdo con las nuevas exigencias. Una vez así creados, todo lo que habría que hacer es esperar y ver si alguien consigue detectar en los mismos una contradicción. ¿Quién podría adivinar lo que vaya a pasar con nuestros nuevos números?... ¿Y por qué no crear aún nuevos números que permitan la suma de series divergentes? Pero basta ya: el matemático no puede crear cosas a voluntad más de lo que el geógrafo lo pueda; como a éste, únicamente le es dado descubrir lo que hay y darle un nombre» [35].

La fuente de semejante ilusión creativa ha de buscarse en la historia de la matemática. Una vez familiarizados con la operación de sustraer 2 a partir de 3, los matemáticos comenzaron a hablar de la operación de sustraer 3 a partir de 2 e introdujeron el símbolo «—1» para expresar el resultado de la misma. Y lo mismo, más tarde, cuando se habían ya familiarizado con la noción de raíz cuadrada de un número real positivo, comenzaron a hablar de la raíz cuadrada de un número negativo,

34 Pp. 6-7, citado por Frege en *Gl.*, § 92.
35 *Gl.*, § 96.

introduciendo el símbolo «i» como abreviatura de «$\sqrt{\ }-1$». En cada uno de estos casos daba la sensación de que el ámbito de la matemática había quedado ensanchado mediante la postulación de algo no dado de antemano, lo que tentaba a afirmar que los nuevos números habían sido creados mediante reordenaciones de los antiguos signos. Pero este modo de hablar comporta un serio error por lo que se refiere a la naturaleza de las definiciones. Quienquiera que crea haber dado exhaustiva cuenta de su uso del símbolo «i» escribiendo «$i=\sqrt{\ }-1$» ha de asumir algún significado para el signo «$\sqrt{\ }$», y nada hay todavía en la explicación originaria del uso de este signo que justifique su uso en el nuevo contexto. Si, no obstante, alegamos que la definición creativa de los números imaginarios envuelve asimismo una extensión de la definición de «$\sqrt{\ }$», no haremos otra cosa que sumirnos en la más absoluta incertidumbre. Pues esta doctrina de la definición a plazos de los signos matemáticos implicaría que el signo de la raíz cuadrada no se hallaba completamente definido en sus usos anteriores. Y «en tanto no se haya definido por completo, o se sepa por algún otro procedimiento, lo que una palabra representa, ésta no podrá ser usada en una ciencia exacta, y mucho menos con vistas a ulteriores expansiones de su propia definición» [36].

Es fácil comprender por qué los matemáticos han retenido símbolos tales como «+» y «—» a todo lo largo del dominio de la matemática, asignándoles diferentes sentidos en cada uno de los sucesivos estadios de su desarrollo. Pues, en efecto, cada uno de los cálculos de nivel inferior se halla reproducido de algún modo en cada uno de los cálculos de nivel superior. Mas, dado que esta práctica ha engendrado no pocas confusiones, Frege llega a sugerir en sus *Grundgesetze* la conveniencia de abandonarla, siquiera con propósitos filosóficos.

«En lugar de definir primeramente un símbolo para un dominio limitado pasando luego a usarlo para su propia definición en un dominio más amplio, sólo necesitamos escoger signos diferentes, confinando de una vez por todas la referencia del primero al dominio más restringido; de este modo, la primera de esas definiciones se consideraría ahora completa y suministraría una precisa divisoria. Este proceder no prejuzga en ningún caso la relación entre la referencia de un signo y la de otro, que podría seguir siendo investigada sin que el resultado de esa investigación ponga en tela de juicio la adecuación de sus definiciones. Realmente merecería la pena tomarnos la molestia de inventar un nuevo símbolo si con ello evitamos no pocas dificultades de orden lógico y aseguramos el rigor de nuestras demostraciones. Mas muchos matemáticos parecen tener en tan escaso aprecio las exigencias lógicas de pulcritud y precisión que no dudarán en servirse de una misma palabra para representar tres o cuatro cosas diferentes antes que tomar la pavorosa decisión de inventar una nueva» [37].

Quienes hablan de definiciones creativas revelan una vez más la confusión de su pensamiento cuando dicen que hay que cuidar de no incurrir en contradicciones al introducir las correspondientes novedades. Su deseo de evitar la inconsistencia es evidentemente angélico, ¿mas con qué medios cuentan para probar la consistencia de esas construcciones? «Estrictamente hablando, no hay otro modo de establecer que un concepto se halla libre de contradicción que procediendo primero a mostrar algo a lo que tenga

36 *Gg.*, II, § 57.
37 Ibid., § 60.

aplicación dicho concepto. La inferencia conversa constituye, empero, una falacia» [38]. Y si estamos en situación de mostrar algo a lo que ese concepto sea aplicable, será obviamente absurdo continuar hablando como si la definición de este último fuese un acto creador. En la práctica, sin embargo, los matemáticos que emplean ese lenguaje se limitan a dar por probada la consistencia en virtud del simple hecho de no haber detectado hasta el presente ninguna inconsistencia, pasando luego de ahí a asumir asimismo la existencia de ejemplos. A veces tratan, ciertamente, de justificar la falacia aduciendo que «existencia» en matemáticas no quiere decir más que «consistencia»; pero, si hemos de dar la razón a Frege, esa defensa constituye una agravante de su culpa, ya que implicaría la imposibilidad de probar nunca la consistencia.

De acuerdo con la concepción de Frege, un cálculo numérico versa acerca de un cierto conjunto de objetos que no son, por descontado, objetos físicos del estilo de las piedras, ni tampoco objetos psíquicos del estilo de los sentimientos, mas son no obstante objetos independientes del lenguaje. Y cuando habla de la definición de un concepto en la matemática, no se refiere para nada a la actividad constructiva supuesta por sus oponentes sino tan sólo a la delimitación del campo de aplicación de un término general por medio de una equivalencia. Así, los números complejos pueden ser definidos como pares ordenados de números reales, con lo que las operaciones con números complejos quedarían asimismo definidas por referencia a operaciones con los números reales que integran esos pares. El hecho de que usemos ciertos sonidos o figuras como términos definidos es obviamente arbitrario, mas nada hay de arbitrario en lo que se refiere a las verdades enunciadas mediante ellos una vez que los hemos definido. Pues en principio sería incluso posible eliminar todos los términos que hayamos definido expresamente. En la práctica del pensamiento matemático únicamente los necesitamos porque, sin ellos, nos sería difícil concentrar nuestra atención en la medida requerida. Son, por así decirlo, instrumentos de selección. En la filosofía de la matemática, por otra parte, nos hallamos especialmente interesados en las definiciones porque el despliegue de una satisfactoria cadena de definiciones habría de posibilitar la eliminación de todos los términos definidos; y lo que es valioso desde un punto de vista como recurso económico lo es también, desde otro, como medio de elucidación. Más aún, Frege piensa que, una vez desplegada esa cadena de definiciones, vendrá a quedar en claro que las únicas nociones indefinidas requeridas para la presentación de la aritmética son nociones extraídas de la lógica formal. En particular, desea demostrar que el lenguaje matemático en términos de números naturales resulta reducible a un lenguaje en términos de conjuntos, clases o multiplicidades, que en la terminología de los lógicos constituyen extensiones de conceptos. De ahí que expresamente afirme que los objetos aritméticos son en definitiva objetos lógicos [39].

Si se concede que los símbolos matemáticos poseen significados y que las fórmulas matemáticas se usan para hacer enunciados, el ataque de Frege a la teoría de las definiciones creativas se torna irresistible por más que quepa continuar cuestionando su pretensión de reducir la matemática a la lógica. Pero la idea de que las novedades matemáticas son crea-

[38] *Gl.*, § 95.
[39] *Gg.*, II, § 147.

ciones más bien que descubrimientos se ha asociado a menudo al repudio de la tesis de que los matemáticos en cuanto tales formulen enunciados acerca de algún tipo de objetos. Frege se ve obligado, por lo tanto, a dedicar considerable espacio a demostrar la imposibilidad de que la matemática constituya un juego a base de inscripciones carentes de significado. Nadie ha negado nunca, desde luego, que la aplicación de la aritmética envuelva la asignación de significados a los símbolos aritméticos, pero los matemáticos que se llaman a sí mismos formalistas han tratado de sostener que en la matemática pura no es necesario ir más allá de los símbolos y sus reglas de combinación, esto es, del material sobre el que podemos ejercer un perfecto control. Al comienzo de su *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen*, publicada en 1898, J. Thomae expresaba como sigue su punto de vista:

«La concepción formal de la aritmética acepta límites más modestos que su concepción lógica. No se pregunta qué sean o hayan de ser los números, sino qué es lo que en la aritmética se exige de ellos. Para el formalista, la aritmética es un juego con signos que decimos vacíos. Esto quiere decir que no poseen otro contenido (en el juego calculatorio) que el que les es asignado por su comportamiento en relación con ciertas reglas de combinación (reglas del juego). El jugador de ajedrez hace un uso similar de sus piezas: les asigna una serie de propiedades que determinan su conducta en ese juego, y las piezas en cuestión se reducen a actuar como signos externos de dicha conducta. A decir verdad, existe una importante diferencia entre la aritmética y el ajedrez. Las reglas del ajedrez son arbitrarias, en tanto que las reglas de la aritmética son tales que por medio de simples axiomas puede lograrse que los números se refieran a multiplicidades perceptibles, lo que en definitiva entraña una importante contribución a nuestro conocimiento de la naturaleza... El punto de vista formal permite desembarazarnos de toda suerte de dificultades metafísicas, y esta es la principal ventaja que en definitiva nos proporciona» [40].

En el segundo volumen de sus *Grundgesetze*, aparecido en 1903, Frege argumenta detalladamente en contra de esta nueva concepción adversaria, sosteniendo la imposibilidad de presentar la aritmética conocida sin asumir la referencia de sus signos [41].

En primer lugar, Frege apunta que de fórmulas que se reduzcan a meras combinaciones de trazos desprovistos de significados no se puede decir con propiedad que posean ninguna aplicación. Carecería de sentido hablar de aplicar el ajedrez a menos que *ya* hayamos asignado una función representativa a las piezas del mismo y sus correspondientes movimientos, por ejemplo estipulando que el movimiento de un peón en el juego ha de representar el avance de una patrulla en descubierta en el curso de una batalla entre ejércitos rivales. Ahora bien, si —como los formalistas parecen admitir— la posibilidad de aplicación es lo que distingue al pensamiento matemático de un puro y simple juego, autorizándonos a concebirlo como una tarea cognoscitiva, ¿cuándo tiene lugar la asignación de significado a sus símbolos? Al parecer, esa asignación se halla presupuesta en el dominio de la matemática aplicada, pero no hay rastro de ella sin embargo en el dominio de la matemática pura. Frege no niega la posibilidad de que, dentro de su propio sistema deductivo, quepa dar todos los pasos necesarios para la derivación de una fórmula sin ne-

40 Ibid., §§ 88-89.
41 Ibid., §§ 86-137.

cesidad de tener en cuenta para nada los significados de los símbolos que se manejan; pero no obstante advierte que, lejos de conducir a una notable simplificación, la negativa e interpretar aquellos símbolos complicaría más el problema. Ya que el interés de las fórmulas matemáticas radica en la posibilidad de su aplicación, seamos francos con nosotros mismos y admitamos que nuestras reglas de cálculo no se eligen arbitrariamente sino dependen de los significados asignados a nuestros símbolos. Si ideáramos un juego para jugar a él sobre un papel con trazos desprovistos de significados y de acuerdo con reglas arbitrarias, es obvio que ese juego no merecería ser considerado como una rama de la matemática.

En segundo lugar, Frege llama la atención sobre el hecho de que los formalistas introducen inconscientemente, en ciertos puntos críticos, significados subrepticios de sus símbolos supuestamente desprovistos de los mismos. El ejemplo más interesante de este género de autoengaño es un pasaje de la obra de Thomae en el que éste nos dice que las reglas de su juego calculatorio se hallan contenidas en una serie de siete reglas del tipo de «a+b=b+a» y «a+(b+c)= (a+b)+c». De su modo de proceder más adelante se desprende, empero, que dichas fórmulas se consideran asimismo como disposiciones iniciales en el juego calculatorio, esto es, algo así como la colocación de las piezas en el tablero al comienzo de una partida de ajedrez. ¿Pero cómo cabría sentar una regla por medio de la simple ordenación de un conjunto de trazos desprovistos de significados? Sería extraño que alguien apuntase a un tablero de ajedrez y nos dijese que la colocación de las piezas sobre el mismo es una de las reglas del juego ajedrecístico. Lo que Thomae está tratando de decirnos es evidentemente que cualquier combinación de trazos que aparezca a uno de los lados del signo de identidad en una de sus fórmulas podría reemplazar a la combinación de signos que aparezca al otro lado de aquel último; o quizás algo un poco más complicado, a saber, que toda combinación de trazos que aparezca a uno de los lados del signo de identidad en una fórmula estructuralmente —aunque acaso no alfabéticamente— similar a alguna de sus siete reglas podría reemplazar a la combinación que aparezca al otro lado de ese mismo signo. En pocas palabras, el signo de identidad, tal y como de él se hace uso aquí, expresaría la equivalencia entre ambas combinaciones a los efectos de su juego, oficiando las letras de variables destinadas a expresar la generalidad. Pero para un correcto entendimiento de la situación planteada hemos de distinguir entre el juego de Thomae y la teoría de ese juego. En tanto que el primero pudiera reducirse a una manipulación de trazos desprovistos de significados, la última —que se ocupa de las reglas del juego y de sus consecuencias— no podría en cambio formularse sin recurso a auténticos signos, esto es, signos provistos de significados. En rigor, tal teoría comporta en nuestro caso la aritmética ordinaria, y el propio Thomae no tiene otro remedio que admitirlo así en un curioso pasaje en que nos dice que sus numerales «poseen a veces algo más que una mera referencia formal incluso en el dominio de la aritmética pura, como sucede por ejemplo en la oración 'esta ecuación es de tercer grado'». Ahora bien, todos los *teoremas* de Thomae y sus correspondientes demostraciones han de pertenecer a la teoría de su juego calculatorio y no al juego mismo. ¿Qué es lo que le autoriza a creer entonces que ha logrado escapar a las restricciones impuestas por la aritmética ordinaria o significativa?

En tercer lugar, Frege denuncia con abundantes ejemplos la pertinaz confusión de los formalistas entre números y numerales. Algunos de ellos identifican expresamente a los números con signos sensibles, y otros dan la impresión de que lo hacen aun sin declararlo así. En los textos matemáticos no es infrecuente el caso de autores que escriben como si no existiese diferencia entre «*a* es la menor raíz de la ecuación» y «*a* designa la menor raíz de la ecuación». Esta indistinción entre el *uso* y la *mención* pudiera resultar inofensiva en muchos contextos, pero no en una discusión acerca de los fundamentos de la matemática y mucho menos en una exposición de la doctrina formalista. Su peligro radica en que alienta al formalista a referir a los numerales lo que sólo tendría sentido por referencia a los números. Así, Thomae trata unas veces a los números como si solamente fueran manchas de tinta en el papel, en tanto que otras veces dice de ellos que constituyen una serie infinita en orden de magnitud. Los números constituyen en efecto una serie infinita, lo que es esencial para el desarrollo de la aritmética, como puede apreciarse por ejemplo en la teoría de los irracionales. Pero el conjunto de los numerales escritos o impresos en un papel tendrá que ser siempre finito. Y, si el formalista replicara que no estaba pensando en lo que Peirce llamaría numerales-casos sino más bien en lo que llamaría numerales-tipos (como lo sería «2», por ejemplo, en el sentido en el que cabe escribir o imprimir «2» una pluralidad de veces) [42], Frege podría insistir en que ello no mejora en rigor su posición. Pues concediendo que, en efecto, cabe decir que hay infinitos numerales en este último sentido, la única garantía de esa aserción con que contamos es nuestra comprensión de la infinitud de la sucesión de los *números* naturales. Dado un numeral-tipo siempre podrá pensarse para el mismo un sucesor construido por medio del sufijo «+1», mas dicha posibilidad se debe justamente a que el número de sufijos teóricamente posibles es en definitiva ilimitado.

En cuarto lugar, Frege demuestra que las reglas ofrecidas por Thomae son por completo inadecuadas para su propósito de reproducir la aritmética prescindiendo de los significados de sus signos. Las siete reglas arriba mencionadas se supone que abarcan por igual a todos los numerales y, convenientemente interpretadas, son en verdad inobjetables en cuanto tales reglas generales. Pero nada hay en ellas que permita hacer justicia a las características distintivas de los diversos numerales. Es como si un tratadista de ajedrez nos propusiera ciertas reglas aplicables a todas las piezas por igual, pero omitiendo la mención de que existen peones, alfiles y demás. Para ser exactos, Thomae repara en algunas peculiaridades del número 0, mas lo que tiene que decir a este respecto resulta harto curioso en boca de un formalista. En efecto, nos dice que hemos de excluir combinaciones de símbolos tales como «2/0», porque la división por cero no puede ser «unívocamente (esto es, consistemente) ejecutada» y «un cociente cuyo denominador sea 0 carece de significado». Ahora bien, aun si las manipulaciones con símbolo en los que «0» intervenga a la derecha de un signo de división condujesen a resultados tales como «1=2», ¿por qué habría eso de preocuparle a un formalista? ¿Y qué objeción cabría oponer en especial a la combinación «2/0» en un sistema en el que todas las combinaciones simbólicas se hallasen desprovistas de significado? La única salida que le queda a Tho-

[42] C. S. Peirce, *Collected Papers*, IV, § 537.

mae consistiría en introducir una nueva regla que prohiba expresamente el emplazamiento de «0» a continuación o por debajo de una línea de división. Pero ni tan siquiera esto bastaría. Pues si Thomae desea que su sistema se asemeje a la aritmética ordinaria o significativa aunque no sea más que en su apariencia externa, tendría asimismo que excluir combinaciones tales como «2/(3−3)» y «2/(2+1−3)» y, en general, toda combinación en cuyo denominador puedan aparecer símbolos reemplazables por «0» en el sistema.

Todas estas críticas asestan ciertamente un golpe de muerte a la filosofía de la aritmética de Thomae, pero más adelante hemos de ver que cabe hacer una defensa de un cierto género de formalismo menos fácilmente expugnable que la suya. Sin embargo, y de acuerdo con nuestro plan, hemos de detenernos ahora a examinar en qué consiste la doctrina positiva de Frege a este respecto.

4. Las definiciones fregeanas de los números naturales.

Frege acepta la sugerencia de Leibniz, Mill y otros autores según la cual los números naturales mayores que 1 habrían de definirse por referencia a sus predecesores, esto es, por medio de ecuaciones tales como «2=1+1», «3=2+1», etc. Pero apunta que estas definiciones permanecerán incompletas en tanto el número 1 y la noción de incremento en una unidad resten indefinidos ellos mismos, llamando asimismo la atención sobre la necesidad de proposiciones generales en orden a un completo desarrollo de la aritmética [43]. Con el fin de facilitar una más adecuada comprensión de la materia decide, pues, pasar a investigar el concepto general de número natural. Llevaría demasiado lejos reseñar todas las confusiones que Frege encuentra en las obras de los autores que le precedieron, incluidas las de los grandes matemáticos desde Euclides a Cantor, pero él mismo resume el balance de su repaso histórico en el siguiente pasaje:

«El Número (*Anzahl*) no es algo abstraído de las cosas como lo puedan ser el color, el peso o la dureza, ni es una propiedad de dichas cosas en el sentido que las últimas lo son. Mas cuando formulamos un enunciado numérico, ¿qué es aquello sobre lo que recae nuestra aserción? Esta pregunta ha permanecido sin respuesta... El Número no es algo físico, pero tampoco es algo subjetivo (una idea). El Número no resulta de la anexión de unas cosas a otras... El vocablo 'uno', en cuanto nombre propio de un objeto de investigación matemática, no admite plural. En consecuencia, carece de sentido hablar de que los números resulten de agregar unidades unas a otras. El símbolo de la adición en 1+1=2 no podría significar en ningún caso una agregación de ese género» [44].

La respuesta a la pregunta nuclear de este pasaje se produce en la sección siguiente de sus *Grundlagen*, en la que Frege afirma que, estrictamente hablando, los números se asignan a conceptos y no a objetos:

«Quizá como más claro pueda verse este punto sea a propósito del número 0. Si yo digo 'Venus tiene 0 satélites', no hay satélite ninguno ni ningún agregado de satélites del que quepa afirmar nada y lo que ha sucedido es que he asignado al *concepto* 'satélite de Venus' una determinada propiedad, a saber, la de no incluir nada

43 *Gl.*, § 18.
44 Ibid., § 45.

bajo sí. Si digo en cambio 'La carroza real es arrastrada por cuatro caballos', habré asignado el número cuatro al concepto 'caballos que arrastran la carroza real'» [45].

Para una adecuada comprensión de este texto es menester tener en cuenta que, en la terminología de Frege, un concepto es algo significado por un término general o una expresión que pueda oficiar de predicado en un enunciado, en tanto que un objeto es algo susceptible de ser denominado mediante un nombre propio y se dice de él que se halla incluido bajo * un concepto o que posee un concepto a título de propiedad. La oposición entre concepto y objeto no es la que pueda darse entre lo mental y lo material, ni tampoco la que se pueda dar entre lo ideal y lo real, sino que se asemeja a la que existe entre lo universal y lo singular. Aunque, por lo demás, tampoco se corresponde exactamente con la última de estas antítesis tradicionales, puesto que de la expresión «satélite de Venus» difícilmente se podría decir que signifique un universal.

En la definición según la cual el número 0 corresponde a un concepto si bajo éste no se incluye ningún objeto concurre una aparente circularidad, ya que el término «ningún» parece reducirse a una variante del numeral «0». Pero podremos soslayar esta objeción acudiendo a la formulación «El número 0 corresponde al concepto F si, para todo x, x no se incluye bajo F». De modo semejante, podremos asimismo formular que el número $n+1$ corresponde al concepto F si hay un objeto x que se incluye bajo F y tal que el número n corresponde al concepto «incluido bajo F pero no idéntico a x». Gracias a estos recursos se haría posible explicar a la manera de Leibniz lo que quiere decirse al afirmar que 1, 2, 3 ó cualquier otro número corresponde a un concepto. Pero Frege no se declara satisfecho todavía. Sería una ilusión, nos advierte, imaginar que de este modo habríamos definido aquellos números, cuando lo único que hemos hecho en realidad es fijar el sentido de expresiones tales como «el número 0 corresponde a...» y «el número 1 corresponde a...». Hasta aquí nada nos autoriza «a erigir a 0 ó 1 en objetos substantivos susceptibles de identificación y reconocimiento». Pero el poderlo hacer así —opina Frege— es de vital importancia para la aritmética, ya que en ella los numerales se usan como nombres. Cierto es que esos numerales ofician en el lenguaje ordinario de adjetivos. Pero la expresión «Júpiter tiene cuatro satélites» podría ser reemplazada por esta otra: «El número de satélites de Júpiter es cuatro», donde «cuatro» es un nombre y «es» actúa como un signo de identidad. Más aún, la segunda expresión se halla mejor articulada que la primera; pues, aunque los gramáticos nos digan que el adjetivo «cuatro» concuerda con el nombre plural «satélites», esos satélites no podrían ser cuatro por separado. No hay en rigor ninguna propiedad significada por la palabra «cuatro» de la que nos sea dado decir que algo, individual o colectivo, la posee.

---

45 Ibid., § 46. Cuando Frege escribía "el concepto 'satélite de Venus'", se refiere presumiblemente al concepto expresado por las palabras "satélite de Venus", pues con seguridad estaba lejos de pensar que el concepto se reduzca a un conjunto de palabras.

* La inclusión de un objeto "bajo" un concepto *(das Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff)* no debe confundirse en ningún caso con la inclusión de un concepto "en" otro. Reformulada en términos extensionales, la distinción que entra aquí en juego vendría a coincidir con la existente entre "pertenencia de un miembro a una clase" e "inclusión de una clase en otra", relaciones que Frege bautizara respectivamente con las denominaciones de "relación *subter*" y "relación *sub*" (Cf. sobre este punto su "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik", *Archiv für systematische Philosophie*, I, 1895, pp. 433-456; reeditada en G. Frege, *Logische Untersuchungen*, edición e introducción de G. Patzig, Göttingen, 1966). *(N. del T.)*

Frege tiene indudablemente razón cuando mantiene que podemos pensar objetos que no sean sensibles ni tan siquiera imaginables. Pero ¿tiene también razón cuando nos dice que los números son objetos en el específico sentido que él confiere a esta categoría, esto es, cuando nos dice que no son conceptos? Hemos de conceder, por descontado, que los adjetivos numéricos no se comportan como las cláusulas atributivas ordinarias: por más que sea correcto decir que Júpiter tiene cuatro satélites, sería evidentemente absurdo decir que cada uno de éstos es cuatro y también haría raro por lo menos decir que es cuatro su conjunto. Más aún, cuando el término «cuatro» se usa como un nombre, como por ejemplo en el enunciado «Cuatro es un número par», parece comportarse ciertamente —según Frege nos dice— como un nombre propio. Sería disparatado decir que las raíces de dos ecuaciones son ambas cuatro, por más que quepa hablar de cuatros en plural cuando el contexto indique que se trata de numerales en cuanto diferentes y contrapuestos a los números. Pero, por otra parte, tampoco faltan ciertos números de matiz colectivo como «par» o «docena», que se habrían de clasificar entre los nombres comunes, ya que cabe usarlos en plural; y éstos sí que pudieran ser en ocasiones considerados como predicados de conjuntos. Por ejemplo, tendría sentido afirmar que el grupo de los discípulos de Jesús era o constituía una docena. Que nos sirvamos de este o aquel recurso para la expresión de las proposiciones numéricas parece no ser más que una cuestión de preferencias lingüísticas completamente accidental. En latín, *mille* es un adjetivo, pero *milia* es un nombre; y, en castellano, «centena» es un nombre, en tanto que «cien» es un adjetivo, y todavía «ciento» podría participar de una o la otra condición. ¿Por qué no identificar en ese caso a nuestros números con las propiedades de ser un par, una docena, una centena, etc., o —para servirnos de la terminología de Frege— con los conceptos «par», «docena», «centena», etc.? Esta parece ser la idea que Cantor tenía *in mente* cuando hablaba de *Mächtigkeiten*, y reviste el gran mérito de su simplicidad. Todo el mundo ha de admitir que puede hablarse de conjuntos de diversa magnitud, y —de acuerdo con la definición propuesta— un número vendría a identificarse con la característica común a todos los conjuntos de una misma magnitud. O, si se prefiere hablar con Frege de que los números corresponden a conceptos, ¿por qué no identificar a los números —sea, por ejemplo, el número 2— con conceptos de segundo grado, como el de poseer el oportuno concepto de primer grado un par de casos particulares que lo ejemplifiquen?

La razón aducida por Frege para rechazar una respuesta afirmativa resulta inadecuada. Frege escribe:

«En la proposición 'el número 0 corresponde al concepto *F*', 0 es sólo un elemento del predicado (en el supuesto de que el concepto *F* constituya el auténtico sujeto). Esta es la razón por la que he evitado llamar a un número como 0, 1 ó 2 la *propiedad* de un concepto. Precisamente porque sólo constituye un elemento de lo allí aseverado, el número se nos muestra como lo que realmente es, a saber, un objeto substantivo. Yo ya he llamado la atención sobre el hecho de que hablamos de 'el número 1', donde el artículo definido nos indica que se trata de un objeto. En la aritmética nos encontramos con una substantividad a cada paso, como sucede por ejemplo en la identidad 1+1=2» [46].

[46] Ibid., § 57.

Cuando Frege nos dice que 0 es sólo un elemento del predicado, parece estar temiendo que, si 0 fuese una propiedad del concepto *F*, sería posible afirmar «el concepto *F* es 0». Pero se trata de un temor infundado. Si 0 fuese realmente un concepto, decir «0 corresponde al concepto F» sería un modo perfectamente apropiado de expresar que 0 es una propiedad del concepto *F*. Pues, de acuerdo con su propio punto de vista, «0» no sería más que una abreviatura de «el concepto de carecer de ejemplificaciones», al que Frege parece dar cabida en algunos contextos. Así cuando nos dice, por ejemplo:

> «Por propiedades aseveradas de un concepto no entiendo naturalmente las notas que lo integran. Estas últimas son propiedades de las cosas que se incluyen bajo el concepto, no del concepto mismo. Así, 'rectángulo' no es una propiedad del concepto 'triángulo rectángulo'; mas la proposición de que no existe ningún triángulo rectángulo que sea a un tiempo rectilíneo y equilátero expresa una propiedad del concepto 'triángulo rectángulo rectilíneo y equilátero', a saber, le asigna el número cero. A este respecto, la existencia es análoga al número. La afirmación de la existencia no es en rigor sino la denegación del número cero. Y es porque la existencia es una propiedad de los conceptos por lo que el argumento ontológico en pro de la existencia de Dios se viene abajo» [47].

Ya que la existencia de que Frege nos habla aquí no es, propiamente hablando, la existencia de conceptos, sino la existencia de objetos incluidos bajo éstos, la propiedad de los conceptos con que identifica la existencia tendrá que ser la de poseer una o más ejemplificaciones. Es probable, por tanto, que cuando Frege rehusaba considerar a los números como conceptos de segundo grado, estuviese movido principalmente por la idea de que los números poseen una substantividad que les está vedada a los conceptos. De ser así, hay que pensar que se dejó extraviar por ciertas peculiaridades de su propia teoría de los conceptos que hemos de examinar más adelante. Mas, comoquiera que ello sea, tendremos ahora que pasar a preguntarnos por la naturaleza de esos objetos con los que trata Frege de identificar a los números naturales.

En la introducción a sus *Grundlagen*, Frege había establecido como el segundo de sus tres principios rectores el de que el significado de una palabra no ha de buscarse nunca aisladamente sino tan sólo en el contexto de una frase dotada de significación. Siguiendo este principio, emprende la tarea de obtener una definición de los números naturales en general fijando para ello previamente el sentido de una identidad numérica. Si los números son objetos substantivos, aunque no sean perceptibles, reviste obviamente la mayor importancia esclarecer cómo podremos reconocerlos, lo que es tanto como decir cómo podremos establecer identidades numéricas. El procedimiento sugerido a tal efecto se asemeja a la definición de la dirección de una línea definiendo primero para ello la identidad de dirección, o paralelismo, y abstrayendo luego de ésta la noción de dirección. El objetivo principal de Frege parece ser la explicación del sentido de «El número que corresponde al concepto *F* es el mismo que el número que corresponde al concepto *G*» sin hacer uso de expresiones tales como «el número que corresponde al concepto *F*», explicación que se propone conseguir mediante la noción de correlación de uno a uno. La idea de que la identidad de núme-

47 Ibid., § 53.

ros pudiera definirse de esta suerte se remonta por lo menos a Hume [48], pero en la época de Frege había adquirido, como él mismo apunta, una considerable boga entre los matemáticos [49]. Cantor, en particular, se había servido de ella en sus *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* de 1883; y Frege, como sabemos ya, admiraba la obra de Cantor, aun si hallaba ocasión a veces de acusarle, junto con otros matemáticos, de hablar sin mucha precisión de «construcciones ideales».

Ahora bien, los objetos incluidos bajo dos conceptos F y G pueden considerarse correlacionados entre sí por medio de la relación ϕ si (I) todo objeto incluido bajo el concepto F se halla en la relación ϕ con un objeto incluido bajo el concepto G y (II) para todo objeto incluido bajo el concepto G hay un objeto incluido bajo el concepto F que se halla con él en la relación ϕ, sobreentendiéndose que dichas condiciones se satisfarán vacuamente cuando ningún objeto se incluya bajo aquellos conceptos. Y con el fin de asegurar el carácter biunívoco (*beiderseits eindeutig*) de la correlación, tendremos que añadir dos ulteriores condiciones: (III) que para cualesquiera x, y, z, si x se halla en la relación ϕ con y y asimismo con z, entonces y y z son idénticos; y (IV) que, para cualesquiera x, y, z si x e y se hallan ambos en la relación ϕ con z, entonces x e y son idénticos. Se apreciará que nuestras cuatro condiciones se hallan todas expresadas en la terminología de la lógica formal (si se da entrada en ella al adjetivo «idéntico») y que la correlación de uno a uno queda explicada por las mismas sin necesidad de hacer uso del vocablo «uno».

Sobre esta base, Frege levanta un edificio de tres definiciones:

(1) «El concepto F es equinumérico (*gleichzahlig*) con el concepto G» quiere decir lo mismo que «hay una relación ϕ que correlaciona uno a uno los objetos incluidos bajo el concepto F con los objetos incluidos bajo el concepto G».

(2) El número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto «equinumérico con el concepto F».

(3) «n es un número» quiere decir lo mismo que «hay un concepto tal que n es el número que le corresponde» [50].

El calificativo «equinumérico» se destina en (1), como puede pensarse, a sugerir la identidad de los números correspondientes a los conceptos a los que califica, pero el significado de la expresión «número correspondiente al concepto» no quedará fijado hasta llegar a (2), por lo que, en puridad, «equinumérico» se ha de tomar aquí con el sentido que (1) le confiere: esto es, dos conceptos se dirán equinuméricos si sus extensiones resultan equivalentes en la fraseología técnica de la teoría de conjuntos. De modo semejante, la expresión «el número que corresponde al concepto F» envuelve en (2) el uso ordinario de la palabra «número», pero el empleo de la expresión antes de definir en (3) la palabra «número» no comporta ninguna circularidad. Pues, en efecto, (2) no es, estrictamente hablando, sino una explanación de nuestro empleo de la expresión «el número que corresponde al concepto F», y sólo cuando se llega a (3) puede decirse que contamos con

48 *Treatise*, I, III, § 1.
49 *GI.*, § 63.
50 Ibid., § 72.

una regla que nos permita hablar de un número sin mencionar a este o aquel concepto al cual le corresponda.

Este sistema de definiciones constituye una muestra muy notable de ingenio filosófico, y es fácil comprender que Frege se preciase de haber contribuido por lo menos a hacer verosímil la tesis de la reducibilidad de la aritmética a la lógica. Pero, por nuestra parte, hemos de preguntarnos si las definiciones en cuestión logran suministrar una caracterización satisfactoria de los números naturales, para lo que procederemos a examinar por turno cada una de ellas.

Si, en la primera, Frege se hubiera limitado a estipular la posibilidad de emplear el adjetivo «equinumérico» para sustituir a una expresión más complicada acerca de la correlación biunívoca, no habría en rigor ninguna objeción que oponerle. Pero de su explicación preliminar sin duda se desprende que considera a su definición como un correcto análisis del sentido que cualquier persona atribuiría a nuestro adjetivo compuesto si se tuviera que hacer cargo del mismo sin previas estipulaciones. Y de ahí que Frege hable de obtener el concepto de número indagando para ello previamente cuál sea el sentido de la identidad numérica. Ahora bien, considerada como una dilucidación de nuestro uso ordinario de las palabras, la definición (1) envuelve una dificultad. Pues mientras es obvio que cualesquiera dos conceptos cuyas ejemplificaciones se correlacionen entre sí del modo descrito habrán de ser equinuméricos en el sentido de tener cada uno tantas ejemplificaciones como el otro, no es cambio tan obvio que haya de darse tal correlación entre las ejemplificaciones de conceptos que sean equinuméricos en ese sentido.

Consideremos un ejemplo ofrecido por el propio Frege cuando atinadamente apunta:

> «Si un camarero deseara asegurarse de colocar sobre una mesa tantos cuchillos exactamente como platos, no tendría necesidad de contar unos ni otros; todo lo que tendría que hacer a este respecto sería colocar un cuchillo inmediatamente a la derecha de cada plato, cuidando de que cada cuchillo de la mesa se halle colocado inmediatamente a la derecha de un plato» [51].

Pero este argumento sólo prueba que la correlación biunívoca es condición suficiente para la identidad numérica, no que sea también condición necesaria de la misma. Quizás cupiera dar un paso más allá de la posición de Frege al proponer su ejemplo, diciendo que no hay modo de *probar* que dos conceptos sean equinuméricos a menos que se dé una correlación biunívoca entre sus ejemplificaciones. Pues cuando contamos los objetos incluidos bajo cada concepto, establecemos una tal correlación valiéndonos para ello de la asignación de números ordinales; y, en aquellos casos especiales en que cabría reconocer una identidad numérica sin necesidad de contar por hallarse los miembros de un conjunto de cosas ordenados por el mismo patrón que los de otro (como sucedería con los signos inscritos sobre naipes del mismo valor), lo que importa considerar es que cada miembro de uno de los conjuntos se halle relacionado con uno y sólo uno de los miembros del otro conjunto por medio de la relación de similaridad de posición según

51 Ibid., § 70.

la ordenación estatuida por el patrón de que se trate en nuestro caso. Pero ni tan siquiera en tal supuesto sería absurdo pensar que el número de cuchillos sobre la mesa pudiera ser el mismo que el de platos aun si los primeros no han sido biunívocamente correlacionados con los segundos por el procedimiento del camarero o cualquier otro, como el trazado de líneas o algún procedimiento similar. De acuerdo con la doctrina de Frege, el hecho —si es un hecho— de que el número de cuchillos sea el mismo que el de platos requiere la existencia de *alguna* relación por medio de la cual los cuchillos se hallen biunívocamente correlacionados con los platos; mas parece, con todo, que dicha relación, cualquiera que sea su género, podría dejar de darse sin que por ello se alterasen los números en cuestión.

Si el número de cuchillos es el mismo que el de platos, será *posible* que los cuchillos se correlacionen biunívocamente con los platos, mientras que tal correlación no podría darse entre los objetos incluidos bajo conceptos que no sean equinuméricos. Y no falta, sin duda, una razón para que muchos matemáticos hayan pasado por alto aquella dificultad de la definición fregeana. Pues la noción de correlación biunívoca conquistó por vez primera su atención a propósito de la teoría cantoriana de los números transfinitos, donde los únicos conjuntos que cabría citar para ilustrar plausiblemente la teoría proceden de la propia matemática, es decir, de un dominio en que por lo común no se distingue entre hecho y posibilidad. Así, la distinción entre la afirmación de que los números racionales *pueden ser* biunívocamente correlacionados con los números naturales y la de que se hallan correlacionados *de hecho* biunívocamente con ellos carece por entero de importancia desde el punto de vista de la matemática pura. Fuera de ella, sin embargo, la situación sería muy diferente. Y con todo, si Frege estuviera en lo cierto, del simple hecho de que el número de cuchillos sobre la mesa sea el mismo que el de platos se tendría que seguir que hay alguna relación por medio de la cual los cuchillos se correlacionan *de hecho* biunívocamente con los platos y lo habrán de hacer siempre, cualquier cosa que sea lo que suceda, con la única condición de que su número no cambie. ¿Cómo cabría explicar esto?

Si los indiscernibles son idénticos, como Leibniz asegurara, los diversos objetos incluidos bajo un concepto habrían de detentar atributos distintivos. Supongamos que los objetos incluidos bajo el concepto F resultan distinguibles por medio de los atributos F_1, F_2 y F_3, cada uno de los cuales implica F, y que los objetos incluidos bajo G resultan de igual modo distinguibles por medio de los atributos G_1, G_2 y G_3, cada uno de los cuales implica G. Mas aún, convengamos en decir que x se halla en la relación R con y si, y sólo si, x e y satisfacen la condición expresada por la fórmula compleja:

(x detenta F_1 e y detenta G_1) o (x detenta F_2 e y detenta G_2)
o (x detenta F_3 e y detenta G_3).

En ese caso, los objetos incluidos bajo F se hallarán correlacionados por dicha relación de uno a uno con los objetos incluidos bajo G. Es decir, de acuerdo con la explicación antes suministrada, todo objeto incluido bajo F se hallará en la relación R con uno y sólo uno de los objetos incluidos bajo G, mientras que para todo objeto incluido bajo G habrá un objeto y sólo uno incluido bajo F que se halle con él en la relación R. Para simplificar hemos usado aquí los mismos subíndices en orden a indicar los atributos dis-

tintivos bajo los dos conceptos, apareando luego los atributos con el mismo subíndice en la expresión por medio de la cual se ha definido *R*. Pero este empleo de numerales no es en modo alguno imprescindible para nuestro argumento. Los atributos distintivos bajo cada concepto podrían haberse indicado y apareado con los del otro concepto de cualquier modo que hubiésemos juzgado conveniente, con la única condición de que cada atributo distintivo aparezca en una y sólo una de las conjunciones que constituyen nuestras alternativas. Pero sí que es, en cambio, imprescindible que los únicos signos extralógicos contenidos en la definición sean los destinados a la expresión de los atributos distintivos de los objetos incluidos bajo los dos conceptos *F* y *G*. Si alguien objetara que lo que se ha definido de esa suerte no es lo que la gente llamaría de ordinario una relación, podríamos ciertamente concedérselo así; pero tendríamos que insistir en que se trata del único género de relación que en cualquier caso bastaría para establecer una correlación biunívoca entre objetos incluidos bajo conceptos equinuméricos.

Tal vez pueda pensarse que siempre cabe definir una adecuada relación de coordinación por un procedimiento más sencillo, y sin necesidad de asumir el principio leibniziano de identidad de los indiscernibles, valiéndonos para ello de una fórmula como:

$$(x=A \text{ e } y=K) \text{ o } (x=B \text{ e } y=L) \text{ o } (x=C \text{ e } y=M),$$

donde «*A*», «*B*» y «*C*» serían nombres propios de los objetos incluidos bajo *F* y «*K*», «*L*» y «*M*» serían nombres propios de los objetos incluidos bajo *G*. Pero en esta objeción se encierran dos errores. En primer lugar, lo que nosotros pretendíamos no era definir relaciones de coordinación entre clases cuyos miembros hayan sido objeto de previa denominación. Lo que nosotros deseábamos era más bien mostrar qué género de relaciones podrían ser suficientes para el establecimiento de una coordinación entre tales clases, incluso aunque los miembros de estas últimas no hayan sido nombrados ni acaso lo sean nunca. Sin el concurso del principio de Leibniz no habría la menor seguridad de la existencia de aquellas relaciones. En segundo lugar, aun cuando los objetos incluidos bajo un concepto tuviesen todos ellos nombres propios, está claro que tendría que haber un modo de distinguirlos sin necesidad de recurrir a sus nombres, puesto que de otro modo ni tan siquiera habrían podido ser nombrados. De modo que tampoco en este caso sería ociosa nuestra presuposición del principio de Leibniz.

En el segundo estadio de su construcción sistemática aborda Frege la definición del número que corresponde al concepto *F*, diciendo que se trata de la extensión del concepto «equinumérico con el concepto *F*». Ya que la expresión «equinumérico con el concepto *F*» sólo puede aplicarse con propiedad a conceptos, el concepto expresado por ella habrá de ser un conjunto de conceptos. Con lo que Frege, tras haber opuesto reparos a la sugerencia de que un número sea un concepto, parece ahora abocado a la conclusión de que un número es un conjunto de conceptos. Pero esta no es la única consecuencia chocante de su definición. Pues Frege necesita decir que el concepto *F* tiene un número que le corresponde y, de acuerdo con la definición arriba citada, eso es tanto como decir que el concepto *F* tiene un conjunto de conceptos que le corresponde, a saber, el conjunto de los conceptos cuyas ejemplificaciones se correlacionan biunívocamente con

sus propias ejemplificaciones. Sería difícil encontrar uso ninguno del verbo «corresponder» (*zukommen*) que consiga acomodarse con una cierta naturalidad a lo que Frege trata de decir. Quizás cabría decir que el concepto *F* corresponde como miembro (pertenece) al conjunto de los conceptos equinuméricos consigo mismo, o que el concepto «equinumérico con el concepto F» corresponde como una propiedad (se atribuye) al concepto *F*, pero en ninguno de esos dos sentidos cabe decir en cambio que el conjunto de los conceptos equinuméricos con el concepto *F* corresponde al concepto *F*. Tal vez Frege cayó en la cuenta de que su fraseología resultaba harto curiosa, pues en una nota a pie de página admite la posibilidad de reemplazar en la definición (2) la expresión «extensión del concepto» por la palabra «concepto» a secas [52]. Es evidente, sin embargo, que al hacer esta concesión estaba lejos de querer retractarse de su primitiva declaración de que los números son objetos en cuanto contrapuestos a conceptos; pues afirma su convicción de que sería posible disipar esta aparente contradicción, aunque intentarlo así le llevaría demasiado lejos. Ignoramos cómo habría procedido Frege en caso de seguir el curso alternativo de su teoría, pero otra observación a pie de página nos revela el trasfondo de su elección de la formulación dada en el texto.

Aparte de una aparente contradicción con sus primitivas declaraciones, el curso alternativo de su teoría —a saber, «que los conceptos puedan tener idénticas extensiones sin coincidir no obstante entre sí»— presenta para Frege otra dificultad. En orden a apreciar el sentido de su observación habremos de considerar qué es lo que comporta exactamente la situación en la que el número correspondiente al concepto *F* sea el mismo que el número correspondiente al concepto *G*. Es claro que ambos conceptos serán equinuméricos y que, por tanto, cualquier concepto equinumérico con uno de los dos lo será asimismo con el otro, esto es, la extensión del concepto «equinumérico con el concepto *F*» será idéntica a la extensión del concepto «equinumérico con el concepto *G*». Pero no quiere ello decir que el concepto «equinumérico con el concepto *F*» sea idéntico al concepto «equinumérico con el concepto *G*». Por el contrario, es evidente que ambos conceptos son distintos. Y si definiéramos al número correspondiente al concepto *F* como el concepto «equinumérico con el concepto *F*» y, de manera semejante, al número correspondiente al concepto *G* como el concepto «equinumérico con el concepto *G*», desembocaríamos en la paradójica conclusión de que uno y el mismo número es dos conceptos distintos. Es obvio que el modo más fácil de escapar a la dificultad consiste, para quien desee sostener una teoría como la de Frege, en definir al número correspondiente al concepto *F* como la *extensión* del concepto «equinumérico con el concepto *F*». Frege admite que la definición pudiera parecer extraña a primera vista, mas la defiende arguyendo que la extensión a la que se refiere posee las propiedades y relaciones que cabría esperar del número correspondiente a un concepto.

El tercer paso de su construcción lleva a Frege a tratar de explicar cómo se podría hablar de números en general sin referirse a los conceptos particulares a los que éstos corresponden, a cuyo fin establece que «*n* es un número» quiere decir lo mismo que «Hay un concepto tal que *n* es el número que le corresponde». Quienes acepten todo cuanto antecede, no necesitarán

[52] Ibid., § 68.

cavilar mucho en torno a esta definición. Pues es obvio que, para que la aritmética resulte practicable, ha de sernos posible hablar de números sin referirnos a conceptos particulares, y la caracterización fregeana de la cuestión nos muestra cómo poder hacerlo sin por ello abandonar la conexión con aquel giro del que echábamos mano al declarar que los números corresponden a conceptos. Mas la definición que acaba de citarse no basta por sí misma para servir de fundamento a la aritmética, ya que sólo nos proporciona una explanación de la expresión «*n* es un número». Tras de ella necesitaríamos todavía sendas definiciones de cada uno de los números en particular, o más bien un esquema general que suministre la definición de una infinidad de números y de este modo permita demostrar todos los teoremas aritméticos comúnmente aceptados.

Ahora bien, el único modo de atender en la teoría de Frege a un número particular consiste en hablar de él como del número correspondiente a un concepto dado. Mas la intención de Frege es presentar a la aritmética como una extensión de la lógica, lo que le imposibilita para introducir dichos números particulares por referencia a conceptos empíricos, como cabría hacer por ejemplo diciendo que 5 es el número correspondiente al concepto «continente» o 12 el número correspondiente al concepto «apóstol». Más aún, la referencia a conceptos empíricos no garantizaría en ningún caso la existencia de una sucesión infinita de números como la requerida para el desarrollo de la aritmética superior. Era esencial, por consiguiente, que Frege hallara un modo de ofrecernos definiciones de los números particulares por referencia a conceptos extraídos de la lógica misma. Tomando a 0 por inicio de la serie, Frege propuso así el siguiente esquema:

0 es el número correspondiente al concepto «no idéntico a sí mismo».
1 " " " " «idéntico a 0».
2 " " " " «idéntico a 0 ó a 1».
3 " " " " «idéntico a 0 ó a 1 ó a 2».
. . . . . .

El concepto «no idéntico a sí mismo» de nuestro esquema se interpreta en él como un concepto procedente de la lógica pura, y es obvio que ningún objeto podría hallarse incluido bajo él. La primera definición parece, así, satisfacer todos los requisitos exigidos. Pero si la primera definición se halla libre de conceptos extralógicos, lo mismo ocurrirá con todas y cada una de las definiciones restantes; y el plan de acuerdo con el cual se procede a construir esas definiciones podrá, según se echa de ver, ser proseguido *ad libitum*. Parece, pues, que Frege ha logrado salirse con la suya en el empeño de mostrar cómo la aritmética pudiera ser reducida a la lógica.

En el primer volumen de sus *Grundgesetze*, Frege sigue los mismos pasos de esta argumentación, acompañándola de referencias a los pasajes apropiados de sus *Grundlagen*. Pero, de acuerdo con el plan general de aquella obra, prefiere ahora formular sus definiciones —allí donde ello sea posible— sirviéndose al efecto de signos de clases en lugar de expresiones funcionales; y, si bien en el texto alemán se continúa diciendo que los números corresponden a conceptos, en el texto simbólico siempre aparece el signo que tiene por sentido «el número de» frente a un signo de clase [53]. Si se acepta

[53] Cf., por ejemplo, la definición de 0 en *Gg.*, I, § 41.

hablar de clases, cabría saludar esta versión de la teoría como una apreciable simplificación. Pues los conceptos que determinan una misma clase han de ser obviamente equinuméricos en términos de Frege, y el número que éste diría que poseen en común esos conceptos se podría igual decir —y hasta resultaría más natural— que es el de la clase por ellos determinada. Este modo de hablar reviste el mérito adicional de poner en conexión la definición fregeana de número con la teoría cantoriana de los conjuntos o las clases. Pues la correlación de uno a uno de que Frege nos habla no es sino aquella relación entre conjuntos que Cantor llama equivalencia, y las novedades contenidas en la obra del primero podrían ser fácilmente compendiadas en el lenguaje del segundo por medio de los dos siguientes enunciados:

(I) El número cardinal de un conjunto es el conjunto de todos los conjuntos equivalentes al primero.

(II) Para cada uno de los números naturales 0, 1, 2, 3, etc., considerados como conjuntos de conjuntos equivalentes, podremos tomar como ejemplares o miembros paradigmáticos ciertos conjuntos definidos en términos puramente lógicos, a saber, el conjunto de las cosas no idénticas a sí mismas para 0, el conjunto cuyo único miembro es el número 0 para 1, el conjunto cuyos miembros son los números 0 y 1 para 2, el conjunto cuyos miembros son los números 0, 1 y 2 para 3, y así sucesivamente.

Es un hecho curioso, sin embargo, que ni Frege ni Cantor llegaran nunca a explicitar precisamente en estos términos sus respectivas caracterizaciones de los números. Frege afirmó en sus *Grundlagen* que el *Anzahl* por él definido venía a identificarse con la *Mächtigkeit* de los conjuntos en la teoría de Cantor [54]; pero, en una reseña de la obra de Frege para la *Deutsche Literaturzeitung*, Cantor negó la equivalencia y opuso reparos a la definición de Frege [55]. Al par que declaraba su acuerdo con el programa general de fundamentar la aritmética sobre bases puramente lógicas, objetó a algunas de las sutilezas fregeanas y en especial a la caracterización del número como la extensión de un concepto, ya que esta última pudiera presentar el inconveniente de su «indeterminación cuantitativa». Por lo que se ve, las diferencias entre ambos parecen deberse exclusivamente a malentendidos concernientes al manejo de sus respectivos vocabularios técnicos. Esto es al menos lo que pensaron Whitehead y Russell, quienes no dudarían en aceptar la definición de número que acaba de citarse, aunque —por las razones que veremos en un capítulo ulterior— no podían aceptar en cambio el modo de garantizar la infinitud de la serie de los números naturales propuesto por Frege.

5 La serie numérica: Dedekind y Peano.

En orden a consumar su programa de presentación de la aritmética como idéntica a la lógica, Frege debía, en primer lugar, ofrecer una aceptable definición de todas las nociones aritméticas sin hacer uso de términos extralógicos, pasando luego a mostrar que —con ayuda de esas

[54] *Gl.*, § 85.
[55] *Gesammelte Abhandlungen*, ed. Zermelo, p. 440.

definiciones— cabría reducir todo el razonamiento matemático a patrones de argumentación lógicamente válidos. En particular, debía mostrar que, en orden a acreditar la validez de la inducción matemática (o recursiva) —esto es, aquel tipo de argumentación en la que concluimos que, dado que una propiedad pertenece al número 0 y asimismo al sucesor de cualquier número que la posea, ha de pertenecer por tanto a todos los números naturales—, no se requiere de otra cosa que la lógica. Pues, en efecto, quienes mantienen que la aritmética no se identifica con la lógica aducen comúnmente la inducción matemática como una muestra típica del razonamiento aritmético, afirmando que la misma presupone la intuición de un cierto género de necesidad extralógica. Frege no se llegó a ocupar con detalle en sus *Grundlagen* de la segunda parte de su programa, quizás por entender que se trataba de una empresa demasiado ardua para abordarla en una obra de carácter popular. Lo que en ella nos dice acerca de la cuestión resulta, pues, un tanto oscuro y episódico. Pero se muestra, no obstante, bien consciente de la necesidad de un análisis de la inducción matemática cuando, tras de citar la caracterización de la ordenación serial ofrecida al término de su *Begriffsschrift*, escribe: «Sólo mediante esta definición de la sucesión en una serie se hace posible reducir el argumento que nos lleva de n a $(n+1)$, que a primera vista parece peculiar y privativo de la matemática, a las leyes generales de la lógica» [56]. Y en el libro nos suministra en realidad todo cuanto podría necesitarse para dicho propósito, aunque no acometa en él una articulación de sus observaciones que facilite la tarea del lector.

Frege comienza por decirnos que «n sigue inmediatamente a m en la serie de los números naturales» quiere decir lo mismo que «Existe un concepto F y un objeto x incluido bajo él tales que el Número que corresponde al concepto F es n y el Número que corresponde al concepto 'incluido bajo F pero no idéntico a x' es m». Esta definición resulta fácilmente inteligible a partir de las definiciones de los números particulares estipuladas al final de la última sección. Como Frege apunta, al lector no le será tampoco difícil comprobar que la relación así definida es una relación de uno a uno y que todo número excepto 0 se halla relacionada mediante ella con algún otro número [57]. A continuación, Frege pasa a esbozar la demostración de una proposición que no considera ya tan obvia, a saber, la de que para todo número de la serie de los números naturales hay un número que le sigue inmediatamente; y es en el curso de esa demostración cuando menciona de pasada la posibilidad de reducir la inducción matemática a las leyes generales de la lógica.

En un pasaje de la *Begriffsschrift* al que en este punto se refiere, Frege había explicado cómo, dada una relación Φ, podríamos definir una otra relación expresable por medio de la fórmula «y sigue a x en la serie generada por Φ»: por ejemplo, cómo —dada la relación expresada por «y es un hijo de x»— podríamos definir la relación expresada por «y es un descendiente de x». En la vida ordinaria probablemente explicaríamos el significado del término «descendiente» diciendo que «los descendientes de un hombre son sus hijos y los hijos de sus hijos y los hijos de los hijos de sus hijos, etc.». Mas

56 *Gl.*, § 81.
57 Ibid., §§ 76-78.

Frege no podía declararse satisfecho con esta explicación por pensar que, a los efectos de la reducción de la aritmética a la lógica, era preciso hallar un modo de eliminar la cláusula «etcétera». De ahí que, por consiguiente, sugiriera que «*y* es un descendiente de *x*» habría de interpretarse como si su significado fuese el de «*y* posee todos los atributos que pertenecen a *x* y son invariablemente transmitidos a sus hijos por un padre que los posea». A primera vista, esta propuesta podría ser acogida con algunas reservas. Pues todos nos inclinaríamos a pensar que, mientras un descendiente de *x* habrá de detentar indudablemente todos los atributos que sean hereditarios en la familia inaugurada por *x*, no es en cambio tan obvio que quienquiera que posea todos esos atributos haya de ser un miembro de la familia en cuestión. Pero a este reparo cabría responder haciendo ver que uno de los atributos hereditarios en la familia es precisamente la pertenencia a esa familia, de suerte que quienquiera que posea *todos* los atributos hereditarios de la misma se habrá de contar entre sus miembros.

Aplicando el procedimiento de Frege a la serie numérica, podríamos decir ahora que «*y* sigue a *x* en la serie de los números naturales» quiere decir lo mismo que «*y* posee todos aquellos atributos que (I) pertenecen a *x* y (II) son tales que, si pertenecen a cualquier número natural, pertenecen asimismo al número que inmediatamente le sigue en la serie de los números naturales». Esto fue, en efecto, lo que hizo Frege en sus *Grundlagen*. Pero, para poder presentar al argumento en que consiste la inducción matemática como una pieza de razonamiento lógico, tendremos todavía que dar un paso más y atribuir a «*n* es un número natural» el significado de «*n* es idéntico a 0 ó *n* posee todos los atributos que (I) pertenecen a 0 y (II) son tales que, si pertenecen a cualquier objeto *m*, pertenecerán asimismo a cualquier otro que siga-inmediatamente-a-*m*-en-la-serie-de-los-números-naturales». Para la adecuación de esta definición es esencial, naturalmente, que las palabras engarzadas mediante guión en la fórmula definidora se entiendan como un signo unitario de acuerdo con la explanación de Frege antes citada. Pero, una vez garantizado dicho requisito, el resto se sigue fácilmente. Pues la formulación ordinaria del principio de inducción matemática podría ahora considerarse como una versión abreviada de la verdad lógica «Si *P* es un atributo que (I) pertenece a 0 y (II) es tal que, si pertenece a cualquier objeto *m*, pertenece asimismo a cualquier otro que siga-inmediatamente-a-*m*-en-la-serie-de-los-números-naturales, entonces P pertenecerá a todo aquello que sea idéntico a 0 ó se halle dotado de todos los atributos que (I) pertenezcan a 0 y (II) sean tales que, si pertenecen a cualquier objeto *m*, pertenezcan asimismo a cualquier otro que siga-inmediatamente-a-*m*-en-la-serie-de-los-números-naturales». Con otras palabras, la validez del principio de inducción matemática se habrá hecho descansar en la posibilidad de definir la serie de los números naturales como el ámbito apropiado de la inducción matemática. Se observará, no obstante, que esta supuesta reducción del razonamiento aritmético a la lógica envuelve referencia a todos los atributos o propiedades de los números. En lo que sigue tendremos ocasión de retornar sobre este punto.

En su opúsculo *Was sind und was sollen die Zahlen?*, publicado en 1888, Dedekind llegaría a conclusiones un tanto similares, aunque trabajando independientemente desde otro punto de partida y sirviéndose de diferente terminología. De acuerdo con su modo de expresarse, un sistema (o con-

junto) de cosas S podrá decirse que posee otro sistema S' como su reproducción o imagen (*Bild*) si hay una proyección o regla de reproducción (*Abbildung*) ϕ que asigne algo a título de imagen a cada elemento de S y S' sea la totalidad de esas imágenes de los elementos de S. Si la proyección asigna siempre diferentes imágenes a diferentes elementos de S, se dirá semejante (*ähnlich*). Se trata aquí, evidentemente, de lo que otros matemáticos llamarían una correlación de uno a uno. A continuación, un sistema K se dirá una cadena (*Kette*) respecto de una cierta proyección si contiene a K' —que sería una reproducción de sí mismo de acuerdo con aquella proyección— como una parte o subsistema suyo, esto es, si $K' \subset K$, donde «$\subset$» significará inclusión-en [58]. La razón de que Dedekind introdujese esta curiosa terminología era probablemente su deseo de llamar la atención sobre el hecho de que la reproducción contenida en un sistema semejante haya a su vez de contener una reproducción de sí propia de acuerdo con la misma proyección. Pues su primer teorema relativo a las cadenas es el de que la reproducción de una cadena es ella misma una cadena. Otro de sus teoremas que fácilmente puede demostrarse es que cualquier cadena que contenga como parte a un sistema A tendrá asimismo que contener a A'. Por lo demás, si A es una parte de la cadena S, la intersección o parte común máxima (*Gemeinheit*) de todas las cadenas, incluida S, que tienen a A por parte se llamará la cadena de A o, para abreviar, A_0. Y de nuevo es posible demostrar fácilmente que cualquier cadena que contenga a A como parte tendrá asimismo que contener a A_0. Cuando A tenga a 1 por único elemento, Dedekind se permitirá llamar 1_0 a su cadena, aunque de acuerdo con su propia definición debería más bien haber escrito $\{1\}_0$. Pero, cualquiera que A sea, convendrá recordar que A' y A_0 se hallan ambas determinadas por medio de una particular proyección ϕ. Sirviéndonos ahora de la ayuda de estos términos técnicos, podríamos decir que un sistema N es *simplemente infinito* si existen para él una proyección ϕ y un elemento básico 1 que satisfagan estas cuatro condiciones:

α . $N' \subset N$.
β . $N = 1_0$.
γ . 1 no es un elemento de N'.
δ . La proyección ϕ es semejante.

Y si, finalmente, concentráramos nuestra atención sobre la estructura del sistema N, haciendo caso omiso de la índole específica de sus elementos en tanto que ésta no se halle determinada por las condiciones que acaban de enumerarse, podríamos decir que N es el sistema de los números ordinales [59].

Para Dedekind la aritmética es justamente la ciencia de las relaciones o leyes que podrían derivarse de las condiciones arriba mencionadas. Y una de las más importantes de esas leyes es el principio de inducción matemática, que cabría formular diciendo: «Si 1 es un elemento de P y $(NP)' \subset P$, entonces $N \subset P$», si bien el propio Dedekind no se sirve de la yuxtaposición booleana de letras para indicar la intersección. Para demostrar este teorema podríamos proceder como sigue [60]. Ya que 1 es un elemento de N y, por

---

[58] Para mayor exactitud, el propio Dedekind se sirve de una variante del signo "$<$" de apariencia semejante al numeral "3".
[59] *Was sind und was sollen die Zahlen?*, § 6, 71-73.
[60] Ibid., § 4, 59-60, y § 6, 80.

hipótesis, también lo es de P, podríamos asumir que el sistema NP no es vacío. Ahora bien, es evidente que

$$NP \subset N,$$

de donde, de acuerdo con nuestra definición de la reproducción, se sigue que

$$(NP)' \subset N'.$$

Pero nosotros ya sabemos que

$$N' \subset N$$

en virtud de la condición α, de suerte que tendremos

$$(NP)' \subset N.$$

Pero, por la segunda parte de nuestra hipótesis, tenemos asimismo

$$(NP)' \subset P.$$

Y de estas dos últimas relaciones, conjuntamente tomadas, se sigue que

$$(NP)' \subset NP,$$

esto es, que NP es una cadena. En cuyo caso, y ya que 1 es un elemento de esta cadena y 1_0 es la parte común máxima de todas las cadenas de las que 1 sea un elemento, podremos aseverar que

$$1_0 \subset NP.$$

Pero, por la condición β, se sigue que

$$N = 1_0,$$

de donde podremos concluir que

$$N \subset NP,$$

que equivaldrá a

$$N \subset P.$$

El fundamento de esta demostración es el hecho de que N, el conjunto de los números sobre el que pretende recaer nuestra generalización, haya sido considerado una cadena y, en particular, aquella que constituye la parte común máxima de todas las cadenas que poseen a 1 por elemento. Como en el argumento de Frege, pues, también aquí ha quedado asegurada la validez del principio de inducción matemática por medio de una definición de número que hace referencia a todas las propiedades hereditarias en una serie. Pues, en efecto, decir que N es la parte común máxima de todas las cadenas que poseen a 1 por elemento es decir que N se halla contenida como parte en toda cadena P que satisfaga la hipótesis del principio de inducción matemática, lo que no es sino otra versión de la caracterización fregeana de la cuestión. El propio Dedekind reparó en esta correspondencia tan pronto como leyó las *Grundlagen* de Frege, aproximadamente un año tras la publicación de su libro, llamando la atención sobre la misma en el prefacio de su segunda edición (1893). En el prefacio de su tercera edición (1911) afirmaría que, aunque continuaba fiel a su primitiva concepción según la cual la aritmétitca, el álgebra y el análisis son todos ellos parte de la lógica, tenía que conceder alguna fuerza a las objeciones opuestas a esa tesis en el transcurso de los últimos diez años. Ello parece sugerir que había hecho causa común con Cantor y Frege, cuyas obras fueron objeto de críticas durante ese período.

La principal diferencia entre la obra de Frege y la de Dedekind consiste en que el primero, a diferencia del segundo, relaciona los números con extensiones de conceptos. Aunque Dedekind partió de consideraciones generales acerca de sistemas o conjuntos, concluyó elaborando una teoría numérica puramente ordinal. Frege se hallaba igualmente interesado en la orde-

nación de los elementos de la serie numérica, pero pensaba que aquélla podía quedar explanada por la definición propuesta para «*n* sigue inmediatamente a *m* en la serie de los números naturales». No está claro si Dedekind deseaba rechazar aquella parte de la teoría de Frege que excede de la suya propia, pero algunos pasajes de su obra parecen sugerir que no consideraba apropiado basar la teoría de los números ordinales sobre una teoría de los cardinales. Al declarar por vez primera que los elementos de su sistema podrían merecer la consideración de números. escribe:

«Si al considerar un sistema N simplemente infinito, ordenado por medio de una proyección ϕ, hacemos por entero abstracción de la naturaleza específica de sus elementos, retenemos únicamente el hecho de que éstos sean distintos los unos de los otros y no prestamos atención sino a las relaciones determinadas entre ellos por la proyección ordenadora ϕ, aquellos elementos podrán llamarse *números naturales, números ordinales* o simplemente *números,* y el elemento básico 1 se llamará el *número básico* de la *serie numérica.* Por referencia a esta abstracción, o depuración de los elementos respecto de todo otro contenido, estaremos autorizados a describir a los números como libres creaciones de la mente humana. Las relaciones o leyes que se derivan exclusivamente de las condiciones α, β, γ, δ —anteriormente expuestas— y permanecen, por lo tanto, invariables para todos los sistemas ordenados simplemente infinitos (cf. 134) constituyen el objeto inmediato de la *ciencia del número* o *aritmética*» [61].

En el pasaje mencionado al final de este texto, Dedekind prueba que todos los sistemas simplemente infinitos pueden ser reproducidos los unos sobre los otros mediante proyecciones semejantes; y a continuación, refiriéndose al texto que acabamos de citar, añade:

«Al mismo tiempo queda claro... que todo enunciado numérico —esto es, relativo a los elementos n del sistema N simplemente infinito ordenado por la proyección ϕ—, es decir, todo enunciado en el que se haya prescindido de la naturaleza específica de sus elementos y sólo se mencionen aquellos conceptos que tengan su origen en la ordenación determinada por ϕ poseerá una validez completamente general respecto de cualquier otro sistema simplemente infinito Ω, ordenado por una proyección θ, y sus correspondientes elementos ν; y que la transición de N a Ω (que comporta asimismo la traducción de un enunciado aritmético de uno al otro lenguaje) acontece por medio de la proyección ψ... que transforma a cada elemento n de N en un elemento ν de Ω que sería ψ(n). Este elemento ν vendría a llamarse el n-ésimo elemento de Ω, y por la misma regla el propio número n se llamaría el n-ésimo elemento de la serie numérica N» [62].

Estos pronunciamientos dan idea de que Dedekind consideraba a la aritmética como una ciencia cuyo contenido se halla implícitamente determinado por nuestras cuatro condiciones α, β, γ, δ, tomadas como axiomas o *postulados,* y que no se sentía turbado ante la posibilidad de interpretaciones diversas de sus signos básicos, por creer que esta última carecía por entero de importancia para la matemática. Cierto es que no hizo uso del lenguaje de la axiomática, pero lo que nos dice parece implicar que reputaba como absurda otra idea que no fuera la de un sistema axiomático monomorfo [63].

---

61 Op. cit., § 6, 73.
62 Ibid., § 10, 134.
63 Para la evolución del pensamiento de Dedekind en conexión con estos puntos, cf. Hao Wang, "The Axiomatisation of Arithmetic", *The Journal of Symbolic Logic,* XXII (1957), pp. 145-158.

En 1889, un año después de la aparición de la obra de Dedekind, publicó Peano sus *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, en los que la aritmética se basa expresamente en un conjunto de nueve axiomas expresados en la nueva notación lógica del autor. Cuatro de esos axiomas constituyen verdades relativas a la igualdad, pero los otros cinco son los siguientes postulados específicos:

(1) 1 es un número.
(2) El sucesor de cualquier número es un número.
(3) No hay dos números que tengan el mismo sucesor.
(4) 1 no es el sucesor de ningún número.
(5) Cualquier propiedad que pertenezca a 1 y asimismo al sucesor de cualquier número que la posea pertenecerá a todos los números.

En ulteriores versiones de su intento de caracterizar la serie numérica, Peano la inicia —como Frege lo hiciera— con el número 0; pero su concepción general del número sigue siendo ordinal, como la de Dedekind, en todo momento, registrándose una estrecha similaridad entre sus axiomas y las condiciones establecidas por Dedekind. Así, (2) corresponde a α, (3) a δ y (4) a γ, desempeñando conjuntamente (1) y (5) el papel de β. Los axiomas resultan independientes entre sí, como puede apreciarse por la consideración de modelos que satisfagan a cuatro de ellos pero no así a los cinco [64]; y podría demostrarse, recurriendo a una adaptación del argumento de Dedekind, que constituyen un conjunto monomorfo.

Peano se hallaba ante todo interesado en la clara presentación de sus resultados matemáticos; y fue con este fin, más bien que movido por el interés del análisis filosófico, como compuso en 1894 sus *Notations de logique mathématique*. Entre los años 1895 y 1908 publicó cinco versiones sucesivas de un *Formulaire de Mathémathiques*, sirviéndose en todas ellas de sus cinco axiomas (aunque iniciando la serie numérica a partir de 0 en lugar de 1) como fundamento de la aritmética. En la última de esas versiones, en que el texto no simbólico se halla escrito en una nueva lengua internacional de su invención llamada *latino sine flexione*, introdujo los cinco axiomas acompañándolos de la siguiente observación:

"Quaestio si nos pote defini N_0 significa si nos pote scribe aequalitate de forma N_0=expressione composito per signos noto, $\cup$, $\cap$, —, ..., η,
quod non es facile. Ergo nos sume tres idea N_0, 0, + ut idea primitivo per que nos defini omni symbolo de Arithmetica. Nos determina valore de symbolo non definito per systema de propositio primitivo sequente» [65].

El primer grupo de signos a que Peano se refiere en este pasaje son, por supuesto, los signos puramente lógicos de sus *Arithmetices Principia* y obras posteriores, en tanto que los tres últimos significan respectivamente «número», «cero» y «sucesor». Está claro, por tanto, que Peano continuaba por esta fecha bien dispuesto hacia el proyecto de Frege, aunque creía posible proceder a desarrollar su propio plan sin esperar a zanjar la cuestión acerca de los fundamentos últimos de la aritmética.

---

64 G. Peano, *Formulaire de mathématiques*, III, p. 44.
65 *Formulario Matemático*, p. 27.

Aun si su modo de hablar pecaba con frecuencia de impreciso y extravagante, los formalistas del siglo XIX habían hecho un interesante sugerencia al insinuar que la aritmética podía ser presentada como un sistema axiomático en el que las nociones característicamente aritméticas quedaran implícitamente definidas por medio de las condiciones formales a que se hallen sometidas. Cierto es que las proclamas de Thomae resultaban insatisfactorias en sus pormenores por las razones apuntadas por Frege, mas no podemos evitar la sensación de que Frege triunfó en su impugnación con demasiada facilidad. Pues, en efecto, cuando Frege formulaba sus alegatos Peano ya había llevado a cabo con bastante más éxito el programa de Thomae. Por otra parte, el conjunto de axiomas de Peano no se halla expuesto, como el de Thomae, al cargo de no dar suficiente cuenta de los diversos números naturales, ya que ahora podríamos introducir a 1 como el sucesor de 0, a 2 como el sucesor de 1, y así sucesivamente. Y, lo que todavía es más, los axiomas de Peano, junto con apropiadas definiciones de las operaciones de adición y multiplicación, bastarían para permitirnos la demostración de todas las leyes numéricas generales enunciadas por Thomae. Así, por ejemplo, podemos definir recursivamente la adición valiéndonos de las dos siguientes estipulaciones:

$$\text{(I)}\quad a+0=a,$$
$$\text{(II)}\quad a+n'=(a+n)',$$

donde «n'» es una abreviatura de «el sucesor de n», y pasar luego a demostrar como a continuación se indica la ley asociativa de la adición. Para ello comenzaremos por demostrar que

$$a+(b+0)=(a+b)+0,$$

lo que se obtiene por medio de aplicaciones sucesivas de (I), ya que

$$\begin{aligned} a+(b+0) &= a+(b+0) \\ &= a+b \\ &= (a+b)+0. \end{aligned}$$

A continuación, demostraremos que, si

$$a+(b+n)=(a+b)+n,$$

tendrá también que ser el caso que

$$a+(b+n')=(a+b)+n',$$

lo que puede obtenerse mediante sucesivas aplicaciones de (II) y con ayuda de la hipótesis precedente, pues

$$\begin{aligned} a+(b+n') &= a+(b+n') \\ &= a+(b+n)' \\ &= [a+(b+n)]' \\ &= [(a+b)+n]' \\ &= (a+b)+n'. \end{aligned}$$

Y, finalmente, de nuestros dos resultados y el quinto axioma de Peano obtendremos la conclusión de que

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

¿Por qué no darnos en tal caso por contentos con la formulación de la aritmética por parte de Peano y conceder que sus nociones primitivas se hallan suficientemente definidas mediante los axiomas en los cuales se mencionan?

Si la respuesta afirmativa a esta pregunta resultase acertada, el matemático no necesitaría ya preocuparse por el interrogante metafísico «¿Qué es el número?» Cuando un colega filosófico o su propia conciencia le importunen, podría replicar que considera a los axiomas matemáticos como definiciones implícitas y que todas sus exigencias profesionales se hallan satisfechas por el repertorio axiomático de Peano. Esta réplica, sin embargo, es insatisfactoria porque no da razón alguna de la conexión con el uso ordinario de los numerales imprescindible en un sistema formal que merezca el nombre de aritmética. Si los signos que representan las nociones de «número», «cero» y «sucesor» únicamente detentaran el sentido que les imponen los axiomas de Peano, se trataría en efecto de variables susceptibles de ser sustituidas por cualesquiera expresiones que conviertan a todos los axiomas en enunciados verdaderos. Ahora bien, los axiomas en cuestión son en su integridad verificados cuando los signos «0» y «número» se toman en sus sentidos usuales y «sucesor» se entiende como si su significado fuese el de «inmediatamente siguiente en la serie de los números naturales», según Frege se expresaría; mas, como el propio Peano hizo notar, podrían ser asimismo verificados bajo otras muchas interpretaciones [66]. Así, sus condiciones formales quedarían igualmente satisfechas si, por ejemplo, reemplazáramos «0» por el numeral «1», «número» por «miembro de la sucesión 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...» y «sucesor» por «la mitad de». En pocas palabras, el repertorio axiomático de Peano, considerados los axiomas como definiciones implícitas, únicamente determina las características lógicas comunes a toda progresión. Y, pese a todo cuanto Dedekind y Peano tuvieran que decir en su defensa, no podemos sentirnos totalmente satisfechos con un enfoque de la fundamentación de la aritmética que no distinga a la serie de los números naturales de cualquier otra progresión. Pues hasta en el dominio de la matemática pura tenemos ocasión de hacer uso de los numerales en su sentido normal, como cuando decimos por ejemplo «Hay *cuatro* números primos menores que 10».

Y no es ésta la única razón para afirmar que los axiomas de Peano resultan por sí solos inadecuados para proveer a la aritmética de la deseada fundamentación. El sistema que esos axiomas constituyen es, como ya hemos visto, monomorfo; pero el precio a pagar por esta característica es que el quinto axioma encierre una generalización acerca de todas las propiedades de los números. Semejante generalización equivale en definitiva a la asunción de la vasta noción de propiedad o de conjunto de la que Cantor se servía en su teoría, y ha de provocar por lo tanto las sospechas de quienes consideren con escepticismo la teoría cantoriana de conjuntos. Si deseáramos evitar los peligros de una abusiva generalización y concentrar nuestra atención en la serie numérica en cuanto diferente de las restantes progresiones, parece en consecuencia que tendríamos que reemplazar el axioma unitario de inducción matemática de Peano por una multiplicidad de axiomas inductivos cada uno de los cuales se ocupase de una determinada propiedad de los números. Pero el matemático noruego Thoralf Skolem ha demostrado que, incluso con una multiplicidad numerablemente infinita de tales axiomas, nuestro nuevo sistema tendría que restar en su conjunto polimorfo (esto es, no-categórico). Para decirlo con sus propias palabras:

---

66 *Formulaire de mathématiques*, III, p. 44.

«La serie numérica quedará exhaustivamente caracterizada por los axiomas de Peano si consideramos al concepto 'conjunto' o 'función proposicional' como algo dado de antemano, en posesión de un significado absoluto con independencia de todos los axiomas o principios de generación. Mas si alguien desea llevar hasta sus últimas consecuencias el tratamiento axiomático, de suerte que el razonamiento con conjuntos o funciones proposicionales sea asimismo axiomatizado, se tornará entonces imposible una caracterización unívoca o completa de la serie numérica» [67].

Este descubrimiento resulta estrechamente afín al teorema de Gödel acerca de la incompletabilidad de la aritmética formal, sobre el que tendremos ocasión de decir algo más adelante, y por supuesto Frege no pudo conocerlo. Pero Frege no miraba con demasiado buenos ojos el enfoque postulacional de la fundamentación de la aritmética, porque se hallaba convencido de que las reglas para el uso de las expresiones numéricas habían de derivarse de las definiciones de los números y no éstas de aquéllas. Fue semejante convicción la que inspiró en última instancia sus esfuerzos por presentar a la aritmética como una extensión de la lógica.

67 "Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlvariablen", *Fundamenta Mathematicae*, XXIII (1934), pp. 150-61.

VIII. LA LOGICA GENERAL DE FREGE

1. La *Begriffsschrift.*

Hemos de considerar ahora el desarrollo del instrumental lógico con el que Frege esperaba poder llevar a cabo su programa con el mayor rigor; y parece lo natural a tal efecto pasar revista a sus obras en el orden en que éstas fueron compuestas, reservando los comentarios de fondo hasta haber desplegado su contenido ante nosotros.

En la primera de sus obras, la *Begriffsschrift,* el objetivo principal de nuestro autor es la presentación de un lenguaje formalizado del pensamiento puro, es decir, un sistema simbólico más exacto que el lenguaje corriente y mejor provisto que este último de recursos que aseguren la precisión en los procesos deductivos. Ambas ventajas son posibles por reparar su simbolismo únicamente en lo que del lenguaje común es esencial a ese respecto, a saber, el contenido conceptual por contraposición al énfasis retórico. En el subtítulo de la obra, Frege nos dice que su lenguaje simbólico se halla modelado sobre la base del lenguaje de la aritmética, pero pronto se aprecia que el mayor parecido entre uno y otro radica en el empleo de letras con el fin de expresar la generalidad. Frege no fue, por descontado, el primer lógico en servirse de este recurso, que ya Aristóteles había utilizado mucho antes de la invención del álgebra. Mas Frege fue el primero en explotar todas sus posibilidades, y en seguida veremos que supo distinguir con claridad unas de otras las diferentes nociones usualmente confundidas en el viejo concepto de variable. Otros signos aritméticos como «+» no recibieron de Frege ningún significado específicamente lógico, porque éste deseaba continuar sirviéndose de ellos —a la par que de sus nuevos signos lógicos— en su sentido matemático ordinario. Cuando Schröder le objetó su desvío de la notación simbólica de Boole, Frege hubo de replicar que lo que él deseaba era construir un lenguaje apto para el análisis del razonamiento matemático, lo que le llevaba a evitar deliberadamente la adaptación booleana del simbolismo algebraico por conveniente que pudiera resultar para ciertos propósitos limitados [1].

El primero de los signos especiales introducido por Frege se destina a expresar el juicio o la aserción. Dicho signo presenta la forma «$\vdash$» y se escribe a la izquierda del signo o complejo de signos que expresan el contenido del juicio. Si se omite la pequeña raya vertical a su comienzo, la raya horizontal restante se llamará «trazo de contenido», sirviendo para indicar que el signo o signos situados a su derecha están siendo objeto de consideración pero no afirmados ni negados. Así, si «$\vdash \Gamma$» representase el enunciado «Los polos magnéticos opuestos se atraen mutuamente», «$- \Gamma$» representaría únicamente el pensamiento de la mutua atracción entre polos magnéticos opuestos sin envolver juicio ninguno acerca de la

1 "Uber den Zweck der Begriffsschrift", *Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft,* 1882, pp. 1-10.

corrección de dicho pensamiento. Frege nos dice que, si lo deseamos, podremos leer la raya horizontal como «la proposición de que», recalcando que el contenido de lo que sigue a aquella raya ha de ser siempre un contenido judicable y no una mera idea como la de una casa. En el ejemplo que se acaba de citar, la mayúscula griega «Γ» constituye la abreviatura de la expresión de un contenido semejante, con lo que tendríamos un primer ejemplo del modo como Frege se sirve de letras a efectos lógicos. Las mayúsculas griegas han de entenderse siempre como abreviaturas, pero a veces cabe introducirlas sin una previa explicación de su sentido, en cuyo caso podremos asignarle cualquier sentido que deseemos con la única condición de que la letra retenga idéntico sentido a todo lo largo del contexto en que se la hace intervenir. Para mayor claridad, en lo que sigue sólo nos serviremos de mayúsculas griegas no compartidas por el alfabeto latino, si bien el propio Frege no se atuvo a esta práctica en la primera de sus obras que ahora comentamos.

De acuerdo con la mayor parte de los lógicos que le precedieron, la adecuada representación de un juicio exigiría en cada caso la invariable distinción entre un sujeto y un predicado del mismo, pero Frege rechazará este viejo dogma. Quizás haya de hecho una diferencia retórica entre «Los griegos derrotaron a los persas» y «Los persas fueron derrotados por los griegos»; pero el *contenido conceptual* de ambos enunciados es el mismo, ya que uno de los dos podría ser indistintamente reemplazado por el otro a título de premisa sin que ello afectase a la validez de nuestro razonamiento, y eso es todo cuanto se necesita tener en cuenta a la hora de elaborar un lenguaje como el que a Frege le interesa. Imaginemos una variante del lenguaje ordinario en la que la aserción de que Arquímedes pereció en la conquista de Siracusa se expresase por medio de la oración «La muerte violenta de Arquímedes durante la conquista de Siracusa es un hecho», esto es, imaginemos un lenguaje en el que la totalidad del contenido de un juicio fuese expresado por una cláusula-sujeto. En ese caso sólo habría una y la misma cláusula-predicado para todos los enunciados, a saber, «es un hecho»; pero esa cláusula no se asemejaría a las cláusulas predicativas ordinarias, ya que su único cometido sería contribuir a la presentación del contenido que oficia de sujeto en la forma de un juicio. Frege nos informa de que el lenguaje simbólico que proyecta es un lenguaje de este género, añadiendo que, si quisiéramos insistir en buscar predicados, podríamos tomar el símbolo «⊢» como un signo predicativo común a todo juicio. Este modo de hablar le obliga a sostener que la distinción entre lo universal y lo particular, así como la noción de negación, se aplican ambas a los posibles contenidos judicativos, más bien que a los juicios en sí mismos, ya que se hallan conectadas con las relaciones de implicación, inconsistencia, etcétera, las cuales podrían darse entre diversos contenidos aun si éstos no fueran objeto de aserción. En cambio, advierte que la distinción comúnmente establecida por los lógicos entre juicios categóricos, hipotéticos y disyuntivos es de carácter meramente gramatical, como se habrá de desprender del ulterior desarrollo de su sistema. Y sostiene asimismo que las distinciones modales podrán ser ignoradas por referirse simplemente al fundamento cognoscitivo de nuestros juicios más bien que al contenido de estos últimos. Así, cuando decimos que una proposición es necesaria, nos limitamos a indicar que conocemos alguna verdad general

de la que esa proposición podría ser inferida; y cuando decimos que una proposición es posible, nos limitamos a indicar que no conocemos ninguna ley de la que pueda inferirse la negación de esa proposición (a menos, claro está, que nos sirvamos del lenguaje en términos de posibilidades para expresar lo que ordinariamente llamaríamos un juicio afirmativo particular, como cuando decimos «Una gripe puede tener consecuencias fatales» dando a entender con ello que algunas afecciones gripales son mortales).

Habiendo despachado de esta suerte el análisis de los juicios tradicional, Frege introduce ahora la expresión compleja

para representar el juicio de que Γ no es negado cuando Δ es afirmado. Está claro que el contenido

de ese juicio es lo que hemos dado en llamar un condicional filónico con Δ por antecedente y Γ por consecuente. Frege no dice nada acerca de la historia de esta noción, y hasta es posible que no tuviera la menor noticia de su manejo por parte de otros lógicos con anterioridad a él, pero la explicación que de la misma nos ofrece discurre exactamente por los cauces de Filón, esto es, consiste en distinguir las cuatro diferentes posibilidades que siguen

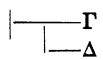
(I) Γ afirmado, Δ afirmado,
(II) Γ afirmado, Δ negado,
(III) Γ negado, Δ afirmado,
(IV) Γ negado, Δ negado,

añadiendo que su nuevo signo complejo representa el juicio de que la tercera posibilidad no tiene lugar sino una de las otras tres. En cambio Frege reconoce, a diferencia de Filón, que un signo semejante no expresa todo el sentido de la partícula «si». Pues, mientras usa la denominación de «trazo de condición» para designar a la línea vertical que une a ambas horizontales, advierte sin embargo que ese trazo no podría propiamente traducirse mediante la partícula «si» a menos de que Γ se halle conectado con Δ de acuerdo con alguna ley, que es lo que habría de permitirnos formular el juicio

sin saber de antemano si Γ y Δ han de ser afirmados o negados por separado. Frege va demasiado lejos al sugerir que aquella conexión tendría que ser causal, pues dicha conexión es por ejemplo la que se da cuando decimos «Si esta figura es un triángulo rectángulo, el cuadrado de su hipotenusa será igual a la suma de los cuadrados de sus catetos». Pero tiene razón, en cambio, al mantener que

no equivale simplemente a «Si Δ, entonces Γ» cuando se asevera este condicional por el mero hecho de saber que Γ es verdadero o Δ es falso.

El interés de Frege por la conexión filónica se halla determinado por su preocupación por el rigor deductivo. Frege observa que los dos juicios



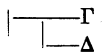
y

$$\vdash \Delta$$

implican conjuntamente el juicio

$$\vdash \Gamma,$$

dado que el primero de esos juicios excluye la tercera de las cuatro posibilidades antes enumeradas, en tanto que el segundo juicio excluye la segunda y la cuarta posibilidad; y propone reducir toda otra inferencia a este único patrón, correspondiente al *modus ponens* de la lógica tradicional, que hoy se conoce como regla de separación. Si *n* es el número que corresponde a un juicio



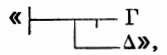
en la enumeración de las fórmulas de su sistema deductivo, Frege expresará abreviadamente la inferencia escribiendo

$$\text{«}(n) : \frac{\vdash \Delta}{\vdash \Gamma}\text{»}.$$

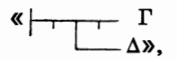
La mayor parte de los lógicos anteriores a él acostumbraban a presentar toda una serie de patrones inferenciales, y Frege no niega que la gente se sirve de ordinario de una diversidad de ellos. Pero añade que, si diéramos entrada a más de uno, no habría razón ninguna para detenernos en un número dado. Ahora bien, un incremento de las reglas con que operar incrementa el riesgo de cometer algún error en su manejo, en tanto una disminución del número de las mismas proporciona una mayor claridad y, por lo tanto, una mayor seguridad en el curso de la deducción. Sería, pues, deseable proceder, cuando ello sea posible, con una única forma de inferencia. Y lo que Frege sostiene es que contamos con semejante posibilidad, siempre que a estos efectos dispongamos de un número suficiente de fórmulas lógicas para servirnos de ellas a título de premisas. Dentro de poco tendremos ocasión de detenernos en las fórmulas elegidas por Frege con tal fin, lo que hará más fácilmente inteligible su propuesta de reducir todas las inferencias a un único patrón inferencial. Pero, por el momento, hemos de reseñar que en realidad echa asimismo mano de una regla de sustitución no menos que de la de separación. El propio Frege parece admitirlo así cuando, tras declarar su pretensión de servirse de un único tipo de inferencia, añade la precisión: «por lo menos en todos aquellos casos en los que se deriva un nuevo juicio de más de uno».

La negación se expresa por su parte mediante un pequeño trazo vertical aplicado a la parte inferior del trazo de contenido, tal y como sucede con el signo complejo «$\vdash\!\!\top\!\!-\Gamma$» que se leerá «No es el caso que Γ». Pero, de acuerdo con la caracterización del cometido del trazo de contenido antes suministrada, «$\top$» ha de entenderse como una fusión de los tres signos «—», «|» y «—». Valiéndonos ahora de diversas combinaciones

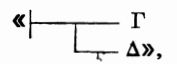
de los trazos de contenido, condición y negación, podremos expresar varias otras nociones de la lógica. Así,



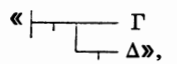
significará «La negación de la negación de Γ y la afirmación de Δ no tienen simultáneamente lugar» o «No es a la vez el caso que Γ y Δ». Y la negación de la totalidad del contenido de este juicio arrojará



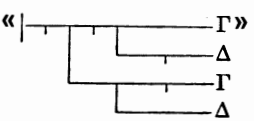
cuyo significado es «Γ y Δ». Cuando digamos «Γ pero Δ», habremos añadido a la mera conjunción anterior la idea de un cierto carácter inesperado de Δ, mas Frege no se muestra interesado por recoger en su simbolismo este género de matices. Por lo que se refiere a «Γ o Δ», donde a «o» le corresponde el sentido inclusivo de la disyunción predilecto de Frege, tendríamos



que significa literalmente «La negación de Γ y la negación de la afirmación de Δ no tienen simultáneamente lugar». Y la negación de la totalidad del contenido de este juicio arrojará a su vez



que significa «Ni Γ ni Δ». En cuanto a «Γ o Δ» en sentido exclusivo (transcrito a veces de la forma «O Γ o Δ»), tendríamos que ensamblar para expresarlo los contenidos del primero y el tercero de nuestros nuevos compuestos, con lo que se obtendría por resultado la expresión:

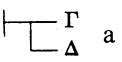


Como Frege apunta, cada uno de los juicios expresados por medio de este simbolismo selecciona una o más de las cuatro posibilidades representadas en la tabla arriba expuesta, eliminando las restantes. El último de ellos, por ejemplo, deja abiertas estas dos posibilidades

(II) Γ afirmado, Δ negado,
(III) Γ negado, Δ afirmado.

Y si se nos pregunta qué es lo que determina esencialmente el contenido de uno cualquiera de estos juicios, habrá que responder que la selección operada entre aquellas posibilidades a considerar más bien que cualquier forma particular de expresión que decidiéramos elegir. Así, si hubiésemos tomado por punto de partida un signo básico para la conjunción (esto es, para la selección de la primera de las posibilidades representadas en nuestra tabla y la eliminación de todas las demás), la conexión filónica de Δ y Γ podría haber sido definida como la negación de la conjunción de Δ con la negación de Γ. Este último proceder hubiera resultado de algún modo más natural que el anterior, ya que nuestro uso ordinario de «y» se corresponde más estrechamente con la noción de conjunción de lo que

nuestro uso de «si» lo pueda hacer con la noción de conexión filónica. Pero Frege explica que ha elegido partir de la noción de condicional porque el trazo de condición simplifica considerablemente la formulación de nuestras inferencias. Con otras palabras, Frege opina que ganaremos en elegancia y claridad al representar la noción envuelta en su única regla de inferencia mediante un solo signo de inferencia y de manera que el consecuente quede inmediatamente distinguido del antecedente con vistas a su ulterior separación. Según su propio esquema, la inferencia se indicaría sencillamente mediante la cancelación de la cláusula inferior de un complejo condicional, tal y como acontece en el pasaje de



A continuación, Frege introduce un nuevo símbolo para expresar la identidad de contenido. Tomando las letras «Γ» y «Δ» como nombres de cualquier género —esto es, no necesariamente signos proposicionales— establece ahora que «$\vdash(\Gamma\equiv\Delta)$» ha de significar «El nombre Γ y el nombre Δ tienen el mismo contenido conceptual, de suerte que Γ puede ser siempre reemplazado por Δ y viceversa». Como se verá por esta explanación, el juicio $\vdash(\Gamma\equiv\Delta)$ versa acerca de nombres. Frege lo indica así, sirviéndose de un curioso giro, al decir que los nombres conectados entre sí por medio de su nuevo símbolo no son simples representantes de sus respectivos contenidos sino intervienen en la expresión *in propria persona*. Y prosigue basando la necesidad de un símbolo para la identidad de contenido en el hecho de que un mismo contenido pudiera hallarse dado o determinado de modos diferentes. Cuando sucede así, la existencia de nombres diferentes para un mismo contenido no constituye una trivialidad de nuestro uso del lenguaje, sino un rasgo esencial de este último llamado a permitirnos la confección de algunos juicios importantes del género de los que Kant llamó sintéticos. Tal vez cabría ilustrar el caso por medio de un ejemplo al que recurrió Frege en un trabajo posterior. De acuerdo con su modo de expresarse en este último, «la estrella matutina» y «la estrella vespertina» serían ambos nombres de un mismo contenido; pero cuando digamos «La estrella matutina $\equiv$ la estrella vespertina», estaremos suministrando una valiosa información, dado que esos dos nombres corresponden a modos diferentes de determinar dicho contenido. Otra buena razón para la introducción de nuestro símbolo es que necesitamos de él con vistas a poder formular definiciones.

La siguiente noción introducida en la *Begriffsschrift* es aquella a la que más importancia concede Frege en su prefacio, explicándola luego en estos términos:

> «Supongamos que un símbolo simple o complejo interviene en uno o más lugares de una expresión (cuyo contenido no necesita ser un contenido judicable). Si consideramos a ese símbolo en cuanto reemplazable por algún otro símbolo (el mismo cada vez) en una o más de sus intervenciones, aquella parte de la expresión que permanezca invariante bajo tales reemplazamientos se dirá la función, en tanto que la parte reemplazable se dirá el argumento de la función» [2].

2 *Bs.*, § 9.

Así, si nuestro lenguaje contiene la expresión «la circunstancia de que el anhídrido carbónico sea más pesado que el hidrógeno» y suponemos que la cláusula «el hidrógeno» pudiera ser reemplazada por la cláusula «el oxígeno» de suerte que obtengamos una expresión del mismo carácter general que la primera, estaremos tratando a «el hidrógeno» como un argumento de la función «la circunstancia de que el anhídrido carbónico sea más pesado que...». Esta interpretación obliga, por supuesto, a admitir a «el oxígeno» como otro posible argumento de la misma función. Pero también cabría haber concebido a «el anhídrido carbónico» como la parte reemplazable de la expresión originaria, lo que nos llevaría a hablar de la función «la circunstancia de que — sea más pesado que el hidrógeno». E incluso podría considerarse a «el anhídrido carbónico» y «el hidrógeno» como igualmente reemplazables, en cuyo caso se hablaría de «la circunstancia de que — sea más pesado que...» como de una función de dos argumentos. Y la cosa no acabaría aquí, ya que en la misma línea nos sería dado conceder la posibilidad de funciones de más de dos argumentos.

En un lenguaje natural, la palabra o la cláusula que oficie de sujeto de una oración se considerará usualmente como el argumento, o por lo menos como el principal de los argumentos si hay más de uno, pero hemos de guardarnos de suponer que toda cláusula-sujeto pudiera merecer la consideración de un argumento. En el enunciado «Todo número entero positivo puede ser presentado como la suma de cuatro cuadrados», nos las habemos —según veremos luego— con la función «— puede ser presentado como la suma de cuatro cuadrados», esto es, con una función de la que «el número 20» podría considerarse un argumento en «El número 20 puede ser presentado como la suma de cuatro cuadrados». Mas, según Frege, la cláusula «todo número entero positivo», a diferencia de «el número 20», no podría ser un argumento de esa función o cualquier otra, ya que cobra sentido únicamente en el contexto de las oraciones en las cuales interviene y por sí misma no comporta una idea completa.

La terminología de Frege deriva en este punto claramente de la matemática, y otro tanto sucede con la notación funcional introducida a tal respecto. Así, Frege nos dice que el signo complejo «$\Phi(\Gamma)$» expresa una función indeterminada del argumento «Γ», y «$\Psi(\Gamma, \Delta)$» expresa una función, igualmente indeterminada, de los dos argumentos «Γ» y «Δ» tomados por este orden. Cuando las funciones sean de género tal que, una vez completadas por medio de sus argumentos, expresen contenidos judicables, podremos leer «$\vdash \Phi(\Gamma)$» como «Γ posee la propiedad Φ» y «$\vdash \Psi(\Gamma, \Delta)$» como «$\Gamma$ se halla en la relación Ψ con Δ». El mérito principal de un simbolismo semejante reside para Frege en que permite la expresión de la generalidad de un modo más satisfactorio que cualquiera de los lenguajes ordinarios. Pero ello solamente es posible gracias a un nuevo recurso llamado luego por los lógicos la notación en términos de variables ligadas. Y, en orden a distinguir el cometido de sus letras en esta nueva notación, Frege se sirve ahora del alfabeto gótico.

En la expresión de un juicio por medio de su simbolismo, la inserción de un símbolo complejo a la derecha del signo de aserción lo convierte en función de uno de los símbolos que intervienen en él. Reemplacemos ahora dicho símbolo por una letra gótica, que inscribiremos asimismo sobre una

concavidad del trazo de contenido, de suerte que obtengamos por ejemplo « $\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \Phi(\mathfrak{a})$ ». En ese caso, según Frege, «ello significa que la función es un hecho cualquiera que sea su argumento» [3]. Esta fraseología es evidentemente inapropiada, toda vez que —de acuerdo con la explicación dada por Frege más arriba— una función es una parte de una *expresión* y, por lo tanto, algo que nunca podría ser un hecho. Y no es éste el único pasaje de la *Begriffsschrift* en el que Frege parece confundir entre los símbolos y lo que éstos simbolizan. Podrían aducirse otros ejemplos, pero por el momento no nos vamos a detener en este punto. Frege aclara su pensamiento cuando a continuación nos dice que de un juicio como el que se acaba de citar siempre será posible derivar cuantos juicios deseemos de carácter menos general, para lo que se omitirá la concavidad con su correspondiente letra gótica pasándose a continuación a sustituir la que figura entre paréntesis por otros símbolos determinados. En pocas palabras, la expresión antes citada resulta equivalente a «Todo es Φ», pero se halla construida de manera que no corramos riesgo de confundir su forma con la de aquellas otras expresiones que surjan de ella por sustitución.

Se observará, no obstante, que la partícula «todo» no se halla sujeta en este contexto a otra cualificación que la implícita condición de que cualquier sustitución permisible en el seno de la función arroje la expresión de un contenido judicable. Si deseáramos ahora servirnos de la nueva notación para expresar un juicio en que afirmemos que todas las cosas de un cierto género poseen tal o cual otra propiedad, tendríamos que hacer constar esta última restricción en el simbolismo que sigue a la concavidad. Así, «Todo cuanto vive perecerá» podría quedar transcrito mediante

$$\text{«}\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \top\, \Pi(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\, \Lambda(\mathfrak{a}) \end{array}\text{»} \quad \text{donde} \quad \text{«}\begin{array}{l} \top\, \Pi(\ ) \\ \llcorner\, \Lambda(\ ) \end{array}\text{»}$$

se consideraría como un signo funcional complejo. Tal transcripción pone de manifiesto que la concavidad y su letra gótica gobiernan toda la expresión que les sigue, debiendo aquélla traducirse literalmente —para continuar con nuestro ejemplo— «Toda cosa no es el caso que viva sin perecer». Mas la notación no recoge el alcance existencial comúnmente asignado al enunciado primitivo en el lenguaje ordinario. Frege fue sin duda consciente de esta limitación, aunque no la menciona expresamente.

Hasta aquí hemos considerado sólo casos en los que la concavidad y la letra gótica inscrita en ella figuran inmediatamente a continuación del trazo judicativo o de aserción. Pero el cuantificador universal, como Peirce y los lógicos posteriores lo llamaron, podría ocupar otras diversas posiciones en la expresión de un juicio, como cuando escribimos por ejemplo

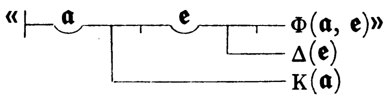
$$\text{«}\vdash \top \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \Phi(\mathfrak{a})\text{»} \quad \text{o} \quad \text{«}\begin{array}{l} \vdash \top\, \Gamma \\ \llcorner\, \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \Phi(\mathfrak{a}) \end{array}\text{»}$$

o

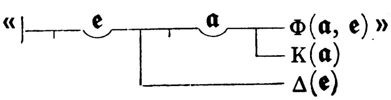
$$\text{«}\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \top\, \Phi(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\, \overset{\mathfrak{e}}{\smile} \Psi(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}). \end{array}\text{»}$$

[3] *Bs.*, § 11.

Tal posibilidad reviste la mayor importancia ya que permite formular una gran variedad de interesantes tipos de enunciados en nuestra nueva notación. Así, cuando el cuantificador universal vaya precedido por el trazo de negación, como en nuestro primer ejemplo, tendremos la expresión de la existencia de algo que no satisface la expresión funcional que le sigue a continuación; y, para aseverar la existencia de algo que satisfaga una expresión funcional, únicamente necesitaremos insertar otro trazo de negación entre el cuantificador universal y la citada expresión funcional, como cuando escribimos por ejemplo « » para representar «Hay por lo menos un filósofo». Como Guillermo de Shyreswood ya apuntara, «*Quidam, non-nullus, non-omnis-non* sociantur». Si el alcance del cuantificador universal quedara confinado a la condición expresada en nuestro juicio, como en el segundo ejemplo, tendríamos un modo de traducir un enunciado como «Si todo está húmedo, no podremos encender fuego», que por supuesto constituye un enunciado completamente diferente de «Menciona lo que quieras: si eso está húmedo, no podremos encender fuego». Y cuando un cuantificador universal se halla incluido en el alcance de otro, como en nuestro tercer ejemplo, nos enfrentaremos con un género de complejidad que nunca fue estudiado con detalle por los lógicos del pasado, por más que no sea infrecuente en el habla ordinaria y resulte esencial en el discurso científico. Para citar un par de ejemplos algo más complicados que los que cita Frege,



constituiría la transcripción de «Todo gato teme a algún perro», en tanto que



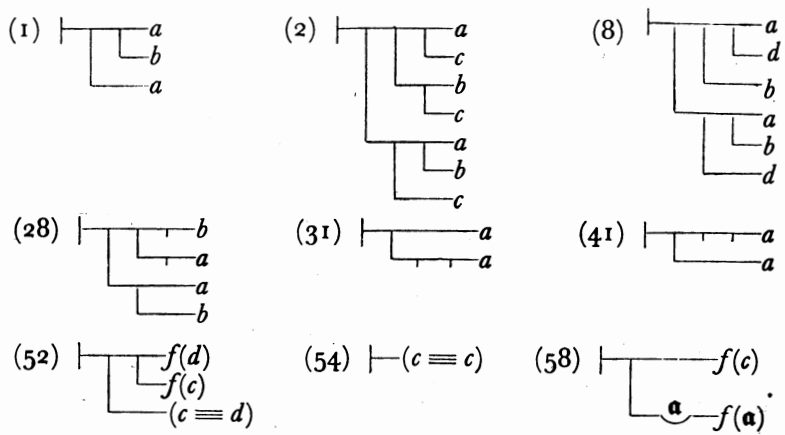
podría transcribir «Hay algún perro al que todo gato teme». Estas dos aserciones son obviamente diferentes entre sí, y ambas resultan inclasificables en el esquema aristotélico. No hay en realidad límite a la posible complejidad de las aserciones que cabría expresar en el lenguaje simbólico de Frege. Pues aunque en él únicamente se manejen tres signos básicos imprescindibles al respecto —a saber, el trazo condicional, el trazo de negación y el cuantificador universal—, las posibilidades de combinación de estos tres y los restantes elementos son incontables. Mientras los lógicos que le precedieron creían poder enumerar una lista completa de formas proposicionales exhaustivamente especificadas, Frege ofrece un esquema que es a un tiempo más simple que cualesquiera de los anteriores y en un cierto sentido inagotable.

Pero la posibilidad de incluir un cuantificador en el alcance de otro obliga a precaverse en relación con el manejo de nuestras letras góticas. Mientras que, en líneas generales, es perfectamente legítimo reemplazar una letra gótica por otra a todo lo largo de la expresión en que aquélla

hace acto de presencia, es importante preservar la *diferencia* entre esas letras cuando un cuantificador se halla incluido en el alcance de otro. Así, si reemplazáramos «e» por «a» o «a» por «e» en algún lugar de uno de nuestros dos últimos ejemplos, el resultado de ese reemplazamiento sería absurdo o, por lo menos, constituiría algo diferente de lo que habíamos pretendido conseguir. La razón de esta restricción a nuestra libertad de elegir esta o aquella letra gótica es fácilmente comprensible. Si un signo funcional posee diversos lugares argumentales por rellenar mediante una y la misma expresión, es importante indicar este hecho de algún modo; y el procedimiento más obvio —hoy universalmente adoptado— para hacerlo así consiste en señalar esos lugares, a diferencia de otros, mediante una y la misma letra. Pues está claro que, de acuerdo con esta convención, los dos espacios argumentales de un signo tal como «a teme a a» habrán de rellenarse en cualquier caso con el mismo argumento, aunque no sea obligado en cambio rellenar los dos espacios de «a teme a e» con argumentos diferentes. De modo que, cuandoquiera que un cuantificador se halle incluido en el alcance de otro y haya como antes el peligro de confusión entre ambos, no tendremos otro remedio que acudir a la distinción de letras que se acaba de mencionar.

Aunque la riqueza del sistema de Frege se debe en buena parte al hecho de que su cuantificador universal no necesita siempre aparecer inmediatamente después del trazo judicativo o de aserción, aquellos casos en que aparece en dicha posición revisten especial importancia, ya que sólo ellos nos permiten poner en práctica el procedimiento de la sustitución. Para citar un caso del lenguaje ordinario paralelo al que hemos citado hace un momento, la persona que dice «Si todo está húmedo, no podremos encender fuego» no se compromete por ello con aserciones del estilo de «Si la hierba está húmeda, no podremos encender fuego». Pues este último enunciado pudiera bien ser falso por más que el primero sea un enunciado verdadero. Con el fin de distinguir aquellos casos que admiten la sustitución, y en orden asimismo a simplificar su notación, Frege introduce un segundo procedimiento de expresión de la universalidad, a saber, por medio de una letra itálica no precedida de cuantificador. Así, y cuando ello resulte conveniente, podremos escribir « $\vdash \Phi(a)$ » en lugar de « $\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \Phi(\mathfrak{a})$ ». Y, cuando lo deseemos, siempre podremos retornar de la expresión a base de itálicas a la expresión a base de góticas, si bien al reemplazar una letra itálica por una letra gótica hemos de asegurarnos de que la letra gótica elegida no haya intervenido previamente en algún lugar del enunciado en cuestión. Esta última precaución es necesaria porque el nuevo cuantificador resultante de nuestro reemplazamiento habrá de incluir bajo su alcance a cualquier otro que pueda figurar en la expresión. Pues, en efecto, cuando Frege recurre a letras sin cuantificadores (o variables libres, como se las conoce en la terminología de los lógicos contemporáneos) para expresar la universalidad, lo más característico de su recurso es que cada una de esas letras ha de tener por alcance la totalidad de la expresión en que interviene. La notación es por lo menos tan vieja como Aristóteles, mas Frege fue el primero en ofrecernos un concienzudo análisis de la misma, así como en reparar en la necesidad de otros recursos para la expresión de la universalidad dentro de un alcance limitado, como cuando acontece por ejemplo tras un signo de negación.

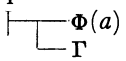
Una vez explicado su simbolismo, Frege pasa a presentarnos algunas tesis lógicas. Hay, nos dice, ciertos principios que no pueden ser expresados en su lenguaje simbólico ya que este último los presupone. Se trata en estos casos de reglas para el uso de los signos y reglas de inferencia. Pero hay también principios del pensamiento puro que sí resultan expresables por medio de su *Begriffsschrift*, y lo que Frege se propone en la obra de este título es ofrecernos una serie de ejemplos de los mismos indicando la conexión de unos con otros. Con otras palabras, Frege desea bosquejar una presentación de la lógica como sistema deductivo, para lo que primero trata de seleccionar unos cuantos principios lógicos lo suficientemente potentes como para que en su conjunto se concentre la fuerza lógica de todos los demás. Como cabría haber esperado de alguien medianamente familiarizado con la historia de la axiomatización de la geometría, Frege reconoce la posibilidad de selecciones diversas, pero se decide a favor de un esquema que contiene nueve axiomas, razonablemente simples y obvios todos ellos. Los tres primeros envuelven únicamente la noción expresada por el trazo de condición, en tanto que los tres siguientes introducen asimismo la noción de negación. A continuación, aparecen dos axiomas en los que interviene la noción de identidad, y la de universalidad se halla expresada en el último de los axiomas por medio de una letra gótica sobre la consabida concavidad. Sirviéndonos de su propia notación, y con la numeración que les corresponde en su sistema, podríamos formularlos como sigue:



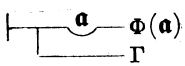
De acuerdo con la distinción entre «lógica primaria» y «lógica general» propuesta y adoptada en anteriores capítulos, diríamos ahora que los primeros seis axiomas corresponden a la lógica primaria y que el noveno constituye un añadido requerido por la lógica general, pero el séptimo y el octavo pertenecen a la teoría de la identidad, que en rigor excede de ambos apartados.

Se observará que todos los axiomas se hallan formulados por medio de itálicas (esto es, de variables libres). A tenor de las explicaciones de Frege, este recurso constituye simplemente un modo abreviado de formular las mismas expresiones que cabría formular haciendo uso de letras góticas y cuantificadores universales; y hemos de suponer que lo consideraba especialmente apropiado con vistas a facilitar los procesos de sustitución. Pero

es difícil que ésta sea la única razón para servirse de él. Pues lo cierto es que el empleo exclusivo de letras góticas acabaría difuminando la interesante e importante diferencia entre los seis primeros axiomas —que en su formulación no envuelven la cuantificación universal— y el noveno, que sí comporta en cambio un cuantificador. Esto es, sin el recurso a las itálicas la lógica primaria no aparecería como un apartado independiente de la lógica general, y el noveno axioma por su parte dejaría de revestir el peculiar carácter con que ahora se nos presenta. Más adelante tendremos ocasión de retornar sobre este punto. Por el momento bastará con recordar que, en la demostración de sus teoremas a partir de los axiomas precedentes, Frege necesita valerse de un principio de sustitución además del de separación que gusta de considerar como su única regla de inferencia. Y ni siquiera estas dos últimas son las únicas reglas que tienen cabida en su sistema. Pues su declaración en el sentido de que, si se desea, es posible pasar de nuevo de una letra itálica a una gótica precedida de un cuantificador equivale en efecto a una tercera regla de inferencia. Y, en el curso de su explicación del empleo de las itálicas, todavía introduce una cuarta regla, a saber, la de que de



podemos deducir



si «Γ» es una abreviatura de una expresión en la que «*a*» no intervenga y «*a*» ocupa únicamente posiciones argumentales en la versión desarrollada de «Φ(*a*)» [4]. Tomados en unión de estas cuatro reglas, sus axiomas constituyen de hecho un conjunto completo en el sentido técnico de la expresión, aunque su suficiencia no podía demostrarse en los días de Frege.

El lenguaje simbólico de Frege posee realmente todas las ventajas de que éste se preciaba, y en particular la de facilitar las inferencias en el seno de su sistema deductivo por medio de la regla de separación. Pero es engorroso de manejar, ocupa mucho espacio y no resulta fácil imprimirlo. A los efectos de ilustrar un proceso de deducción dentro de su sistema nos serviremos, pues, del simbolismo de Peano en lugar del suyo propio. Mas con el fin de simplificar la traducción del uno al otro nos serviremos de las letras empleadas por Frege, escogiendo un ejemplo que sólo haga necesaria la introducción de un nuevo signo, a saber, el signo de herradura que se inserta entre un antecedente y un consecuente para significar la conexión filónica. El ejemplo que sigue reviste especial interés por contribuir a poner de manifiesto la gran complejidad de las derivaciones que se pueden llevar a cabo a partir de premisas sumamente sencillas. Tomando como punto de partida los dos primeros axiomas de Frege, procederemos a deducir de ellos el tercero, lo que incidentalmente prueba la posibilidad de una simplificación de su sistema. Las proposiciones que siguen, desde la [3] a la [8] inclusive, fueron establecidas todas ellas por el propio Frege; pero el resto de la demostración se debe a Lukasiewicz [5], y la numeración es de nuestra cosecha. Frege y sus sucesores han previsto más de un recurso tendente a abreviar este género de demostraciones, pero

4 *Bs.*, § 11.
5 "Zur Geschichte der Aussagenlogik", *Erkenntnis*, V (1936), pp. 111-31, especialmente p. 127.

por nuestra parte expondremos en atención al lector cada uno de los pasos de la misma acompañados de su correspondiente justificación. Así, la referencia que acompaña a [3] indicará que ha sido derivada a partir de [1] valiéndonos de la sustitución de la letra que figura a la derecha de la barra inclinada por la expresión que figura a su izquierda; y la referencia que acompaña a [4] indicará que ha sido derivada a partir de [3] y [2] por medio de la regla de separación correspondiente al *modus ponens*.

[1] $a \supset (b \supset a)$ Axioma.

[2] $[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]$ Axioma.

[3] $\{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\} \supset ((b \supset a) \supset \{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\})$
A partir de [1]: $[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]/a;\ b \supset a/b.$

[4] $(b \supset a) \supset \{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\}$
A partir de [3] y [2].

[5] $((b \supset a) \supset \{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\}) \supset (\{(b \supset a) \supset [c \supset (b \supset a)]\} \supset \{(b \supset a) \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\})$
A partir de [2]: $b \supset a/c;\ c \supset (b \supset a)/b;\ (c \supset b) \supset (c \supset a)/a.$

[6] $\{(b \supset a) \supset [c \supset (b \supset a)]\} \supset \{(b \supset a) \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\}$
A partir de [5] y [4].

[7] $(b \supset a) \supset [c \supset (b \supset a)]$ A partir de [1]: $b \supset a/a;\ c/b.$

[8] $(b \supset a) \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]$ A partir de [6] y [7].

[9] $\{(b \supset a) \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\} \supset \{[(b \supset a) \supset (c \supset b)] \supset [(b \supset a) \supset (c \supset a)]\}$ A partir de [2]: $b \supset a/c;\ c \supset b/b;\ c \supset a/a.$

[10] $[(b \supset a) \supset (c \supset b)] \supset [(b \supset a) \supset (c \supset a)]$ A partir de [9] y [8].

[11] $\{[(c \supset b) \supset a] \supset [b \supset (c \supset b)]\} \supset \{[(c \supset b) \supset a] \supset (b \supset a)\}$
A partir de [10]: $c \supset b/b;\ b/c.$

[12] $[a \supset (b \supset a)] \supset \{c \supset [a \supset (b \supset a)]\}$ A partir de [1]: $a \supset (b \supset a)/a;\ c/b.$

[13] $c \supset [a \supset (b \supset a)]$ A partir de [12] y [1].

[14] $[(c \supset b) \supset a] \supset [b \supset (c \supset b)]$
A partir de [13]: $(c \supset b) \supset a/c;\ b/a;\ c/b.$

[15] $[(c \supset b) \supset a] \supset (b \supset a)$ A partir de [11] y [14].

[16] $\{[(c \supset b) \supset a] \supset (b \supset a)\} \supset (\{d \supset [(c \supset b) \supset a]\} \supset [d \supset (b \supset a)])$
A partir de [8]: $(c \supset b) \supset a/b;\ b \supset a/a;\ d/c.$

[17] $\{d \supset [(c \supset b) \supset a]\} \supset [d \supset (b \supset a)]$ A partir de [16] y [15].

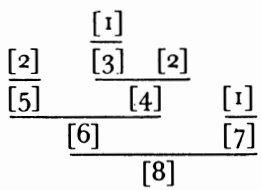
[18] $\{[c \supset (b \supset a)] \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]\} \supset \{[c \supset (b \supset a)] \supset [b \supset (c \supset a)]\}$
A partir de [17]: $c \supset (b \supset a)/d;\ c \supset a/a.$

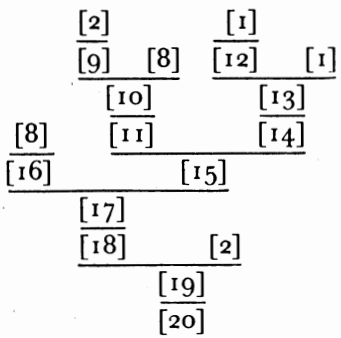
[19] $[c \supset (b \supset a)] \supset [b \supset (c \supset a)]$ A partir de [18] y [2].

[20] $[d \supset (b \supset a)] \supset [b \supset (d \supset a)]$ A partir de [19]: $d/c.$

El último paso se reduce, como puede apreciarse, a una sustitución trivial cuyo único cometido es restaurar las letras de que Frege se sirvió accidentalmente en la formulación de su tercer axioma. Pero el hallazgo de las sustituciones que han hecho posibles los demás pasos está lejos de constituir una trivialidad o un accidente. Sirviéndonos de líneas horizonta-

les para indicar las derivaciones efectuadas, ya sea a partir de una o de dos premisas, podríamos representar el fragmento de la demostración debido a Frege mediante la primera de las figuras que ahora siguen, representando mediante la segunda su continuación:





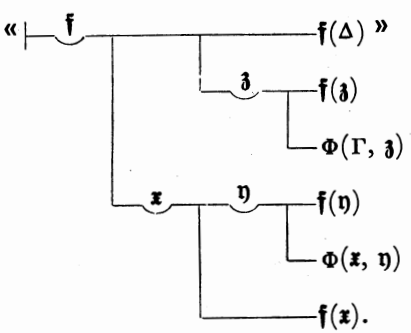
Hasta aquí, Frege no ha necesitado servirse de definiciones a título de abreviaturas —excepción hecha de aquella por medio de la cual introducía las letras itálicas— a lo largo del desarrollo de su sistema. Pero en la tercera parte de su opúsculo reconoce la necesidad de recurrir en la práctica a algunas definiciones, añadiendo que han de formularse mediante una expresión del tipo de «||—Γ≡Δ» en la que *definiendum* y *definiens* se situarán en cada caso respectivamente a la derecha y a la izquierda del signo de identidad. Los dos trazos verticales al comienzo de la definición tienen por cometido recordarnos que las definiciones no son juicios sino tan sólo convenciones relativas a nuestro simbolismo. Para nuestros propósitos, no obstante, no precisamos entrar en los detalles de la tercera parte de la *Begriffsschrift*. La intención de Frege allí es presentar un avance preliminar de la posible utilización de su lenguaje simbólico para una exacta formulación de las nociones requeridas por la matemática, eligiendo como ilustración a este respecto la teoría general de las series. El ejemplo es interesante porque, como ya vimos en el último capítulo, la inducción matemática descansa en la ordenación serial de los números naturales, que por su parte no se podría explicar sin acudir a la teoría de las relaciones que Frege incorporara por la primera vez satisfactoriamente al dominio de la lógica.

Para cualquier relación Φ podremos definir una otra relación Φ' tal que Γ se halle en la relación Φ' respecto de Δ si, y sólo si, Γ se halla en la relación Φ respecto de Δ, o bien respecto de algo que se halle en la relación Φ respecto de Δ, o bien respecto de algo que se halle en la relación Φ respecto de algo que se halle en la relación Φ respecto de Δ, o bien..., etcétera. En el lenguaje de los lógicos posteriores Φ' se dirá la *relación ancestral propia* de Φ, ya que si Φ es la relación de padre a hijo, Φ' será la relación de antepasado o ancestro a descendiente. El propio Frege no se sirve de dicha terminología, pero expresa la relación derivada por medio de la fórmula «Δ sigue a Γ en la serie generada por Φ»; y el problema en el que concentra su atención es el de definir aquella relación derivada mediante una expresión finita, esto es, sin hacer uso de la voz «etcétera», que a su vez presupone la idea de ordenación serial. El resultado deseado

lo logra estableciendo que «Δ sigue a Γ en la serie generada por Φ» quiere decir lo mismo que «Δ posee toda propiedad que pertenezca (I) a todo objeto respecto del que cualquier posesor de dicha propiedad se halle en la relación Φ y (II) a todo objeto respecto del que Γ se halle en la relación Φ».

Las dos condiciones mencionadas en esta definición no aparecen en el orden en que lo harán en versiones posteriores (incluida aquella de la que nos servíamos en el capítulo precedente), pero de su formulación se sigue claramente que cualquier propiedad que las satisfaga ha de pertenecer a todo objeto respecto del que Γ se halle en la relación ancestral propia de la relación Φ. Pues la segunda condición impone la pertenencia de esa propiedad a los sucesores inmediatos de Γ, en tanto la primera condición exige su transmisión de todos los sucesores de Γ a sus sucesores inmediatos o, como dice Frege, exige que la propiedad en cuestión sea hereditaria en la serie. La definición equivale, en consecuencia, a la identificación de los sucesores de Γ en la serie generada por Φ en virtud de su posesión de *todas* las propiedades hereditarias en la serie inaugurada por Γ. Pudiera haber sin duda propiedades hereditarias en la serie que, no obstante, pertenezcan a objetos que no figuren en esta última, tal y como un rasgo fisonómico como la nariz larga podría ser hereditario en el seno de una familia y no obstante pertenecer a individuos que no sean miembros de ella. Pero, como sabemos, esto no sería cierto por lo que se refiere a *todas* las propiedades hereditarias, ya que hay al menos una propiedad tal —a saber, la de ser un sucesor en dicha serie— que únicamente pertenece a los elementos de la misma. Repárese, sin embargo, en que la definición de Frege solamente abarca a los sucesores de Γ en la serie generada por Φ. Si deseáramos servirnos de la expresión «serie generada por Φ» de modo tal que Γ quedara incluido en ella, tendríamos que definir a un miembro de la serie como aquel objeto que o es idéntico a Γ o es un sucesor de Γ en la serie generada por Φ. En ocasiones, el adjetivo «ancestral» se emplea para caracterizar a aquella relación que Γ guarda con todos los miembros de la serie incluido él mismo; y ésta es la razón de que hayamos hablado de relación ancestral *propia* en conexión con la teoría de Frege.

Una vez completamente desarrollado en el simbolismo de Frege —esto es, expresado sin hacer uso de las abreviaturas que el autor introduce en las proposiciones (69) y (76) de su libro— el enunciado de que Δ sigue a Γ en la serie generada por Φ revestiría la forma:



El anterior ejemplo es buena muestra del uso de cuantificadores de diferente alcance y pone de relieve cómo en ciertos contextos cabría tratar a una función como argumento de una función de orden superior, pues la letra gótica «f» se habría de parafrasear en el lenguaje ordinario mediante la expresión «toda propiedad». Al introducir su notación cuantificacional en la primera parte de la *Begriffsschrift*, Frege repara en dicha posibilidad y advierte que, cuando una letra itálica oficie a título de símbolo funcional, habremos de tener debidamente en cuenta el hecho a la hora de efectuar las oportunas sustituciones. Pero no considera en cambio necesario arbitrar ningún recurso especial a esos efectos al formular, en la segunda parte de la obra, los axiomas de su sistema lógico.

2. Sentido y referencia: objetos y funciones.

En sus *Grundgesetze*, Frege retendría todos los símbolos de su *Begriffsschrift* con excepción del signo «≡», ahora reemplazado por el signo matemático ordinario de igualdad. Esta modificación de su notación es en sí misma insignificante, pero señala un importante cambio en la concepción fregeana del significado. Su explicación podrá servirnos, pues, como una adecuada introducción a su doctrina posterior. El propio Frege comenzó por ahí en su trabajo *Ueber Sinn und Bedeutung*.

En la primera parte de su *Begriffsschrift*, Frege había establecido una tajante distinción entre un juicio o aserción y algo otro a lo que llamaba un contenido. Nunca llegó a especificar exactamente lo que había de entenderse por esta última palabra, pero sin duda concebía a dicho contenido como algo contrapuesto no sólo al juicio mismo sino también a los signos encargados de expresarlo. De esta última contraposición se serviría a la hora de explicar enunciados tales como «La estrella matutina es idéntica a la estrella vespertina». Es obvio que la fuerza de esta afirmación resulta por completo diferente de la de «La estrella matutina es idéntica a la estrella matutina». Mas, si la estrella matutina se identifica de hecho con la estrella vespertina, para explicar aquella diferencia entre ambos enunciados no bastará decir que uno de ellos envuelve referencia a la estrella vespertina mientras que el otro no lo hace en cambio así. Como ya vimos, Frege sugería que el enunciado de una identidad había realmente de versar acerca de las expresiones que figuran a ambos lados del signo de identidad, circunstancia que trataba de explicar haciendo ver que el cometido del signo «≡» era simbolizar la identidad de contenido entre dos expresiones. Pero, con posterioridad, acabaría reconociendo que semejante solución a la cuestión está muy lejos de resultar satisfactoria. Pues, en efecto, si el enunciado originario no versara en rigor acerca del planeta Venus sino tan sólo acerca de los contenidos de ciertas expresiones, su formulación sería asunto de la filología más bien que de la astronomía. Pero éste no es evidentemente el caso, dado que el descubrimiento de que la estrella matutina y la estrella vespertina son idénticas fue producto del cálculo y la observación más bien que de la reflexión acerca de nuestro uso de las palabras. E incluso en el supuesto de tratarse de un asunto de la incumbencia de la filología, la dificultad se habría de replantear tan pronto como intentáramos llevar a la práctica la solución propuesta. Pues si dijésemos que la expresión «la estrella matutina» posee el mismo con-

tenido que la expresión «la estrella vespertina», ¿no equivaldría ello a la aserción de que el contenido de la expresión «la estrella matutina» es idéntico al contenido de la expresión «la estrella vespertina»? En cuyo caso, ¿no tendríamos que dar un paso más y conceder que el enunciado originario no versa acerca de las expresiones «la estrella matutina» y «la estrella vespertina» sino acerca de las expresiones «el contenido de la expresión 'la estrella matutina'» y «el contenido de la expresión 'la estrella vespertina'»? Y la cosa no acabaría siquiera aquí, puesto que —como puede pensarse— la pretendida solución envuelve en realidad una regresión infinita.

Frege trata en su obra posterior de escapar a esta dificultad evitando hablar de contenidos y estableciendo una nueva distinción entre sentido (*Sinn*) y referencia (*Bedeutung*). Cuando decimos que la estrella matutina es idéntica a la estrella vespertina nuestras dos descripciones se refieren a una y la misma cosa, mas lo hacen de modo diferente ya que ambas poseen diferente sentido. Al formular el enunciado nos servimos de dichas descripciones de la misma manera exactamente que lo haríamos en cualquier otro enunciado astronómico, por lo que no hay necesidad de recurrir a un nuevo signo de identidad que nos indique que de lo que se habla en realidad es de palabras y no cosas. El signo matemático de identidad basta y sobra en este caso para expresar cuanto pudiéramos desear. Cuando se dice que $2+2=4$, también hacemos uso de las expresiones «2+2» y «4» para referirnos a uno y el mismo número. Nuestras dos expresiones son ambas nombres propios de ese número, mas cada una de ellas reviste un sentido diferente. Y la única diferencia importante entre este último enunciado y el enunciado astronómico que nos servía antes de ejemplo vendría a reducirse a la posibilidad de determinar *a priori* su verdad.

En su acepción ordinaria, las palabras alemanas que hemos traducido como «sentido» y «referencia» no presentan el contraste que Frege estableciera entre las mismas. *Sinn* admite la misma gama de usos que «sentido» (inglés, *sense*), y *Bedeutung* se corresponde exactamente con «significado» (inglés, *meaning*). En numerosos contextos sólo razones estilísticas podrían hacernos preferir entre uno u otro vocablo. Pero el verbo simple *deuten*, del que derivan *bedeuten* y *Bedeutung*, puede querer decir «indicar», «señalar» o «apuntar», y Frege parece haberse apoyado en esta particularidad en orden a justificar su acepción técnica de *bedeuten*. Sin embargo, jamás adujo sus razones en pro de esta acepción porque tampoco creyó nunca estarse desviando de la práctica ordinaria; aunque, en una ocasión, parece revelar el curso de su pensamiento al afirmar que, por más que las letras góticas o itálicas *bedeuten nicht* (no significan), no obstante *andeuten* (aluden a) argumentos de funciones [6]. Pues *andeuten* es otro derivado de *deuten*, y por lo visto Frege opinaba que el hecho no carecía enteramente de importancia. Mas cualesquiera que puedan haber sido sus motivos para usar el término *Bedeutung* como lo hizo, de lo que no hay ninguna duda es de que le asignó una significación específica que aquel término no detenta en el habla cotidiana, lo que naturalmente dificulta su adecuada traducción. No lo podemos, por ejemplo, traducir por «significado», pues no sería correcto decir que la expresión «la estrella matutina»

6 *Gg.*, I, § 17.

tiene por significado un cuerpo celeste, aunque tal vez quepa decir que la persona que usa esa expresión quiere aludir (*means to refer*) con ella a un cuerpo celeste. En ocasiones se han propuesto traducciones alternativas como «nominatum» [7] y «denotación» [8], y ciertamente cabría alegar algo en favor de cada una de ellas. Pues cuandoquiera que Frege habla de la *Bedeutung* de un símbolo, parece inclinarse a sostener que el símbolo en cuestión es un nombre o, por lo menos, un cuasi-nombre; y es posible decir en cualquier caso que la expresión «la estrella matutina» denota un cuerpo celeste. Pero ninguna de esas dos traducciones resulta enteramente satisfactoria. El término «nominatum» parece demasiado artificial, lo que sin duda contradice la intención de Frege, mientras «denotación» pudiera inducir a confusión por haberlo usado John Stuart Mill en contraposición al término «connotación», contraposición esta última que no se identifica exactamente con la de Frege entre *Bedeutung* y *Sinn*. Tampoco «referencia» es una traducción que satisfaga plenamente, pues resulta algo extraño oír hablar de una cosa como la referencia de un signo. Pero reviste por lo menos el mérito de no originar malentendidos, y nada hay que se oponga a que de vez en cuando introduzcamos variaciones en nuestro modo acostumbrado de hablar. El propio Frege explicó en un lugar su distinción diciendo que un nombre propio (que podría ser un signo aislado o una combinación de signos) *expresa* su sentido pero *designa* su referencia *.

En el empleo ordinario del lenguaje para formular enunciados, hacer preguntas, dar órdenes, etcétera, se ha de asumir que todo signo completo y distinto posee a la vez sentido y referencia. La referencia es un objeto de algún género, pero no necesariamente un objeto físico perceptible; pues Frege se opuso siempre tenazmente a la tesis de que únicamente existe lo que puede ser percibido, incluyendo expresamente entre sus objetos cosas tales como números, lugares, instantes o períodos de tiempo. El sentido, por su parte, es un aspecto bajo el que cabría considerar a nuestro objeto. No se trata en modo alguno de una idea, si por tal entendemos una imagen u otro acaecimiento psíquico privativo de un sujeto. Pues toda comunicación entre dos o más personas descansa en la posibilidad de expresión del sentido, que habrá de ser por tanto algo público y no privado para cada una de ellas. En determinados casos, los signos podrían gozar públicamente de sentido aun si se hallasen faltos de toda referencia. Esto es lo que sucede, por ejemplo, cuando se usan las palabras en la literatura de ficción. Un novelista puede asegurarnos que su obra no se refiere a personajes o circunstancias reales, pese a lo cual somos capaces de entender cuanto ha escrito. Y algo por el estilo ocurre cuando alguien reproduce los enunciados de otros sin asignar él mismo ninguna referencia a las palabras empleadas por estos últimos. Así, un estudioso de las humanidades clásicas podrá hacer un uso inteligible de los nombres «Zeus» y «Atenea» en una conferencia sobre mitología griega, por más que ni él ni quienes le escu-

7 R. Carnap, *Meaning and Necessity*.

8 Alonzo Church, "The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, LXXX (1951), pp. 100-12.

* En lo que sigue, por lo tanto, traduciremos siempre *Sinn* (*sense*) por "sentido" y *Bedeutung* (*reference*) por "referencia", manteniendo "significado" (*meaning*) como un término neutro susceptible de una u otra interpretación: "sentido" y "referencia" serían, así, dos diferentes dimensiones del significado de un signo o, cuando menos, dos distintos cometidos significativos respectivamente desempeñados por aquellos signos que los autores llaman "expresiones" y "designaciones" (véase sobre este punto su discusión de la teoría fregeana del significado en el capítulo X, § 1). *(N. del T.)*

chen crean realmente en la existencia de los seres descritos bajo uno y otro nombre. Pero éstos son casos especiales. En el habla común todos los nombres se suponen provistos de su correspondiente referencia, y en un lenguaje lógicamente perfecto que se pudiera construir para propósitos científicos cada una de las expresiones destinadas a oficiar a título de nombres propios tendría en rigor que poseer alguna referencia. De hecho, el uso de expresiones que presupongan la verdad de un enunciado existencial daría lugar, sin la oportuna demostración de ese enunciado, al surgimiento de falacias. Así, la expresión «la serie menos rápidamente convergente» posee un sentido, pero no se refiere a cosa alguna; y la oración que incluya esa expresión perdería por ello toda posible utilidad. Ni siquiera cabría mantener que quienes la profieran han formulado un enunciado falso, ya que presuponer algo no es exactamente lo mismo que hacerlo objeto de aserción.

Hasta aquí, la teoría de Frege no parece excesivamente discutible. Algún lector acaso se sorprenda de su uso de la categoría de *nombre propio* en relación con expresiones como «2+2»; mas sus reparos se desvanecerían tan pronto se le informe de la posibilidad de sustituir la expresión «nombre propio» por la expresión «designación» sin que por ello se alterase sustancialmente la doctrina de Frege. La cosa cambia un tanto cuando nuestro autor pasa a sostener que también las oraciones poseen a la vez sentido y referencia, dado que ello comporta la consideración de las oraciones como si fueran nombres propios o designaciones, consideración que sin duda resulta harto chocante. El propio Frege reconoce que hace raro hablar de la referencia de una oración, pero alega en su favor que es menester hacerlo así por la razón siguiente. Una oración inteligible se ha de hallar indudablemente dotada de sentido, el cual no es sino el pensamiento expresado por aquélla (por lo demás, por pensamiento no se entiende aquí el acto subjetivo de pensar por parte del que habla o su interlocutor, sino el contenido objetivo susceptible de ser pensado por una pluralidad de tales sujetos). Pero, entre las oraciones inteligibles, las hay que contienen designaciones carentes de referencia, o por lo menos designaciones cuya referencia no podemos garantizar. Consideremos, por ejemplo, la oración «Ulises fue desembarcado en Itaca mientras dormía profundamente». En tanto nos contentemos con tratarla como parte de una obra de arte literaria no necesitaremos ocuparnos para nada de la cuestión de si el nombre «Ulises» posee o no referencia, mas tan pronto la concibamos como un auténtico enunciado habremos de asumir que el nombre «Ulises» designa algo de lo que el predicado podría ser afirmado o denegado. Ahora bien, el contenido objetivo de pensamiento envuelto en la oración seguirá siendo el mismo tanto si «Ulises» posee referencia como si no, de suerte que la exigencia de referencia a la par que sentido en el segundo de aquellos casos se hallará de algún modo conectada con nuestra búsqueda de la verdad. Esta última entraña, según Frege, la expectativa de una referencia para la oración en su conjunto, referencia a la que cabría denominar su valor de verdad, esto es, la circunstancia de ser verdadera o falsa. Para decirlo en dos palabras, «toda oración enunciativa en que entre en juego la referencia de las palabras que la integran... habrá de ser considerada como un nombre propio, y su referencia —si la hay— será lo Verdadero o bien lo Falso» [9].

[9] *Über Sinn und Bedeutung*, p. 34.

Frege había sugerido en la *Begriffsschrift* la posibilidad de considerar a su trazo judicativo o de aserción como el predicado común a todo juicio, a saber, el predicado «... es un hecho». Pero ahora rechaza dicho punto de vista.

«Alguien podría decir realmente 'El pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero'. Pero un atento examen del contenido de su afirmación revelaría que no ha dicho otra cosa que lo que se podría decir mediante la más simple oración '5 es un número primo'. La pretensión de verdad surge en cada caso de la propia forma de la oración enunciativa; y cuando ésta se halla desposeída de la fuerza que usualmente la caracteriza —como cuando está puesta en boca, por ejemplo, de un actor sobre un escenario— la misma afirmación 'El pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero' contendría únicamente un pensamiento, concretamente el mismo que la más simple '5 es un número primo'. Se sigue, pues, de aquí que la relación de un pensamiento con lo Verdadero no admite comparación con la relación entre un sujeto y un predicado... Un valor de verdad no puede entrar a formar parte de un contenido objetivo de pensamiento más de lo que lo pueda hacer así, pongamos por caso, el sol, puesto que no se trata de un sentido sino de un objeto» [10].

Pero un valor de verdad, prosigue su argumentación, pudiera constituir la referencia de una oración. Pues evidentemente depende de la referencia de las partes de la misma y permanecería inalterado si cualquiera de esas partes se viera reemplazada por una otra expresión dotada de la misma referencia. Como Leibniz lo acertó a formular, «eadem sunt quae sibi mutuo substitui possunt salva veritate». Y, en realidad, «¿qué otra cosa sino el valor de verdad podría corresponder a toda suerte de oraciones cuando sus componentes no carecen de referencia, permaneciendo invariable a través de sustituciones de aquel género?» [11].

Todo esto, sin embargo, únicamente tiene aplicación cuando se habla de oraciones completas formuladas en el discurso directo habitual. La situación varía notablemente cuando una forma verbal susceptible de ser enunciativamente usada se presenta como una cláusula subordinada tras de verbos como «decir», «creer» o similares, pues en tal caso habría de referirse a lo que constituye su sentido en el contexto del discurso directo. Consideremos, por ejemplo, la oración compleja «Copérnico creía que las órbitas planetarias son circulares». Es obvio que la verdad de la oración en su totalidad no se vería alterada si a continuación de la conjunción «que» insertáramos alguna otra expresión diferente del mismo contenido de pensamiento. Pero el valor de verdad de la oración total no tendría necesariamente que seguir siendo el mismo si la expresión inserta tras la conjunción «que» sirviese de vehículo a un contenido de pensamiento diferente cuyo valor de verdad resultase casualmente ser el mismo que el de «las órbitas planetarias son circulares». Pues la verdad o la falsedad del enunciado acerca de Copérnico no depende de la verdad o la falsedad de lo que se diga que creía el astrónomo polaco, sino sólo del hecho de que éste creyera o dejara de creer lo designado por la cláusula subordinada, que sería según Frege un contenido de pensamiento.

---

10 Ibid.

11 Ibid., p. 35. Frege parece estar citando de memoria el comienzo del *Non Inelegans Specimen Demonstrandi in Abstractis*, donde Leibniz escribiría "Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate", *Philosophische Schriften* (ed. Gerhardt), VII, p. 228.

Hay que admitir, no obstante, que una expresión podría en determinadas circunstancias referirse a un valor de verdad no menos que a un contenido de pensamiento. Es lo que ocurriría si alguien dijera «Copérnico creía acertadamente que las órbitas planetarias son circulares»; pues, en un caso semejante, las palabras que siguen a la conjunción «que» vendrían a ser usadas por dos veces, la una como cláusula subordinada y la otra como una oración independiente. Y no sería ésta la única complicación de la doctrina. Pues si, como sostiene Frege, ningún nombre podría poseer referencia sin poseer sentido al mismo tiempo, hasta una cláusula subordinada que oficiara únicamente como tal tendría que expresar algo distinguible del contenido de pensamiento que designa; y nada hay en su doctrina que revele lo que ello pueda ser. Frege tal vez pasó por alto esta dificultad debido a que las cláusulas subordinadas del género considerado en este párrafo —esto es, cláusulas completivas— no aparecen para nada en las fórmulas lógicas de los *Grundgesetze*; pero, en cualquier caso, por el momento no necesitamos entrar en más detalles acerca de este punto.

Aunque Frege extendió la categoría de «nombre propio» hasta límites un tanto sorprendentes, no pretendía en modo alguno sostener que todos los signos fueran del mismo género. Por el contrario, insistió con energía en distinguir entre nombres propios y nombres o signos de funciones, entendiendo ahora por un signo funcional lo que anteriormente había llamado una función, esto es, una expresión «insaturada» o «incompleta» que cabría completar mediante uno o más nombres propios en orden a constituir un nuevo nombre propio. Así, los signos «( )²» y «el padre de...» son signos funcionales en que los huecos por rellenar se hallan indicados por medio de paréntesis vacíos y puntos suspensivos. Pero, para facilitar la exposición, Frege introduce en este estadio de su obra la convención de indicar aquellos huecos por medio de minúsculas griegas. A diferencia de las restantes letras de su lenguaje simbólico, tales minúsculas griegas no han de entenderse como abreviaturas o piezas de una notación destinada a expresar la universalidad sino sencillamente como indicadores de lugares vacíos, que se dejan abiertos a la inserción en su interior de genuinos signos argumentales. Así, tendríamos que escribir «tan ξ es una función trigonométrica» cuando estemos hablando de la función en tanto que distinta de sus valores, si bien podríamos escribir «tan $x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$» cuando deseemos decir que, para cualquier argumento, el valor de tan ξ es idéntico a la razón entre el valor de sen ξ y el valor de cos ξ para el mismo argumento. La finalidad del recurso a las minúsculas griegas no es otra que insistir en el carácter insaturado o incompleto de la función en sí misma considerada. Los matemáticos emplean el término «función» en ciertas ocasiones en que sería más apropiado hablar ya sea de un signo funcional, ya sea de un valor de una función. Mas las cosas simbolizadas no deben nunca confundirse con sus símbolos; y, de entre las cosas simbolizadas, las funciones no deben ser jamás confundidas con objetos. Pues, de acuerdo con Frege, los objetos incluyen toda suerte de cosas que no sean funciones, esto es, no sólo palos, piedras y hombres, sino asimismo números y valores de verdad. Si preguntamos qué es una función, Frege

responderá que su esencia radica en una cierta conexión o coordinación establecida entre los objetos que constituyen sus argumentos y los objetos que constituyen sus correspondientes valores. Pero, para las funciones cuyos valores son en su teoría valores de verdad, Frege reserva una terminología especial. Así, la función representada mediante el signo «ξ es un hombre» se describe a menudo como el concepto «hombre» o el concepto *Hombre*, y de la función con dos lugares argumentales representada mediante el signo «ξ es padre de ζ» se dice que es una relación.

Cuando Frege habla de una función en los escritos posteriores a su *Begriffsschrift* se refiere siempre a algo independiente de la actividad pensante y del lenguaje. En efecto, el término «concepto» no es para él en modo alguno un término psicológico; y, aunque no deja de ser cierto que introduce la noción general de función hablando para ello de signos funcionales, considera este procedimiento como un mero recurso expositivo. En diversas ocasiones, sin embargo, no tiene más remedio que admitir que tropieza con serias dificultades para expresar su pensamiento. Así, cuando nos dice por ejemplo:

«En las discusiones lógicas necesitamos a menudo formular aserciones acerca de conceptos, lo que expresamos —según es usual en este tipo de aserciones— presentando el contenido de nuestra formulación bajo la forma de un predicado gramatical. Ello podría llevarnos a esperar que la referencia del sujeto gramatical fuese el concepto del que tal predicado se asevera; pero al concepto en cuanto tal no le es dado jugar ese papel, en razón justamente de su índole predicativa; para poder desempeñar aquel oficio, tendría que ser transformado en un objeto o, para ser más exactos, tendría que ser representado por medio de un objeto» [12].

O, de igual manera, en este otro pasaje:

«Por una suerte de limitación del lenguaje, mis expresiones, literalmente tomadas, trabucan mi pensamiento: lo que yo miento es un objeto, cuando lo que deseaba mentar es un concepto... Alguien podría pensar que se trata de una dificultad artificialmente creada... y que cabría... considerar la inclusión de un objeto bajo un concepto como una relación en que una misma cosa pudiera presentarse ya sea como objeto, ya sea como concepto. Los términos 'objeto' y 'concepto' tan sólo servirían en dicho caso para indicar las diferentes posiciones ocupadas por esa cosa dentro de la relación. Cabría efectivamente enfocar la cuestión desde este punto de vista. Mas quienquiera que crea que con ello se ha disipado la dificultad se equivoca de medio a medio. Lo único que habríamos conseguido es trasladarla de lugar. Pues no todas las partes componentes de un contenido de pensamiento podrían ser completas por igual; al menos una de ellas habrá de ser insaturada o revestir carácter predicativo, ya que de lo contrario no habría modo de ensamblar a unas con otras... La dificultad que tratábamos de esquivar en lo referente al concepto vendría ahora a replantearse por lo que se refiere a nuestra relación» [13].

Algunas de estas observaciones acaso den idea de que la dificultad de que se habla es peculiar de ese género de funciones que llamamos conceptos o relaciones, pero Frege prosigue haciendo ver que asimismo obstaculiza cualquier intento de explicar con claridad la noción de función que se maneja en el análisis matemático. A la hora de ocuparnos de lo que por naturaleza es incompleto o insaturado [13'], nunca podremos evitar una cierta falta de propiedad en nuestro modo de expresarnos.

12 *Über Begriff und Gegenstand*, p. 197.
13 Ibid., pp. 204-5.
13' Compárese con la noción estoica de predicado como un *lektón* incompleto.

Un filósofo se sitúa en una posición un tanto incómoda cuando se ve obligado a reconocer la imposibilidad de expresar adecuadamente su pensamiento, y enseguida tendremos ocasión de decir que las tribulaciones de Frege a este respecto deben su origen a una grave insuficiencia de su teoría del lenguaje. Pero es interesante tomar nota de sus intentos por soslayar algunas de esas dificultades hablando para ello del curso o campo de valores (*Wertverlauf*) $\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$ de una función $\Phi(\xi)$ más bien que de esta última. En esta nueva notación, la vocal griega minúscula encerrada entre paréntesis indica como de costumbre un lugar argumental, mas la vocal correspondiente que figura con espíritu suave al comienzo de la expresión tiene por cometido hacer de ésta el nombre de un *objeto*. Por desgracia no es fácil entender lo que este objeto pueda ser. Cuando introdujo por vez primera la noción, Frege consideraba el caso de una simple función matemática como ξ^2—4ξ, apuntando que el modo como los diversos valores posibles de la misma se hallan asociados con sus diferentes argumentos posibles podría ser representado gráficamente por medio de una curva [14]. Dado que la función $\xi(\xi$—$4)$ posee siempre el mismo valor que ξ^2—4ξ para el mismo argumento, determinará obviamente la misma curva, y Frege anuncia su determinación de expresar esta circunstancia diciendo que ambas funciones poseen el mismo campo de valores. En líneas generales, y cualesquiera que $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ puedan ser, el enunciado de que $\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = \grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)$ ha de entenderse que posee la misma referencia que el enunciado de que $\overset{\frown}{—\mathfrak{a}—}\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$, aunque el primero de ellos sea el enunciado singular de una identidad entre dos objetos en tanto que el segundo es un enunciado universal destinado a expresar que, para todo argumento, el valor de una de las funciones es idéntico al de la otra. Parece natural concluir de semejante explanación que un campo de valores es, por así decirlo, la extensión de una función. Pues si concebimos a una función como algo que tiene por cometido establecer una correlación entre objetos —a saber, aquellos que constituyen sus argumentos y aquellos que constituyen sus valores—, tal vez podríamos concebir a la correlación establecida como un nuevo objeto: esto es, como un conjunto de pares ordenados. Ahora bien, Frege se sirve de hecho del vocablo «extensión» (*Umfang*) en este punto, pero no exactamente en el mismo sentido que se acaba de sugerir. Nos dice, por ejemplo, que en el caso de un concepto (esto es, de una función de un argumento cuyos valores todos son valores de verdad) el campo es la extensión en el sentido ordinario de los lógicos, esto es, el conjunto de todos los objetos incluidos bajo aquél. Y, para otras funciones, sería cuestión de indicar los campos apropiados en el momento de su introducción. En favor de este modo de proceder alega Frege el hecho de que el criterio básico para reconocer la identidad entre dos campos no basta por sí mismo para determinar de qué campo se trata. En consecuencia, hay que guardarse de atribuir un valor absoluto a la terminología de Frege. Cuando éste habla de fijar el campo de valores de una función, lo que especialmente le interesa es el hallazgo de un *objeto* que a ciertos efectos pueda representar a todas las funciones en posesión de los mismos valores para los mismos argumentos; y, dentro de los límites impuestos por esta condición, la elección de dicho objeto podría considerarse como asunto de mera conveniencia.

14 *Über Funktion und Begriff*, p. 9.

Cualquiera que pueda ser su índole, el objeto que Frege denomina un campo de valores no se ha de confundir con el conjunto de los valores que la función pueda tomar para diversos argumentos. Se desprende así del hecho de que un concepto únicamente admita por valores uno u otro de los valores de verdad, en tanto que su campo es, según Frege, el conjunto de los objetos incluidos bajo él. Y tampoco se debe confundir el campo de una función, tal y como lo entiende Frege, con el conjunto de todos los posibles argumentos que cabría insertar en el lugar argumental de un signo funcional. Pues, para Frege, *todo* objeto habría de merecer la consideración de un posible argumento de la función representada por el signo. Así, una oración como «2 es un hombre» poseería un sentido, y lo peor que se podría decir de ella es que designa lo falso. Frege llega incluso a sostener que una función matemática como $\xi+1$ habría de definirse de manera que tolerase argumentos otros que números. Por descontado, no puede por menos de reconocer que una expresión como «el sol+1» carecería de utilidad para cualquier propósito sensato, pero insiste en que en un lenguaje lógicamente perfecto tendríamos que proveerla de alguna referencia, ya que de lo contrario no habría modo de definir con precisión conceptos tales como $\xi+1=10$ y una ley lógica como el principio de tercio excluso dejaría de aplicarse a dichos casos en todo su rigor. Qué reglas sean las que hayan de arbitrarse con ocasión de semejantes casos extravagantes es un detalle comparativamente indiferente, pero lo cierto es que tendríamos que emplazarlos en algún limbo con el fin de asegurarnos de que nuestros conceptos se hallen bien definidos y todo nombre propio posea una referencia. Una interesante aplicación de este principio la constituye el tratamiento fregeano del signo introducido en sustitución del artículo definido del lenguaje ordinario.

Un uso importante del artículo definido es el que se destina a la construcción de descripciones como «el hombre que descubrió la elipticidad de las órbitas planetarias», y ese uso es justamente el que a Frege le interesa. En su teoría del sentido y la referencia, Frege ya había reconocido que el uso de una tal expresión presupone la existencia de una cosa, y sólo una, incluida bajo un cierto concepto, pero sigue rehusándose a decir que el usuario de la misma se halle obligado a la aserción de semejante presuposición. Ahora bien, para su propósito no basta con alegar que una expresión que oficia a título de nombre propio solamente posee referencia cuando hay una única cosa que se incluya bajo un cierto concepto, lo que le lleva a introducir una función $\backslash\xi$ definida en virtud de las siguientes estipulaciones: (I) para cualquier argumento que se identifique con un campo de valores $\grave{\epsilon}(\epsilon = \Delta)$ donde Δ sea algún objeto, el valor de la función será Δ; (II) para cualquier argumento que no satisfaga dicha condición, el valor de la función será precisamente el argumento. De estos dos casos, es el primero el que corresponde al uso ordinario del artículo definido. Pues supongamos que $\Phi(\xi)$ sea un concepto bajo el que se incluye un objeto Δ y sólo un objeto. En ese caso, el valor de $\Phi(\xi)$ para cualquier argumento será obviamente el mismo que el valor de la función $\xi = \Delta$ para idéntico argumento. Pero esto nos autoriza a decir que $\grave{\alpha}\,\Phi(\alpha) = \grave{\epsilon}\,(\epsilon = \Delta)$ con lo que obtendríamos el resultado deseado: $\backslash\grave{\alpha}\,\Phi(\alpha) = \backslash\grave{\epsilon}\,(\epsilon = \Delta) = \Delta$, esto es, $\backslash\grave{\alpha}\,\Phi(\alpha)$ sería el único miembro de $\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$ si esta última fuera lo que los lógicos posteriores han llamado una clase unitaria. En orden a preser-

var la vigencia del principio de tercio excluso es menester, no obstante, proveer a «$\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$» de alguna referencia para el caso en que $\Phi(\xi)$ no sea una función bajo la que se incluya un objeto y sólo uno, y éste es el cometido de la segunda estipulación. Pues ya que *ex hypothesi* no hay ningún Δ tal que $\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = \grave{\epsilon}(\epsilon = \Delta)$, tendríamos que $\backslash\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = \grave{\alpha}\Phi(\alpha)$. Así, si nuestra lengua castellana se viese reformada con la legislación a que somete Frege su lenguaje simbólico, quienquiera que afirmase «El rey de Francia es calvo» podría ser acusado de formular un enunciado falso. Pues, aunque *no* quepa decir que su afirmación comporte la aserción de que hay un rey de Francia y sólo uno, cabría imputarle haber afirmado algo que en las presentes circunstancias políticas de Francia equivaldría a «La clase de los reyes de Francia es calva»; y esta última afirmación (que, por supuesto, no debe confundirse con «Los reyes de Francia son calvos») sería evidentemente falsa para Frege, haya o no reyes de Francia.

3. La lógica de los *Grundgesetze*.

Tras de una minuciosa exposición de la noción de función en toda su generalidad, Frege hace de ella un pilar básico de su caracterización de la lógica. El programa de su última gran obra comporta asimismo la reinterpretación, desde esta perspectiva, de algunos de los signos introducidos en su *Begriffsschrift*. El trazo judicativo o de aserción no podrá ser considerado como un signo funcional de acuerdo con las actuales concepciones de Frege, ya que no cabe interpretarlo por más tiempo como una abreviatura del predicado «es un hecho». Aparte de ello, existen otras razones para reputarlo de extraño al cuerpo de la lógica, ya que su cometido no es otro que indicar lo que asevera su usuario; pero la lógica no se ocupa para nada de aserciones, sino sólo de aquello sobre lo que estas últimas pudieran recaer. La gramática del sistema requiere, sin embargo, que el trazo judicativo vaya seguido de una raya horizontal como la que antes recibía la denominación de trazo de contenido. Y este segundo trazo sí constituye ciertamente un signo funcional. Pues cuando su argumento sea lo Verdadero, $\text{———}\xi$ tendrá a lo Verdadero por valor, siendo lo Falso su valor en los restantes casos. Así, «$\text{——}2+2=4$» no será propiamente hablando un enunciado, sino más bien un nombre de lo Verdadero, y «$\text{——}2+2=5$» y «$\text{——}2$» serán a su vez ambos dos nombres de lo Falso. Este último ejemplo tal vez resulte un tanto desconcertante, pero en él se ha de ver una aplicación más del principio fregeano según el cual cualquier objeto habrá de ser potencialmente considerado como un argumento de cualquier función si es gramaticalmente posible la inserción de su nombre en el lugar argumental de un signo funcional. El propio Frege no habla en este punto de posibilidad gramatical, mas la necesidad de tal noción se echa de ver cuando pasamos a considerar los dos signos funcionales que intervienen a continuación en la construcción de su sistema, a saber, los trazos de negación y condición. Ambos revisten la peculiaridad de no poderse dar sino formando cuerpo con las correspondientes rayas horizontales, por lo que las funciones por ellos representadas únicamente admitirán valores de verdad por argumentos. Ya que dichas funciones poseen también valores de verdad por valores propios, expresarán, por así decirlo, correlaciones de valores de verdad a valores de verdad, tal y

como la función ξ^2 expresa una correlación de números a números. Y esta es la razón de que los lógicos posteriores las hayan bautizado como funciones veritativas. En cambio, $\xi = \zeta$ es una función que podría tomar por argumentos cualquier clase de objetos.

Hasta aquí sólo hemos mencionado funciones que admiten uno o más objetos por argumentos, mas Frege reconoce la posibilidad de funciones de segundo grado *, o funciones de funciones, citando como ejemplos de las mismas las funciones $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\phi(\mathfrak{a})$ y $\grave{\epsilon}\phi(\epsilon)$. Se observará que, al nombrar tales funciones, se indica su lugar argumental mediante una minúscula griega extraída de aquella parte del alfabeto usualmente utilizada como arsenal de abreviaturas de signos funcionales. Otro ejemplo de función de segundo grado podría ser la función $-\!\!\top\!\!-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\!\!\top\!\!-\phi(\mathfrak{a})$, a la que a veces se da el nombre de existencia aunque sería más apropiado denominarla posesión de un ejemplo o posibilidad de tener a lo Verdadero por valor para algún argumento. Ya en sus *Grundlagen* había apuntado Frege que el argumento ontológico en pro de la existencia de Dios era falaz por confundir un concepto de segundo grado con un concepto de primer grado que pudiera incluirse como nota en algún otro concepto de primer grado [15]. En orden a apreciar el acierto de esta crítica sólo necesitamos recordar el intento cartesiano de demostrar la existencia de Dios haciendo ver que la divinidad implica la existencia tal y como la triangularidad implica que los ángulos internos del triángulo sumen dos rectos.

Pero no fue sino en sus *Grundgesetze* cuando Frege pergeñó una notación que le hubiera de permitir hablar en general acerca de funciones de segundo grado. Así, escribiría

$$\text{«}\vdash\!\!\begin{array}{l} \text{———}M_\beta(f(\beta))\text{»} \\ \llcorner\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\text{—}M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \end{array}$$

para representar «Toda función de segundo grado que se aplique a todas las funciones de primer grado con un argumento se aplicará a cualquier función de primer grado con un argumento». Como se habrá pensado, la fórmula se corresponde con el axioma

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \text{———}f(c) \\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\text{—}f(\mathfrak{a}) \end{array}$$

que Frege establecía en su *Begriffsschrift* para las funciones de primer grado, si bien su expresión resulta algo más complicada por tener que dar cabida no sólo a la distinción entre funciones de acuerdo con su grado sino asimismo a su distinción por relación al número de sus argumentos. La

* *Functions of second level* en el original inglés, *Functionen zweiter Stufe* en el texto fregeano de los *Grundgesetze*. En las *Grundlagen* Frege había hablado de "funciones de segundo orden" *(zweiter Ordnung)* en un sentido obviamente similar, pero la traducción por "funciones de segundo grado" parece, en cualquier caso, preferible a los efectos de preservar la posibilidad de hablar de "funciones homograduadas" *(gleichstufige)* y "funciones heterograduadas" *(ungleichstufige)*, esto es, funciones de más de un argumento del mismo o de distinto grado. La traducción de *Stufe* por "nivel" pudiera, en cambio, hacer pensar que la distinción entre funciones de primero y segundo grado corre paralela de la distinción entre lenguaje y metalenguaje, o teoría y metateoría, razón por la que aquí nos abstenemos de recurrir a ella. *(N. del T.)*

15 *Gl.*, § 53.

minúscula griega de los paréntesis internos sirve, como de costumbre, para indicar un lugar argumental, siendo aquí importante su presencia por indicar también que las funciones de primer grado susceptibles de actuar como argumentos son a su vez funciones de un único argumento. La mayúscula itálica «*M*» es una variable libre cuya misión es indicarnos que estamos hablando de funciones de segundo grado, y la minúscula griega que la acompaña como subíndice nos recuerda que las funciones en cuestión se aplican a funciones de primer grado de un argumento. Si deseáramos generalizar acerca de propiedades de segundo grado (tales como la transitividad) que hubieran de pertenecer en exclusiva a relaciones diádicas (esto es, a funciones de dos argumentos cuyos valores sean siempre valores de verdad), tendríamos que insertar dos minúsculas griegas en los paréntesis internos y adosar asimismo dos subíndices a la mayúscula itálica. Y no se agota aquí la gama de complejidades a que podría dar lugar nuestra consideración de las funciones de funciones. Pues cabría considerar a

$$-\overset{\mathfrak{f}}{\smile}-\mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$$

y

$$-\overset{\mathfrak{f}}{\smile}-\mu_{\beta,\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))$$

como funciones de tercer grado, pasando a elaborar una notación que nos permita hablar acerca de ellas. Y hasta podría pensarse en funciones de grado mixto tales como la de hallarse incluido bajo un concepto. Frege toma nota de dichas posibilidades pero no entra a examinarlas en detalle. Parece estar en claro que no se sentía cómodo con las complicaciones simbólicas envueltas ya al nivel de la formulación de enunciados universales acerca de funciones de segundo grado de funciones de primer grado de un argumento. Pues sólo en una ocasión se sirve del axioma especial antes citado, congratulándose de haberse podido zafar de aquellas complicaciones al serle dado hablar de campos de valores en vez de las funciones que los determinan [16].

El recurso a campos de valores constituye para Frege la más importante de las innovaciones introducidas en sus *Grundgesetze,* puesto que habría de permitirle prescindir de la engorrosa notación destinada a expresar funciones de diverso grado y referir así a objetos todo cuanto tuviera que decir acerca de estas últimas [17]. Cierto es que la mayor parte de los objetos a los que Frege se refiere no son objetos perceptibles, pero —a diferencia de las funciones— todos ellos serán, en cualquier caso, entidades *completas;* y, por añadidura, la creencia de que no hay otros objetos que aquellos que se pueden ver o tocar no es para Frege sino una flaqueza de nuestra condición carnal humana.

En orden a obtener el mayor partido posible de su notación en términos de campos de valores, Frege juzga precisa, no obstante, la introducción de otra función mediante la definición siguiente:

$$«\Vdash\backslash\grave{\alpha}\left(\begin{array}{l}-\overset{\mathfrak{g}}{\smile}-\mathfrak{g}(a)=\alpha\\ \qquad\quad\ \ u=\grave{\epsilon}\mathfrak{g}(\epsilon)\end{array}\right)=a\cap u.»$$

Como sucede siempre con las definiciones fregeanas, el *definiendum* figura

16 *Gg.*, I, § 25.
17 *Gg.*, I, §§ 9 y 25.

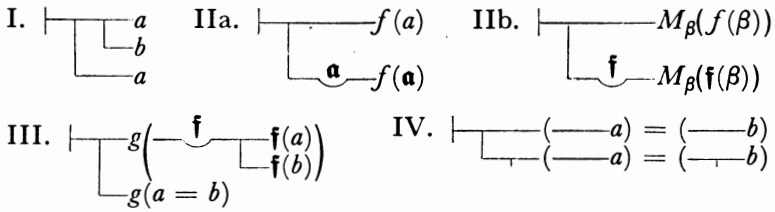
aquí a la derecha; y, dado que se trata de un signo funcional con dos lugares argumentales, se halla representado por medio de dos letras itálicas que asimismo aparecen en el miembro izquierdo de la fórmula. Para decirlo en llana prosa, el cometido de la definición es asegurar (I) que, para cualquier objeto Δ y cualquier función $\Phi(\xi)$, la expresión «$\Delta \cap \grave{\varepsilon}\, \Phi(\varepsilon)$» tenga la misma referencia que «$\Phi(\Delta)$»; y (II) que, para cualquier objeto Δ y cualquier objeto Γ que no constituya un campo de valores, la expresión $\Delta \cap \Gamma$ sirva para nombrar la clase nula. Así pues, si dejamos a un lado la segunda de estas dos estipulaciones, que no es sino un arbitrio tendente a permitir el tratamiento de casos marginales, la expresión «$\xi \cap \zeta$» vendría a corresponderse estrechamente con la expresión «ξ es un miembro de ζ». Pero hemos de cuidar de no identificarlas, dado que en el esquema de Frege la función $\Phi(\xi)$ no necesitaría ser un concepto. Podría tratarse, por ejemplo, de la función numérica ξ^2, en cuyo caso $3 \cap (\varepsilon^2) = 3^2$. O, de nuevo, pudiera ser la función $\grave{\varepsilon}\ (\xi > \varepsilon)$ cuyos valores son ellos mismos campos de valores, en cuyo caso uno de los argumentos de la nueva función tendría que ser un *doble* campo de valores, digamos $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\ (\alpha > \varepsilon)$. El segundo de estos ejemplos reviste especial importancia por servirse en él Frege de su nueva notación con el fin de expresar relaciones. Pues tendríamos

y, de este modo,
$$3 \cap \grave{\alpha}\grave{\epsilon}(\alpha > \epsilon) = \grave{\epsilon}(3 > \epsilon)$$
$$2 \cap (3 \cap \grave{\alpha}\grave{\epsilon}(\alpha > \epsilon)) = 2 \cap \grave{\epsilon}(3 > \epsilon)$$
$$= 3 > 2.$$

Obviamente no hay mucho que ganar con este modo de expresarse cuando se trate de casos tan sencillos como los que hemos elegido a título de ilustración, pero la posibilidad de acudir a él simplifica extraordinariamente las cosas en todos aquellos casos en que, alternativamente, habría que recurrir a aplicar cuantificadores a relaciones funcionales de grado superior, razón por la que Frege lo utiliza profusamente en el ulterior desarrollo de su sistema.

Para nuestro propósito actual no es necesario detenernos en una prolija consideración del edificio levantado por Frege sobre la base de los elementos que acabamos de describir, pero los axiomas y reglas de que se vale para la formulación de la lógica de sus *Grundgesetze* merecen atención especial.

A título de axiomas o leyes básicas presenta Frege ahora las siete siguientes aserciones[18]:



$$\text{V.}\ \vdash (\grave{\epsilon} f(\epsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = (\text{—}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\text{—} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$

$$\text{VI.}\ \vdash a = \backslash\grave{\epsilon}(a = \epsilon)$$

[18] Ibid., I, § 47.

Se apreciará que —aparte del trazo horizontal, requerido para la expresión de cualquier aserción en el lenguaje simbólico de Frege— a cada uno de los signos básicos introducidos le corresponde un axioma específicamente destinado a la determinación de su uso, ajustándose dicha introducción a un orden de creciente complejidad. Así, el axioma IV aparece donde lo hace porque Frege considera oportuno fijar el significado de su trazo de negación con la ayuda del signo de identidad introducido en el axioma III. Pero, en cualquier caso, no concede demasiada importancia a la ordenación de sus axiomas, y el único de ellos que es objeto de un comentario medianamente extenso es el axioma V. Frege opina de él que hay que aceptarlo como una ley lógica independiente por resultar esencial para el desarrollo de su sistema y no caber la posibilidad de derivarlo de ninguna de las restantes leyes básicas. Cuandoquiera que los lógicos hablan de extensiones de conceptos lo están presuponiendo aun si no son conscientes de ello. Y en rigor es fundamental para cualquier intento de construir un cálculo lógico a la manera de Leibniz o Boole, revistiendo análoga importancia para la fundamentación de la aritmética, ya que los números de todo tipo —incluidos los números naturales— se habrán de definir como extensiones de conceptos [19].

Aparte de la atención prestada en ellos a las funciones, el conjunto de axiomas de los *Grundgesetze* difiere del de la *Begriffsschrift* por no contar con la regla correspondiente al *modus ponens* y el principio de sustitución como únicas reglas de inferencia. Por razones de brevedad y conveniencia práctica a la hora de efectuar las deducciones necesarias, Frege reemplaza en este punto algunos de sus axiomas e incluso teoremas primitivos por nuevas reglas de inferencia. Pero presenta a estas últimas como piezas de una colección general de reglas para el uso de su lenguaje simbólico. Con el fin de hacernos una idea de la precisión de su modo de proceder, vamos a ofrecer en lo que sigue un compendio de todas ellas, excepción hecha de las seis últimas que no son sino convenciones relativas al uso de paréntesis [20]. El término «enunciado» se referirá siempre en él a un enunciado del sistema (esto es, un axioma o un teorema derivado a partir de uno o más axiomas), las expresiones «cláusula inferior» y «cláusula superior» se referirán respectivamente a una condición y a lo por ella condicionado, y la expresión «esquema itálico» se referirá por último a una expresión que contenga una o más letras itálicas y pueda convertirse en un nombre (de un objeto o de una función, según los casos) mediante las oportunas sustituciones de esas letras.

1. *Amalgamación de trazos horizontales.* Los trazos horizontales que acompañan al trazo de negación, al trazo de condición y al cuantificador universal pueden amalgamarse entre sí o con cualquier trazo horizontal simple que se halle situado en la misma línea.

2. *Reordenación de condiciones.* El orden de las cláusulas inferiores de un enunciado puede ser cambiado a voluntad.

3. *Contraposición.* Una cláusula inferior y una cláusula superior pueden ser siempre mutuamente intercambiadas si sus valores de verdad se modifican simultáneamente (a saber, mediante su negación).

---

19 Ibid., I, § 9.
20 Ibid., I, § 48.

4. *Amalgamación de condiciones similares.* Una cláusula inferior que aparezca varias veces en el mismo enunciado no necesita ser escrita más que una sola vez.

5. *Cambio de una letra itálica por una gótica.* Una letra itálica podrá ser reemplazada a todo lo largo del enunciado en que intervenga por una y la misma letra gótica —esto es, por una letra de objeto si se trata de una letra de objeto y por una letra de función si se trata de una letra de función—, siempre que la letra gótica en cuestión sea insertada al mismo tiempo en la concavidad que preceda a una cláusula superior fuera de la cual no intervenga la letra itálica sustituida.

6. *Inferencia* (*a*). Si un enunciado posee una cláusula inferior que no difiera de otro enunciado sino por la ausencia del trazo judicativo, podremos aseverar como conclusión el enunciado que resulta del primero al serle suprimida aquella cláusula inferior.

7. *Inferencia* (*b*). Si una misma disposición de signos (ya sea que se trate de un nombre propio o de un esquema itálico de objeto) interviene en un enunciado como cláusula superior y lo hace en otro como cláusula inferior, podremos aseverar como conclusión el enunciado que tenga por cláusula superior la cláusula superior del segundo de aquellos enunciados y por cláusulas inferiores todas las cláusulas inferiores de ambos con excepción de la anteriormente mencionada. En el curso de la inferencia, las cláusulas inferiores que resulten similares podrán ser amalgamadas de acuerdo con la regla (4).

8. *Inferencia* (*c*). Si dos enunciados poseen la misma cláusula superior y una cláusula inferior de uno de ellos sólo difiere de una cláusula inferior del otro por llevar prefijado un trazo de negación, podremos aseverar como conclusión el enunciado que tenga por cláusula superior la cláusula superior de ambos y por cláusulas inferiores todas las cláusulas inferiores de ambos con excepción de la dos mencionadas con anterioridad.

9. *Reproducción de enunciados con sustitución de letras itálicas.* Al reproducir un enunciado podremos realizar una inferencia sustituyendo a todo lo largo de él cualquier letra itálica de objeto por el mismo nombre propio o esquema itálico de objeto o bien sustituyendo cualquier letra itálica de función por el mismo nombre o esquema itálico de función, siempre que en este último caso se preserve el grado y el número de argumentos de la función a que aludía la letra itálica de función originaria.

10. *Reproducción de enunciados con reemplazamiento de letras góticas.* Al reproducir un enunciado podremos reemplazar una letra gótica que figure inserta en una concavidad y en todos los lugares argumentales de la función conexa por una letra gótica del mismo género (esto es, una letra de objeto o de función, según sea el caso), siempre que al hacerlo así no se vea afectada la distinción de las letras del enunciado originario cuandoquiera que el alcance de una letra abarque en éste al de otra y la primera de esas letras haga acto de presencia por su parte en el alcance de la segunda.

11. *Reproducción de enunciados con reemplazamiento de vocales griegas.* Al reproducir un enunciado podremos reemplazar una vocal griega que figure inserta bajo un espíritu suave y en todos los lugares argumentales de la función conexa por otra vocal griega, hallándose sujeto este reemplazamiento a las mismas restricciones de la regla precedente.

12. *Reproducción de definiciones.* Al reproducir una definición, podremos reemplazar el trazo de definición por el trazo judicativo, así como llevar a cabo todas las modificaciones permitidas en la reproducción de enunciados de acuerdo con las tres últimas reglas.

Según Frege, todas las verdades de la aritmética podrían ser derivadas a partir de sus axiomas mediante aplicaciones de las reglas que acaban de citarse. Pero es obvio que la aritmética se ocupa de nociones, en particular la de número, para las que no contamos con expresiones simples entre

sus signos básicos. En consecuencia, es esencial para el éxito de su programa que esas nociones puedan ser definidas por medio de complejos de aquellos signos básicos. Y, en orden a facilitar la exposición, podría ser conveniente proceder a construir una serie de definiciones en la que cada una de sus piezas presuponga la anterior. Es bien sabido, sin embargo, que la formulación de definiciones se halla expuesta al riesgo de falacias en no menor medida que la ejecución de inferencias. Y eso lleva a Frege a prevenirnos del peligro con el rigor que le caracteriza, sentando a tal efecto siete principios que han de ser observados cuandoquiera que en su sistema se introduzcan expresiones de nuevo cuño por medio de definiciones [21]. Tres de dichos principios son de carácter general, en tanto que los cuatro restantes se refieren a varios casos especiales de su propio sistema. He aquí un resumen de los mismos:

1. Todo nombre correctamente construido valiéndonos para ello de nombres previamente definidos ha de poseer alguna referencia, ya que en caso contrario quedaría en el aire la cuestión de la aplicabilidad de tales signos.

2. Un mismo signo no debe definirse de dos maneras diferentes, ya que en ese caso podría surgir la duda acerca de si ambas definiciones coinciden entre sí.

3. Un nombre a definir ha de ser simple, esto es, no ha de componerse de otros nombres, ya que en caso contrario podría surgir la duda acerca de si las definiciones correspondientes a estos últimos concuerdan con la del primero.

4. Un nombre propio introducido por definición ha de ser reemplazable en todos los casos en que hagamos uso de él por el *definiens* y nunca debe ser usado como el nombre de una función, ya que en tal caso no cabría volver a usarlo a título de nombre propio.

5. Un nombre introducido para designar una función de primer grado de un argumento sólo ha de contener un único lugar argumental, ya que, si contuviera varios lugares argumentales, cabría también la posibilidad de rellenar de varios modos a estos últimos, con el resultado de que el nombre pasaría a designar una función de varios argumentos. En la definición, todos los lugares argumentales del *definiens* han de ser rellenados mediante una y la misma letra itálica, que se usará también para indicar el lugar argumental del *definiendum*.

6. De modo semejante, un nombre introducido para designar una función de primer grado de dos argumentos ha de contener dos, y sólo dos, lugares argumentales. En la definición, todos los lugares argumentales del *definiens* conectados entre sí han de ser rellenados mediante una y la misma letra itálica, que se usará también para indicar uno de los dos lugares argumentales del *definiendum*; y los lugares argumentales que no se hallen conectados de tal suerte se habrán de rellenar mediante letras diferentes.

7. Se sigue de todo ello que una definición no debe nunca hacer aparecer a uno de los lados de una letra itálica nada que no aparezca igualmente al otro lado de la misma. Si la sustitución de itálicas por nombres propios en el *definiens* convirtiera a este último en un nombre propio correctamente construido, el nombre de función que hubiese de oficiar de *definiendum* tendría que poseer siempre, de acuerdo con las convenciones del sistema, alguna referencia.

4. Balance de la contribución de Frege.

La *Begriffsschrift* de Frege constituye el primer sistema realmente acabado de la lógica formal. Aristóteles se interesó principalmente por ciertas variedades muy comunes de proposiciones generales. Es cierto que llegó

[21] Ibid., I, § 33.

a formular principios que, como los de no-contradicción y tercio excluso, corresponden a un apartado de la lógica más básico y fundamental que su teoría del silogismo; mas no supo apreciar la necesidad de un tratamiento sistemático de la lógica primaria. Crisipo se ocupó, al menos parcialmente, de sistematizar esta última; pero ni él ni los lógicos medievales que cultivaron la teoría de las *consequentiae* acertaron a ofrecer una caracterización satisfactoria de la relación de dependencia que liga con la lógica primaria a la lógica general. Leibniz y Boole, conscientes del paralelismo existente entre la lógica primaria y ciertas proposiciones de la lógica general relativas a clases o atributos, elaboraron un cálculo abstracto que parecía abarcar a ambos apartados; pero ninguno de los dos logró superar la concepción tradicional de la lógica de suerte que cupiese incluir en ella a la teoría de las relaciones. Partiendo de algunas sugerencias de De Morgan, Peirce exploró este nuevo territorio, logrando formular —poco después de la publicación de la *Begriffsschrift* y con independencia de esta última— una doctrina de las funciones en la que se hacía uso de una notación capaz de permitirnos la expresión de todos los principios establecidos por Frege; pero nunca expuso sus ideas sistemáticamente ni presentó un conjunto de principios básicos como el reproducido en nuestra última sección. La obra de Frege, en cambio, encierra todos los elementos esenciales de la lógica moderna, por lo que no sería injusto para con los lógicos anteriores o posteriores a él considerar al año 1879, en que apareció su *Begriffsschrift,* como la fecha más trascendental de toda la historia de la lógica.

De todas las novedades introducidas por Frege, el empleo de cuantificadores es la más importante. Aquí ya se ha llamado la atención sobre la significación de este adelanto cuando pasábamos revista a las aportaciones lógicas de Peirce, pero no es ocioso recalcar una vez más en este punto que el empleo de cuantificadores para ligar variables es el más sobresaliente de los recursos distintivos del simbolismo lógico moderno, que debe a aquél su superioridad no sólo sobre el lenguaje ordinario sino asimismo sobre el simbolismo de tipo algebraico utilizado por un Boole. Gracias a él, se hace por fin posible abordar y reducir a un esquema a la vez simple y comprensivo un cúmulo de arduas complicaciones que turbaron a los lógicos del pasado y que sólo pudieron ser resueltas, si de algún modo, por medio de teorías *ad hoc* como las de los argumentos *κατὰ πρόσληψιν*, las modalidades *de re* y *de dicto,* la *suppositio personalis confusa et distributiva singulata* y muchas otras variedades de *suppositio,* el símbolo *v* de Boole o el álgebra de relativos. Más aún, incluso la teoría supuestamente elemental de los cuatro géneros de enunciados categóricos se torna más fácilmente inteligible una vez comprobado que, cualquier cosa que sea lo que además de ello pudiera comportar, el enunciado «Todo hombre es mortal» implica la clausura universal de la expresión funcional «si *x* es un hombre, *x* es mortal». Y, aclarado este punto, la relación entre la lógica aristotélica y la de los estoicos se vuelve por vez primera transparente. En resumidas cuentas, pues, no sería exagerado calificar al empleo de cuantificadores para ligar variables como una de las grandes conquistas intelectuales del siglo diecinueve.

Con la posible excepción de sus *Grundlagen,* las obras de Frege nunca llegaron a alcanzar una amplia difusión. Sin duda más de uno de cuantos

se acercaron a ellas retrocedió asustado al enfrentarse con su simbolismo. Lord Russell, por ejemplo, confiesa que ésta fue la razón de que, en su primer contacto con el volumen I de los *Grundgesetze,* no llegara a calibrar su importancia ni tan siquiera a hacerse idea de su contenido [22]. Pero la prohibitiva apariencia de su lenguaje simbólico no puede ser la única razón, ni acaso sea la principal, de la demora de los lógicos en reconocer los grandes méritos de Frege. La verdad del caso parece residir más bien en el hecho de que su obra presentaba de golpe demasiadas novedades de difícil asimilación, en tanto que su autor hacía escasas concesiones a la debilidad humana. La mayor parte del texto alemán de sus escritos lógicos es de una relativa nitidez, pero la exposición de los puntos de vista propios resulta —en contraste con sus críticas de los puntos de vista ajenos— excesivamente condensada, lo que a un lector poco propicio pudiera producirle la impresión de que Frege era muy exigente en lo que se refiere al uso del lenguaje por parte de otros autores pero curiosamente insensible para con los quebraderos de cabeza suscitados por sus propias declaraciones acerca de materias tales como valores de verdad, funciones o campos de valores. Y, como a otros innovadores en el dominio de la lógica, se le ha considerado con frecuencia como un cultivador de inútiles sutilezas. Pero con esto no está dicho, sin embargo, que su obra haya carecido de influencia. Por el contrario, sus escritos constituyen una mina de la que los continuadores de su empresa han ido extrayendo nuevo material en sucesivas etapas.

Cuando se hallaba rematando sus *Principles of Mathematics* (cuyo primero y único volumen fue publicado en 1903), Lord Russell reestudió con mayor detenimiento la «lógica de Frege», añadiendo un apéndice a su libro que quizá constituya la primera reseña de alguna envergadura de la obra de nuestro autor —desde la *Begriffsschrift* hasta el primer volumen de los *Grundgesetze*— redactada desde una posición afín. En el volumen I de los *Principia Mathematica,* publicado por A. N. Whitehead y B. Russell en 1910, el influjo de Frege es manifiesto; e incluso aquellas doctrinas de Russell en las que éste se muestra en desacuerdo con Frege (como es el caso, por ejemplo, de su teoría de las descripciones y su teoría de los tipos) fueron al menos sugeridas por dificultades planteadas en la obra de aquel último. Poco después, Ludwig Wittgenstein se convertiría en su admirador, con los resultados que pueden apreciarse en diversos pasajes de su *Tractatus Logico-Philosophicus* (publicado por vez primera en 1921, bajo forma de artículo, en los *Annalen der Naturphilosophie* de Ostwald). Y todavía recientemente la doctrina fregeana del sentido y la referencia, tenida durante muchos años como el apartado menos aprovechable de la obra de Frege, ha sido positivamente reconsiderado por parte de Rudolf Carnap [23] y Alonzo Church [24].

No parece sino que los lógicos no hayan podido reconocer el valor de las ideas de Frege hasta haber sido capaces de enfrentarse con los problemas surgidos de esta última. Con ello no queremos decir que la historia de la lógica a lo largo del siglo xx se reduzca a registrar la gradual

22 *Principles of Matnematics,* p. VI.
23 *Meaning and Necessity,* especialmente § 8 y §§ 28-30.
24 *Introduction to Mathematical Logic,* vol. I, §§ 01-04.

incorporación de su obra a un cuerpo de doctrina de universal aceptación; pues, en efecto, ha habido en nuestro siglo descubrimientos muy importantes que Frege ni siquiera pudo soñar alguna vez. Mas su contribución a la lógica fue tan grande que el mejor modo de pasar revista a buena parte de cuanto haya podido hacerse tras de él consistiría en ponerlo en relación con su propia obra.

En el próximo capítulo tomaremos en consideración los desarrollos formales que han tenido lugar en el dominio de la lógica con posterioridad a la época de Frege, inaugurando cada uno de sus diversos apartados con un breve repaso de su posición al respecto. A continuación pasaremos a examinar algunos problemas de filosofía de la lógica, en especial los relativos al sentido y la referencia, nacidos todos ellos más o menos directamente de su obra. Y en un tercer capítulo reemprenderemos la historia de la filosofía de la matemática, partiendo para ello de la publicación del segundo volumen de los *Grundgesetze* con su *Nachwort* acerca del descubrimiento por Russell de una contradicción en el sistema de Frege.

IX. DESARROLLOS FORMALES POSTERIORES A FREGE

1. El simbolismo y sus variedades.

Los detalles del aparato técnico inventado por Frege para la presentación de la lógica son extremadamente ingeniosos. Hay que reconocer que el manejo de su lenguaje simbólico es enfadoso, pero el empleo de diferentes tipos de letras le permite distinguir unos de otros los diferentes cometidos que esas letras desempeñan, cometidos que con frecuencia se confunden bajo la equívoca denominación técnica de «variable». Y su insistencia en la distinción entre el uso y la mención de los símbolos es de todo punto admirable. En esta sección nos vamos a ocupar de las innovaciones introducidas desde sus días a los nuestros con el fin de hacer ganar al simbolismo en sencillez y claridad, para lo que será conveniente comenzar con los problemas planteados por el entrecomillado de los símbolos.

Aunque el propósito de Frege al elaborar su lenguaje simbólico era ofrecer un *sustituto* del lenguaje ordinario para la presentación de la matemática, el caso es que se vio obligado a introducirlo valiéndose al efecto del lenguaje ordinario, por lo que en esta fase no dudaba en tratar al primero como un *suplemento* del segundo. Es decir, así como los químicos combinan sus signos especiales con palabras de su lengua materna, de la misma manera Frege presenta a menudo oraciones en las que se hace *uso* de signos especiales en combinación con palabras alemanas. Cuando lo que, por el contrario, le interesa es la *mención* de dichos signos especiales en el seno de una oración en alemán, Frege los reproduce entre comillas, tal y como lo haría con los propios vocablos alemanes cuando lo que desea es hablar acerca de los mismos. Se trata de la práctica que, para no desfigurar una impresión correcta de su obra, hemos seguido a todo lo largo de nuestra exposición de su lógica en el capítulo precedente. Sería un error, no obstante, suponer que el recurso al entrecomillado sea el único modo, ni tan siquiera el mejor modo, de evitar la confusión entre el uso y la mención de aquellos símbolos especiales. Un procedimiento más simple consistiría en renunciar desde un comienzo a todo empleo del simbolismo especial con vistas a suplementar el lenguaje ordinario, estipulando de este modo que cuandoquiera que los símbolos especiales hagan su aparición habremos de considerarlos como si fueran entrecomillados. Los tratadistas de lenguas clásicas adoptan comúnmente este modo de proceder al examinar las palabras que aparecen en un texto clásico (aunque a veces se permitan *usar* palabras griegas o latinas, tal y como nosotros hemos hecho en anteriores capítulos cuando no había auténtica posibilidad de confusión); y un ejemplo de su aplicación en el dominio de la lógica —muy similar a la propia práctica de Boole— puede encontrarse en nuestra sección sobre el Algebra de la Lógica. En todos estos casos podrá servir de ayuda el que los signos sometidos a discusión se distingan tipográficamente de los del lenguaje ordinario, como cuando las letras del simbolismo especial se hallan impresas en itálicas. Mas la mayor sim-

plicidad de este recurso se ha de pagar al precio de tener que echar mano de circunloquios en ciertos casos en que el procedimiento de Frege resultaría más natural. Así, en lugar de decir «$a+b$ es la clase que tiene por miembros a todas las cosas que son miembros de la clase a o de la clase b» tendríamos que decir «$a+b$ designa la clase que tiene por miembros a todas las cosas que son miembros de la clase designada por a o de la clase designada por b». La elección entre ambos procedimientos es, en definitiva, cuestión de gustos. En lo que sigue de este libro nos atendremos a la práctica de nuestra sección sobre el Algebra de la Lógica más bien que a la de Frege, por resultar aquélla más económica para nuestros propósitos. Pero, en un intento de recoger lo mejor de una y otra, nos permitiremos de vez en cuando combinar palabras castellanas ordinarias con signos lógicos especiales; y, cuando lo hagamos así, imprimiremos las palabras castellanas en itálicas para indicar que se hallan eventualmente emparejadas al lenguaje simbólico de que se trate.

El empleo de letras de una tipografía especial al que Frege recurre para la exposición de las reglas básicas de su sistema constituye un recurso sumamente útil del que todos los lógicos podrían beneficiarse, cualesquiera que sean sus opiniones acerca del entrecomillado. Así, cuando Frege escribe por ejemplo

«De los dos enunciados '$\vdash \Gamma$' y '$\vdash \Delta$' podemos derivar el enunciado '$\vdash \Gamma$'.»[1],

las letras empleadas son obviamente variables libres que tienen por alcance la totalidad del enunciado en el que se formula su regla correspondiente al *modus ponens*. Mas, como Frege apunta, dichas letras no pertenecen en rigor a su lenguaje simbólico, ya que su cometido no es expresar la universalidad en enunciados de este último sino más bien en enunciados acerca de esos enunciados. Y por esta razón han de poseer la peculiar propiedad de trascender (*over-riding*) el entrecomillado que las enmarca. Ello ha sorprendido a algunos críticos que parecen creer que las comillas sólo pueden usarse con el fin de convertir en un nombre a la expresión entrecomillada. Pero objetar tal cosa equivale a adoptar una visión un tanto estrecha de las posibilidades reales del lenguaje. Si se aclara de entrada, como Frege lo hace, que las mayúsculas griegas han de guardar aquella relación de trascendencia respecto de las comillas que las acompañan, nada habrá de impropio en su recurso. Después de todo, las comillas se han hecho para los hombres y no los hombres para las comillas.

Pero en la práctica podremos dispensarnos del empleo de comillas por las razones antes dadas, sirviéndonos de mayúsculas itálicas en lugar de las mayúsculas griegas de Frege. Las itálicas se destinan a sugerir el parentesco de nuestras letras con el lenguaje simbólico usado en el dominio de la lógica (parentesco que cabría haber indicado, bajo la otra convención, mediante la inclusión de las primeras en las mismas comillas que los símbolos del segundo), pero el empleo de mayúsculas tiene por cometido poner de manifiesto esa capacidad de trascendencia a que acabamos de

[1] *Grundgesetze der Arithmetik*, I, § 14.

aludir. Ya que su uso primordial se centra en la presentación de reglas de inferencia mediante esquemas tales como

$$\frac{P \qquad \textit{Si } P\textit{, entonces } Q}{Q},$$

resulta muy oportuno seguir a W. V. Quine y describirlas como letras esquemáticas [2]. Por lo demás, la forma aquí considerada podría igualmente bien haber sido exhibida por referencia a un cierto número de ejemplos que la compartan en común; pero el uso de letras esquemáticas aventaja en claridad a este recurso, al tiempo que —como Frege supo ver— deja abierta al lector la posibilidad de interpretar aquellas letras mediante el ejemplo que prefiera cuando crea conveniente hacerlo así. Tal vez quepa decir, en conclusión, que las mayúsculas *representan* signos del lenguaje simbólico de base, no en el sentido de constituir designaciones de dichos signos (pues ciertamente no se trata de eso), sino más bien en el sentido en que se dice que el fuego simulado representa fuego real en un ejercicio táctico.

En los *Grundzüge der theoretischen Logik* de Hilbert y Ackermann, y asimismo en las *Grundlagen der Mathematik* de Hilbert y Bernays, se usan letras góticas con aquella misma finalidad, pero con el refinamiento adicional de hacer representar a las mayúsculas *expresiones* de proposiciones y funciones proposicionales en tanto las minúsculas representan *designaciones* de todo género. Ya que, como veremos en el capítulo siguiente, el olvido de la distinción entre expresiones (en un sentido estricto) y designaciones ha dado lugar a confusiones, la introducción de alguna convención que nos permita distinguir entre las letras que representan a unas y otras ha de considerarse un positivo perfeccionamiento de la técnica de Frege. Y el modo más económico de ponerlo en práctica consistiría en destinar a estos efectos una serie de letras extraídas con diverso propósio de distintos segmentos del alfabeto. Así, nos serviremos en lo que sigue de las letras *P*, *Q*, *R*, *S* y *T* como representativas de expresiones proposicionales, de las letras *F*, *G*, *H*, *J*, y *K* como representativas de expresiones de funciones proposicionales y de las letras *X*, *Y*, *Z*, *V* y *W* como representativas de designaciones. Si deseáramos ahora considerar un esquema compartido por fórmulas de un lenguaje simbólico que sólo difirieran entre sí respecto de las variables que contienen (el caso, por ejemplo, del esquema común a $\overset{\mathfrak{x}}{\frown}\mathfrak{x}+1=1+\mathfrak{x}$ y $\overset{\mathfrak{y}}{\frown}\mathfrak{y}+1=1+\mathfrak{y}$), podríamos también representar a dichas variables mediante letras especiales, de carácer análogo al de nuestras letras esquemáticas, siempre que aclaremos de algún modo que los signos representados son efectivamente variables del lenguaje simbólico. Mas si nos contentáramos, no obstante, con tratar a las variables del lenguaje simbólico como una parte de su aparato formal cuyo único cometido sea el de correlacionar lugares va-

[2] *Methods of Logic*, pp. 22, 91 y ss. Quine no adopta la convención fregeana en virtud de la cual las letras esquemáticas serán siempre mayúsculas, distinguiéndose de este modo tipográficamente de las variables del lenguaje simbólico de base.

cíos, podríamos confinar nuestro repertorio de letras a las letras esquemáticas más arriba indicadas, ya que con ellas bastaría para todos nuestros efectos de orden lógico.

Para una adecuada comprensión del papel de esas letras esquemáticas es esencial tener en cuenta que no se trata ni de variables del lenguaje simbólico especial investigado ni tampoco de símbolos por el estilo de los que muchos lógicos modernos introducen bajo la denominación de variables sintácticas o metalingüísticas (esto es, símbolos cuya misión sería indicar lugares vacíos a rellenar por medio de designaciones de signos del lenguaje simbólico de base) [3]. Las letras esquemáticas han de considerarse más bien, al modo como Frege sugiriera, a título de abreviaturas de cualesquiera signos o complejos de signos de este o aquel tipo que podamos seleccionar del lenguaje básico. Si se quiere, se trata en realidad de variables, pero variables de un género un tanto peculiar. Aunque se dieran entre comillas (o, por lo menos, en pasajes en los cuales cabría utilizarlas), nunca podrá decirse que se hallen propiamente entrecomilladas (esto es, mencionadas) ni aun si aparecen en solitario, a menos que —como en el párrafo precedente— las llamemos expresamente letras. Pues los lugares vacíos por ellas indicados en el seno de una expresión que figure entre comillas habrán de considerarse como huecos abiertos en su interior *tras haber sido entrecomillada.* De donde se sigue que constituyen un recurso correspondiente al discurso de segundo orden y que la universalidad que puedan expresar corresponde asimismo a ese discurso de segundo orden más bien que al entrecomillado. Naturalmente, esta práctica equivale a un cierto modo de entrecomillar o mencionar, pero la convención que lo regula es sumamente simple y nada artificiosa. Se trata en realidad —ni más ni menos— que de aquella convención a la que se atenían los estoicos en su presentación de la lógica primaria con la ayuda de expresiones tales como «lo primero» y «lo segundo», convención que asimismo siguieron los sucesores de Aristóteles al explicar la teoría del silogismo valiéndose para ello de esqueletos argumentales.

El recurso básico del lenguaje simbólico de Frege es el empleo de letras góticas con el fin de indicar lugares vacíos en el seno de una expresión. Tal y como Frege lo expone, ese recurso resulta inseparable de la inserción de la correspondiente letra gótica en la concavidad de un trazo horizontal a título de prefijo universalizador o cuantificador universal. Pero cabría fácilmente imaginar una modificación de su lenguaje simbólico que nos permitiera contar no sólo con cuantificadores universales sino asimismo con prefijos de otros tipos. Así, Frege podría haber escrito $\overset{\frown}{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})$ para representar la clausura existencial de una proposición, esto es, podría haber interpretado aquella fórmula como equivalente a $\neg\overset{\smile}{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})$. Y asimismo podría haberse servido de letras góticas en lugar de vocales minúsculas griegas para representar campos de valores. Por ejemplo, podría haber tomado $\hat{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})$, en lugar de $\hat{\alpha}\Phi(\alpha)$, como signo de la clase a la que una cosa pertenece si, y sólo si, posee la característica expresada por Φ. Tales modificaciones hacen de hecho aparición en el lenguaje sim-

[3] R. Carnap, *The Logical Syntax of Language*, § 4; W. V. Quine, *Mathematical Logic*, §§ 4-6.

bólico empleado en los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. De acuerdo con la convención adoptada por estos últimos, así como la mayor parte de los lógicos posteriores, los signos indicadores de lugares vacíos vendrán representados por minúsculas itálicas (*p, q, r, s,* y *t* para indicar lugares vacíos a rellenar por medio de expresiones proposicionales; *f, g, h, j,* y *k* para indicar lugares vacíos a rellenar por medio de expresiones funcionales; y *x, y, z, v* y *w* para indicar lugares vacíos a rellenar por medio de designaciones), contándose asimismo con diversos prefijos que permitan ligar aquellas letras con los resultados expuestos en la tabla que sigue:

$(x)F(x)$	*Cualquier cosa de que se trate, F(ello).*
$(\exists x)F(x)$	*Hay algo F(que).*
$\hat{x}F(x)$	*La clase de todas las cosas F(que).*
$(\iota x)F(x)$	*La única cosa F(que).*

En cada uno de los dos primeros ejemplos el signo complejo resultante de la adición del prefijo constituye una expresión, pero en el tercero y en el cuarto se trata de una designación. Es claro que el empleo de un único tipo de letra para la indicación de lugares vacíos en todos estos casos no supone ninguna desventaja, sino antes bien comporta una mayor claridad.

Mediante las estrafalarias traducciones de la tabla anterior hemos tratado de llamar la atención sobre el hecho de que las letras itálicas no sirven allí sólo para indicar lugares vacíos sino también para enlazarlos con los correspondientes prefijos. Como ha apuntado W. V. Quine, su papel en la lógica simbólica se asemeja bastante al de los pronombres en el lenguaje ordinario [4]. Los lógicos tratan a veces de aclarar este punto mediante la lectura de $(x)F(x)$ como si se tratara de una abreviatura de *Para cualquier x,F(x)*, ofreciendo traducciones análogas para el resto de los signos compuestos arriba enumerados. Como recurso técnico, esa fraseología pudiera resultar inofensiva y conveniente; pero, a título de explanación, es insatisfactoria por envolver una desafortunada mixtura de simbolismo técnico y lenguaje natural. Cuando en castellano leemos «para cualquier...» tendemos a concebir el lugar vacío representado por los puntos suspensivos como algo susceptible de ser rellenado por un término general del tipo de «hombre», pero esto no es en modo alguno lo que cabría esperar de un lugar vacío indicado por medio de la letra *x*. Si, por otra parte, nos permitimos considerar a *F* como un término general, por ejemplo un adjetivo, podremos obtener versiones que resulten harto más naturales que las de nuestra tabla, a saber, *Todo es F, Algo es F, La clase de todas las cosas F* y *La única cosa F*. Mas ni siquiera estas traducciones serían enteramente correctas, dado que una expresión funcional no es un término general como «cuadrado(a)» sino más bien algo por el estilo de «... es cuadrado(a)».

Cuando Frege desea hablar de una función (esto es, hacerla objeto de su discurso), se sirve para ello de un signo compuesto de la forma $\Phi(\xi)$, en que la minúscula griega constituye de nuevo el signo indicador de

4 *Mathematical Logic*, § 12.

un lugar vacío destinado a poner de manifiesto la naturaleza insaturada de la función y el modo como ésta entra a formar parte del discurso. Pero con ello pasa por alto el hecho de que el signo $\Phi(\xi)$ ha de constituir en su conjunto la *designación* de una función y no es ya, por lo tanto, incompleto él mismo a la manera como lo pueda ser una *expresión* funcional. Whitehead y Russell se sirven en este tipo de contextos del signo compuesto $F(\hat{x})$, que tiene la ventaja de preservar la uniformidad en la indicación de lugares vacíos al tiempo que incluye una modificación destinada a recordar el nuevo cometido específico que ha de desempeñar ahora el signo en su conjunto. La cosa quedaría aún más clara si, conservando la formulación acostumbrada de la expresión funcional, acompañáramos a esta última de un prefijo expresamente introducido con el propósito de hacer de ella una designación. En correspondencia con el abstractor de clase más arriba empleado podríamos emplear ahora un abstractor funcional $\check{x}$ que convirtiera a $\check{x}\,F(x)$ en una abreviatura de *la función satisfecha por cualquier cosa F(que)*. Y nadie que lo empleara correría ya el peligro de suponer, como hace Frege, que al hablar de funciones incurrimos inevitablemente en un error gramatical. En lo que sigue, sin embargo, nos atendremos a la práctica de Whitehead y Russell en gracia a la uniformidad [5].

En todos los contextos considerados hasta aquí, los signos indicadores de lugares vacíos entraban a formar parte de expresiones funcionales que a su vez formaban parte de signos complejos llamados a englobar a unos y a otras. O, con otras palabras, cada una de aquellas variables —como corrientemente se las denomina— aparecía precedida de un prefijo o algún signo de esta suerte cuya misión no era otra que ligarlas. Pero en aquel contexto para el que Frege reservaba el empleo de itálicas, los signos indicadores de lugares vacíos tienen también por cometido la expresión de la universalidad sin necesidad de acudir a los prefijos. De acuerdo con su explicación, una expresión que contenga letras itálicas se ha de considerar como la abreviatura de una expresión en todo similar salvo en el hecho de encerrar letras góticas en vez de itálicas e ir precedida de cuantificadores encargados de gobernarla. Y esta misma caracterización de las variables reales (esto es, variables libres empleadas para expresar la universalidad) puede encontrarse en la introducción de Russell a la segunda edición de los *Principia Mathematica*. Se sigue de ella que una expresión que contenga variables reales nunca podrá constituir una simple parte de una expresión proposicional más amplia (a menos de que vaya distinguida en esta última por medio de comillas o algún otro recurso similar); o, para decirlo de otro modo, que el alcance de la universalización expresada mediante el empleo de una variable libre ha de ser la totalidad de la expresión en la que esta última interviene. Así las cosas, ya no será estrictamente necesario que nos sirvamos de un tipo especial de letra para representar signos indicadores de lugares vacíos que tengan asimismo por cometido adicional el de expresar la universalidad sin la ayuda de prefijos, pues de ese cometido adicional daría cumplida idea el hecho mismo de que las expresiones en las cuales intervienen constituyan oraciones completas. Así, cuando quiera que del contexto se despren-

[5] A. Church se sirve de la notación $\lambda x Fx$ en el sentido deseado.

da que una expresión $F(x)$ ha de considerarse una oración, habremos de entender que esa expresión es una abreviatura de $(x)F(x)$. Por lo demás, quien encontrase tedioso tener que ir especificando a cada paso cuál sea el sentido en el que hayamos de tomar $F(x)$, podría adoptar la convención de interpretar siempre a x como el mero signo indicador de un lugar vacío a menos que lo hagamos objeto de alguna modificación (imprimiéndolo, por ejemplo, por medio de negritas) con el fin de indicar que, en ese caso, el signo desempeña el cometido adicional de expresar la universalidad. Pero esta precaución no es ni siquiera necesaria en las obras de Frege ni en los *Principia Mathematica,* donde Whitehead y Russell se atienen a la práctica fregeana de colocar un signo de aserción ante todos y cada uno de sus enunciados simbólicos. Pues la presencia de este signo es suficiente para advertir que cualesquiera variables libres contenidas en la expresión que sigue han de entenderse como si se hallasen ligadas por cuantificadores universales emplazados al comienzo de la expresión en su conjunto. De hecho, se ha sugerido que ésta es la única utilidad posible del signo de aserción, que en consecuencia habría de interpretarse como una abreviatura de «La expresión que resulte de la siguiente al prefijarle cuantificadores universales con el fin de ligar todas sus variables libres es un teorema» [6].

Aunque el empleo de letras destinadas a expresar la universalidad sin la ayuda de cuantificadores aparece en la caracterización fregeana del lenguaje simbólico como un simple recurso económico, se trata históricamente del uso más antiguo que de las variables se haya hecho en el dominio de la lógica y la matemática; y a ello se debe que esas letras recibieran la denominación de variables reales, en tanto las ligadas por prefijos se denominarían variables aparentes. El gran mérito de esta notación radica en permitirnos la construcción de enunciados universales susceptibles de ser manipulados en múltiples respectos como si se tratara de enunciados singulares. Y ésta es probablemente una de las razones por las que en ocasiones se ha dicho que una variable real denota ambiguamente uno cualquiera y la totalidad de sus valores, esto es, una cualquiera y la totalidad de las cosas que los diversos signos apropiados para rellenar los lugares vacíos indicados por la variable denotarían sin ningún género de ambigüedad. Esta manera de expresarse es desafortunada, pero no deja de ser cierto que una variable real pudiera ser tratada con frecuencia como una representación de los diversos signos por los cuales cabría sustituirla. Nosotros ya extrajimos todo el partido posible de este hecho con nuestro uso de las mayúsculas itálicas. Pues, en rigor, la única diferencia entre el empleo de mayúsculas y minúsculas a título de variables reales sería que las primeras se reservan para su uso en enunciados de segundo orden; pero esta circunstancia les confiere máximo alcance e incluso la capacidad de trascender el entrecomillado cuando así lo exija el sentido de la expresión en que intervienen, considerada como un enunciado universal.

Si tratáramos de formular una regla como la correspondiente al *modus ponens* valiéndonos para ello de minúsculas, incurriríamos en una seria

6 W. V. Quine, *Mathematical Logic,* § 16.

confusión. Pues sería absurdo, por ejemplo, presentar a este efecto el esquema

$$\frac{p \qquad \textit{Si } p\textit{, entonces } q}{q},$$

ya que, de acuerdo con las convenciones que gobiernan el uso de las minúsculas, la *p* que en el esquema representa una oración habrá de ser considerada como un enunciado universal equivalente a $(p)p$, esto es, a la aserción de toda suerte de proposiciones. Por lo demás, es obvio que las variables necesarias para la formulación de la regla han de tener por alcance la totalidad de la oración en la que dicha regla es presentada; y ésta es precisamente la característica distintiva de nuestros mayúsculas. Pero en ciertos contextos, no obstante, la distinción entre minúsculas y mayúsculas podría ser ignorada impunemente. Así, en matemáticas cabría tomar a la ecuación

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

como un enunciado universal acerca de los números, pero también cabría tomarla como un esquema de validación, esto es, de suerte tal que su enunciación pudiera interpretarse como una licencia para reemplazar cualquier signo de la forma $1+2+3+\ldots+N$ por un signo de la forma $\frac{N(N+1)}{2}$.

Si presentamos dicha fórmula a título de conclusión o de premisa en un razonamiento relativo a la teoría de los números, la estaremos entendiendo en el primero de esos modos. Mas si nos referimos a ella como el principio que sanciona la transición de un enunciado que contenga $1+2+3+\ldots+100$ a un enunciado que contenga $\frac{100(100+1)}{2}$ en lugar de aquella suma, la estaremos entendiendo en el segundo sentido. En rigor, el que únicamente nos sirvamos de la fórmula precedente para ambos propósitos no entraña riesgo alguno, ya que el contexto indica siempre con suficiente claridad cuál pueda ser la interpretación que se requiere en cada caso.

El simbolismo de Frege es engorroso no sólo por la diversidad de tipos de letra utilizados, sino también por obligarnos a la disposición de nuestras fórmulas en una doble dimensión, todo lo cual acabaría determinando su desplazamiento por otros lenguajes simbólicos en los que únicamente se precisa de la ordenación lineal de un cierto número comparativamente reducido de signos. El sistema que ha gozado de una mayor aceptación a este respecto es el introducido por Peano en su *Notation de logique mathématique* de 1894, desarrollado por él mismo en las sucesivas ediciones de su *Formulaire de Mathématiques* y subsecuentemente perfeccionado por Whitehead y Russell en sus *Principia Mathematica* de 1910. Pero no faltan otros sistemas asimismo en uso y será conveniente, por lo tanto, ofrecer una tabla con los signos principales de los más conocidos, sirviéndonos para ello de mayúsculas como signos indicadores de

lugares vacíos (excepción hecha de la última columna, en la que es necesario preservar el uso de minúsculas por parte de Lukasiewicz con el fin de evitar toda posible confusión con las letras a las que hace oficiar de operadores):

	Peano-Russell	Hilbert	Variantes	Lukasiewicz
Negación	$\sim P$	$\bar{P}$	$-P, \neg P$	Np
Conjunción	$P.Q$	$P \,\&\, Q$	$PQ, P \wedge Q$	Kpq
Disyunción	$P \vee Q$	$P \vee Q$	PQ	Apq
Condicional	$P \supset Q$	$P \rightarrow Q$		Cpq
Bicondicional	$P \equiv Q$	$P \sim Q$	$P \leftrightarrow Q$	Epq
Cuantificación universal	$(x)F(x)$	$(x)F(x)$	$\forall xF(x), \wedge xF(x)$	$\Pi x\Phi x$
Cuantificación existencial	$(\exists x)F(x)$	$(Ex)F(x)$	$\exists x\, F(x), \vee xF(x)$	$\Sigma x\Phi x$

La función de verdad enumerada aquí como condicional es, por supuesto, el condicional filónico.

Con el fin de reducir al mínimo la necesidad de paréntesis (o puntos), los usuarios de las notaciones que aparecen en las tres primeras columnas han acordado que el signo de negación impreso ante otros signos opere únicamente sobre la expresión que inmediatamente le sigue, a menos que se indique lo contrario justamente mediante el uso de paréntesis o puntos, y que los signos de conjunción, disyunción, condicional y bicondicional escalonen su respectivo alcance por este orden, de suerte que podamos escribir si lo deseamos

$$\sim P.Q \vee R \supset S \equiv T$$

en lugar de

$$\{[(\sim P.Q) \vee R] \supset S\} \equiv T.$$

El empleo del signo de negación por parte de Hilbert permite prescindir de otros paréntesis, ya que la longitud del trazo superior de negación indica claramente la extensión de la expresión a negar; y aún podrían conseguirse otras economías escribiendo $(x)Fx$ o $\forall xFx$ en lugar de $(x)[F(x)]$, con lo que el cuantificador sólo tendría por alcance el signo funcional que figurase inmediatamente a continuación. Pero, a pesar de todas estas omisiones de paréntesis, el número de ellos que hay todavía que manejar podría alcanzar en ocasiones proporciones incómodas, lo que ha impulsado a proponer una notación en la que para nada se haga uso de paréntesis. Dentro de esta última, ideada por Lukasiewicz, cada una de las mayúsculas empleadas como un operador o conectiva precede a los símbolos a los cuales se aplica; y, siempre que el número de estos últimos se ajuste a lo exigido por la definición del operador, no habrá posibilidad de ambigüedad en lo que se refiere a la interpretación de una fórmula bien formada. Así, $CKCpqpq$ únicamente admite una lectura que la haga equivaler a $[(p \supset q).p] \supset q$, puesto que la segunda C requiere para su aplicación dos símbolos completos que habrán de ser las inmediatas p y q y, de manera semejante, la K requiere también para su aplicación otros dos símbolos completos que habrán de ser las inmediatas Cpq y p. Esta ventaja, sin embargo, se ha de pagar al precio de un radical alejamiento de la construcción usual en los lengua-

jes naturales, lo que redunda, en consecuencia, en una mayor dificultad de la lectura de las fórmulas. Sin duda esta dificultad es de las que se acaban venciendo con la práctica, pero la mayor parte de los lógicos han preferido seguir utilizando notaciones provistas de paréntesis. Por nuestra parte, sólo nos vamos a servir en lo que sigue de la más conocida de estas últimas —la de Peano, Whitehead y Russell—, mas presidida por las reglas relativas al uso de variables establecidas en esta sección.

Una modificación del simbolismo lógico de bastante mayor monta que las anteriores fue la sugerida en 1924 por M. Schönfinkel [7], que ha dado pie a un nuevo enfoque de la lógica y merecería, por lo tanto, ser tratada en una sección aparte. Si la reseñamos aquí es, simplemente, porque en ningún caso podremos hacer más que limitarnos a dar alguna indicación acerca de los rasgos de mayor interés del nuevo simbolismo.

Schönfinkel comienza haciendo ver que cabe dar un paso más sobre el intento de Sheffer de reducir el número de las constantes lógicas si se introduce a estos efectos $Fx|^{x}Gx$ con el sentido de $(x)\sim(Fx.Gx)$. Pues evidentemente el signo $|^{x}$ ha de significar lo mismo que la simple barra cuando aparece intercalado entre expresiones ninguna de las cuales contiene a x libre; y cuando aparezca intercalado entre expresiones que contengan a x libre, cabrá servirse de él para construir equivalentes de todas y cada una de las expresiones cuantificadas de la lógica general. Pero Schönfinkel prosigue asegurando que todavía es posible una más drástica simplificación del simbolismo de la lógica que nos permita prescindir de todas las variables, sean éstas proposicionales, funcionales o individuales. Las variables comúnmente empleadas en la transcripción de fórmulas lógicas son sólo signos auxiliares para hacer referencias marginales; y, si encontráramos algún procedimiento para lograr sin su concurso ese propósito, nos sería dado abandonarlas por entero. Sin duda que en la práctica se continuará haciendo uso de variables, pero la consideración de cómo sea posible eliminarlas reviste un interés teórico innegable.

De acuerdo con Schönfinkel tendríamos para ello que comenzar por extender nuestra noción de función de forma tal que permitamos que los valores de variables y funciones sean a su vez funciones. Así, para $F(x,y)$ podríamos escribir $(Fx)y$, o más abreviadamente Fxy, interpretando a Fx dentro de este complejo como el signo de una operación que sea ella misma el resultado de aplicar la operación significada por F al argumento significado por x. A menos que se indique lo contrario mediante el uso de paréntesis, se ha de asumir que la operación indicada por el primero de esos signos se aplicará al objeto indicado por el segundo signo, aplicándose luego el resultado al objeto indicado por el tercero y así sucesivamente. Introducimos a continuación un pequeño número de funciones u operaciones específicas definidas por medio de ecuaciones:

$$(1)\quad \mathrm{I}x=x$$
$$(2)\quad \mathrm{C}xy=x$$
$$(3)\quad \mathrm{T}fxy=fyx$$
$$(4)\quad \mathrm{Z}fgx=f(gx)$$
$$(5)\quad \mathrm{S}fgx=fx(gx).$$

7 "Über die Bausteine der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, XCII (1924), pp. 305-316. Para ulteriores desarrollos, cf. H. Curry y R. Feys, *Combinatory Logic*, vol. I, 1958.

I significa aquí la operación de identidad que deja intacto su argumento; C, la función de dos argumentos cuyo valor es siempre igual al primero de dichos argumentos; T, la operación de transponer los argumentos de una función (esto es, lo que en la teoría de las relaciones se llama comúnmente conversión); Z, aquella operación de composición de funciones mediante la que compondríamos, por ejemplo, la noción de tío a partir de las nociones de hermano y progenitor; y S, finalmente, aquella función de tres argumentos cuyo valor se calcula dejando que el primero y el segundo argumentos operen separadamente sobre el tercero y haciendo luego operar el resultado de la primera operación sobre el resultado de la segunda. El segundo y el quinto de estos cinco conceptos son los menos familiares de todos ellos, pero revisten especial interés por permitir la definición de las otras tres funciones por medio de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathrm{SCC} \\ \mathrm{Z} &= \mathrm{S(CS)C} \\ \mathrm{T} &= \mathrm{S(ZZS)(CC)}. \end{aligned}$$

Así tendríamos, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}fgx &= \mathrm{S(CS)C}fgx \\ &= \mathrm{CS}f(\mathrm{C}f)gx \\ &= \mathrm{S(C}f)gx \\ &= \mathrm{C}fx(gx) \\ &= f(gx). \end{aligned}$$

Si nos sirviéramos ahora de Ufg como abreviatura de $fx|^{x}gx$, podríamos expresar cualesquiera verdades lógicas en términos de C, S y U, de suerte que cada variable únicamente figurase una vez al final de la correspondiente fórmula, de la que podría ser eliminada como inesencial para fijar el sentido de esta última en su conjunto. La misma U podría ser omitida, ya que también cabría reducirla a una única intervención final que no tendría más cometido que recordarnos que se está hablando de lógica. Lo distintivo de cada una de aquellas verdades lógicas vendría a quedar entonces expresado mediante una determinada ordenación de los dos signos C y S. Así, tendríamos por ejemplo:

$$\begin{aligned} p|^{x}(p|^{x}p) &= \mathrm{U}p(\mathrm{U}pp) \\ &= \mathrm{U}p(\mathrm{U}p(\mathrm{C}p(\mathrm{C}p))) \\ &= \mathrm{U}p(\mathrm{U}p(\mathrm{SCC}p)) \\ &= \mathrm{U}p(\mathrm{SU(SCC(}p) \\ &= \mathrm{SU(SU(SCC))}p \\ &= \mathrm{SU(SU(C(SCC)U))}p \\ &= \mathrm{SU(SS(C(SCC))U)}p \\ &= \mathrm{SS(SS(C(SCC)))}p. \end{aligned}$$

Introduciendo ahora una nueva función especial D, definida directamente mediante la ecuación

$$\mathrm{D}fx = fxx$$

o indirectamente (esto es, en términos de C y S) mediante la ecuación

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \mathrm{SS(CI)} \\ &= \mathrm{SS(C(SCC))}, \end{aligned}$$

podríamos reducir nuestro último resultado a SSD. Nunca se ha pretendido ciertamente que la lógica combinatoria, como se denomina hoy a este tipo de investigación, nos proporcione fórmulas de una excesiva claridad intuitiva. Hasta el presente, la técnica de Schönfinkel es importante sobre todo por la luz que arroja sobre el papel de las variables y la noción de sustitución en el simbolismo de la lógica matemática. No es inimaginable que un día pueda asimismo acreditarse como un útil instrumento para el análisis exacto de patrones estructurales dentro de los lenguajes naturales, pero por el momento todo ello se reduce a una mera conjetura.

2. Métodos de presentación: axiomas y reglas.

El primero de los repertorios axiomáticos propuestos por Frege para la lógica general (con exclusión de la teoría de la identidad) podría ser formulado como sigue en términos modernos:

(1) $p \supset (q \supset p)$
(2) $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$
(3) $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$
(4) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$
(5) $\sim \sim p \supset p$
(6) $p \supset \sim \sim p$
(7) $(x)f(x) \supset f(y)$.

Frege afirma en su *Begriffsschrift* que no se sirve más que de un principio de inferencia para la derivación de teoremas a partir de estos axiomas, pero nosotros ya hemos visto que en realidad precisa echar mano de cuatro. El primero de ellos (I) es un principio de sustitución de variables reales del tipo del ofrecido en la regla (9) de sus *Grundgesetze* transcrita en la penúltima sección del capítulo anterior, correspondiendo los otros tres a los siguientes esquemas:

(II) $\dfrac{P \quad P \supset Q}{Q}$

(III) $\dfrac{F(x)}{(x)F(x)}$

(IV) $\dfrac{P \supset F(x)}{P \supset (x)F(x)}$, siempre que x no intervenga libre en P.

La mayor parte de los lógicos han incluido en sus sistemas axiomas o reglas en estrecha correspondencia con (7), (III) y (IV), si bien la regla (III) —como habremos de ver— es redundante. Pero la lógica primaria, determinada por los axiomas (1)—(6) y las reglas (I) y (II), ha sido objeto de diversas otras presentaciones bajo los rótulos de «teoría de la deducción», «cálculo de proposiciones», «teoría de las proposiciones elementales», «teoría de las funciones de verdad» y «teoría de la composición de enunciados». Estas variantes en el estilo de presentación son dignas de atención, ya que algunas de ellas por lo menos revisten importancia para la filosofía de la lógica.

Nosotros ya sabemos que el tercero de los axiomas fregeanos es superfluo, puesto que cabe derivarlo de los dos primeros. Con la ayuda de estos dos sería también posible reemplazar los tres últimos por un único axioma para la negación, a saber,

$$(\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p).$$

Y aún más interesante es la posibilidad de reemplazar la totalidad de los axiomas fregeanos para la lógica primaria por la siguiente serie completa de tres axiomas:

(1) $(p \supset q) \supset [q \supset r) \supset (p \supset r)]$
(2) $(\sim p \supset p) \supset p$
(3) $p \supset (\sim p \supset q)$.

Pues el primero de los nuevos axiomas es el principio de transitividad para el condicional filónico; el segundo constituye una versión de la *consequentia mirabilis*, primeramente formulada por los estoicos; y, por lo que al tercero se refiere, se trata de la reformulación de una de las tesis paradójicas originariamente atribuidas a Juan Duns Escoto, aquélla —a saber— de acuerdo con la cual cualquier proposición podría ser derivada a partir de una conjunción contradictoria. El descubrimiento de todas estas posibilidades y varios otros resultados de notable interés (tales como la reducción a un único axioma de suyo suficiente, aunque quizás no muy perspicuo) se deben a Lukasiewicz y sus discípulos, que desde la segunda década de nuestro siglo han prestado una atención considerable a la investigación de la lógica primaria, con especial referencia a los sistemas basados en las dos nociones primitivas —la negación y el condicional filónico— de que partiera Frege [8]. Pero el sistema que más ha atraído la atención de los lógicos contemporáneos no fue el de Frege sino el de los *Principia Mathematica.*

Whitehead y Russell trabajaron como Frege con dos principios de inferencia para la lógica primaria —a saber, los principios de sustitución y separación (esto es, la regla correspondiente al *modus ponens* para el condicional filónico)—, pero tomaron por nociones primitivas la negación y la disyunción, presentando el célebre conjunto de axiomas:

(1) $(p \vee p) \supset p$
(2) $q \supset (p \supset q)$
(3) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
(4) $[p \vee (q \vee r)] \supset [(p \vee q) \vee r]$
(5) $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$

Bernays mostró en 1926 la posibilidad de derivar a (4) de los restantes axiomas y, por lo tanto, su superfluidad [9]. Aparte de ello, el sistema adolece de una cierta falta de elegancia. Pues, en efecto, si los signos lógicos de negación y disyunción se han de tomar por primitivos, lo natural sería hacer uso de ellos en la formulación de los axiomas y reglas de inferencia con

---

8 J. Lukasiewicz y A. Tarski, "Untersuchungen über den Aussagenkalkül", *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des lettres de Varsovie, Classe III*, vol. XXIII (1930), pp. 30-50. Completa exposición de la obra de esta escuela en A. N. Prior, *Formal Logic.*

9 "Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der Principia Mathematica", *Mathematische Zeitschrift*, XXV (1926), pp. 305-20.

exclusión de todos los demás. En el sistema nos es dado, claro está, reemplazar a $P \supset Q$ por $\sim P \vee Q$ en todas y cada una de sus intervenciones, mas los axiomas y reglas resultantes de hacerlo así ofrecerían una mayor complicación que los de los sistemas de Frege y de Lukasiewicz.

Como vimos en nuestro capítulo sobre el álgebra de la lógica, Peirce y Sheffer repararon en la posibilidad de definir la negación y todas las conectivas de la lógica primaria por referencia a una única noción primitiva. Tomando $P \mid Q$ (en el sentido de *No a la vez P y Q*) como indefinida, Nicod demostró en 1917 la posibilidad de basar todo el cálculo en el axioma

$$[p|(q|r)]|([t|(t|t)]|\{(s|q)|[(p|s)|(p|s)]\})$$

junto con

$$\frac{P \quad P|(Q|R)}{R}$$

como regla de inferencia en lugar de la correspondiente al tradicional *modus ponens* [10]. En su introducción a la segunda edición de los *Principia Mathematica*, publicada en 1925, Russell sugirió la conveniencia de sustituir los axiomas de la primera edición arriba reseñados por el de la formulación de Nicod, pero sería difícil conceder que la simplificación de este último contribuya a hacer a la teoría más manejable.

Si lo que se pretende es conseguir una mayor fluidez y claridad en la presentación de las argumentaciones, el más indicado de todos los conjuntos axiomáticos de que quepa hacer uso en combinación con los principios de sustitución y separación es el propuesto por Hilbert y Bernays en 1934 [11], que exponemos a continuación:

I. (1) $p \supset (q \supset p)$
(2) $[p \supset (p \supset q)] \supset (p \supset q)$
(3) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

II. (1) $p.q \supset p$
(2) $p.q \supset q$
(3) $(p \supset q) \supset [(p \supset r) \supset (p \supset q.r)]$

III. (1) $p \supset p \vee q$
(2) $q \supset p \vee q$
(3) $(p \supset r) \supset [(q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)]$

IV. (1) $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$
(2) $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$
(3) $(p \supset q) \supset [(q \supset p) \supset (p \equiv q)]$

V. (1) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$
(2) $p \supset \sim\sim p$
(3) $\sim\sim p \supset p$

Los axiomas se agrupan aquí de acuerdo con los signos envueltos en los mismos. En primer lugar aparecen aquellos axiomas que únicamente envuelven el condicional filónico; a continuación, los que —además del condi-

10 "A Reduction in the Number of the Primitive Propositions of Logic", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, XIX (1917), pp. 32-41.
11 *Grundlagen der Mathematik*, I, p. 66.

cional— envuelven la conjunción; luego los que envuelven el condicional y la disyunción, y así sucesivamente. La privilegiada posición del signo condicional, que aparece como único signo en los axiomas del primer grupo y como uno de los dos signos empleados en los grupos restantes, se debe, por supuesto, al hecho de concurrir asimismo en la regla de separación. Respecto de esta última, cada uno de los axiomas desempeña el papel de una regla de inferencia adicional. El primero de ellos, por ejemplo, equivale por su potencia a la regla cuyo esquema es

$$\frac{P}{Q \supset P}.$$

Hay que reconocer que el número de axiomas del sistema es relativamente crecido; pero ello no supone ninguna desventaja, ya que cada uno de los signos se halla introducido de una manera fácilmente inteligible: por ejemplo, la disyunción se introduce mediante tres axiomas de carácter dual respecto de los tres axiomas empleados para introducir la conjunción. Si deseáramos hacerlo, podríamos reducir el número de axiomas definiendo para ello algunos de los signos en términos de otros; pero no habría realmente mucho que ganar con este procedimiento, puesto que una definición no es sino un par de reglas con la misión de conectar un signo indefinido con otro definido. En la formulación que acaba de citarse, los axiomas son todos ellos independientes entre sí; y es interesante reparar en que los axiomas I(1), V(1), V(2) y V(3) provienen del sistema de Frege, el I(3) de Lukasiewicz y el III(2) de los *Principia Mathematica.*

En todos los sistemas considerados hasta aquí se requiere de un principio de sustitución para la derivación de los teoremas a partir de los axiomas. La posibilidad de una formulación rigurosa de semejante principio es innegable, pero parece en cambio inapropiado proponer algo de este género como una regla de la lógica primaria comparable a la de separación. Cuando nosotros derivamos un enunciado de otro por medio de una serie de de sustituciones, la validez de nuestra inferencia descansará en la universalidad de la premisa; pero lo que se estudia en el dominio de la lógica primaria es un tipo de razonamiento que no envuelve la noción de generalidad, por lo que no resulta muy adecuado presuponer que los axiomas de una teoría semejante hayan de ser proposiciones universales. No se quiere decir con ello que el lógico se tenga que abstener en el dominio de la lógica primaria de toda generalización, confinándose simplemente a la propuesta de una serie de ejemplos. En cuanto lógico le es dado formular enunciados universales, pero al hacerlo así en este apartado de su obra debería servirse únicamente de enunciados de segundo orden como el que nos dijera que cualquier argumento que responda al patrón

$$\frac{P \qquad P \supset P}{Q}$$

ha de ser válido. Si, en particular, se refiere a los axiomas de la lógica primaria, no debería asumir —como hace Frege— que éstos hayan de ser de carácter universal y finitos en número, sino más bien estar dispuesto a admitir como axiomas cualesquiera proposiciones que exhiban deter-

minadas formas de validación, como sucedería por ejemplo con la forma $P \supset (Q \supset P)$ correspondiente al primer axioma de Frege $p \supset (q \supset p)$. Este recurso a esquemas axiomáticos más bien que a axiomas propiamente dichos es idea de J. von Neumann [12], pero podría decirse que se ajusta a la intención fregeana originaria de presentar la lógica, o por lo menos la lógica primaria, sirviéndose de una única regla de inferencia. Por desgracia, tal simplificación no comporta ninguna ventaja *de orden práctico* para el usuario de la lógica, puesto que la tarea de determinar si un enunciado podría admitirse como axioma desde esta nueva perspectiva envuelve exactamente las mismas dificultades que la determinación de si era posible derivarlo a partir de un axioma desde la perspectiva primitiva. Mas la reforma de von Neumann reviste el gran mérito, filosóficamente hablando, de permitirnos distinguir con claridad entre enunciados de primero y segundo orden.

Es probable que Frege y quienes le han seguido en su empleo de un principio de sustitución se hayan dejado influir por la analogía con el álgebra, donde —como ya vimos— una y la misma fórmula se puede usar algunas veces como un enunciado universal acerca de los números y otras como una licencia que nos permita efectuar ciertas transformaciones. Pero el caso es que Frege declaraba que la expresión de la universalidad por medio de variables libres únicamente es una abreviatura de su expresión por medio de variables ligadas; y, si se llevara esta manera de describir la notación hasta sus últimas consecuencias, la teoría de la lógica se acabaría tornando harto más complicada que lo que Frege y sus seguidores llegaron nunca a admitir en sus caracterizaciones originarias de la misma. Pues, en efecto, si la fórmula axiomática $p \supset (q \supset p)$ se hubiera de entender como una abreviatura de $(p)(q)[p \supset (q \supset p)]$, el caso más simple de derivación a partir de ella tendría que constituir una aplicación de la regla de la lógica general correspondiente al esquema $\dfrac{(p)F(p)}{F(Q)}$.

Pero las únicas conclusiones que cabría obtener por este procedimiento serían enunciados del tipo de *La tierra es plana* $\supset$ (*la luna está hecha de queso verde* $\supset$ *la tierra es plana*), esto es, ejemplificaciones de nuestro principio lógico por medio de oraciones de carácter extralógico, que en ningún caso podrían ser los resultados que interesan a los lógicos cuando se sirven de un principio de sustitución. Lo más normal será que los teoremas que persiguen establecer mediante la sustitución de variables constituyan a su vez enunciados universales tales como $r.s \supset (\sim t \supset r.s)$, que no cabría ya derivar limitándonos a la aplicación de la simple regla mencionada sino requieren de razonamientos lógico-generales considerablemente más complejos. Sin duda esos razonamientos son estrictamente formalizables [13], pero lo más esclarecedor será acudir a los esquemas axiomáticos de von Neumann y argüir como sigue:

12 "Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift*, XXVI (1927), pp. 1-46.

13 El problema fue seriamente abordado por vez primera por S. Lesniewski. La presentación más fácilmente accesible de su lógica se encontrará en sus "Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik", *Fundamenta Mathematica*, XIV (1929), pp. 1-81.

Todo enunciado de la forma $P \supset (Q \supset P)$ es necesariamente verdadero.
Pero todo enunciado de la forma $R.S \supset (\sim T \supset R.S)$ es de la forma $P \supset (Q \supset P)$.
Luego todo enunciado de la forma $R.S \supset (\sim T \supset R.S)$ es necesariamente verdadero.

Este razonamiento descansa ciertamente en un principio de la lógica general (el principio correspondiente a un silogismo en *Barbara*), pero en este contexto resulta inobjetable dado que constituye una argumentación *acerca de* la lógica primaria más bien que una argumentación *perteneciente* a este último dominio de la lógica.

Consideraciones semejantes podrían oponerse a la caracterización fregeana del uso de variables funcionales en la formulación de los axiomas de la lógica general. Si la fórmula $(x)f(x) \supset f(y)$ se hubiera de entender como una abreviatura de $(f)[(x)f(x) \supset f(y)]$, sería imposible presentar la teoría de las funciones de primer grado sin encaramarnos a la teoría de las funciones de segundo grado. En resumidas cuentas, pues, el único modo de hacer ver con claridad en qué consista la auténtica articulación de la teoría lógica consistirá en servirnos a este efecto de variables especiales, como nuestras mayúsculas, a las cuales competa la expresión de la generalidad en el discurso del propio lógico en cuanto diferente del discurso por él analizado.

Pero, además, no hay en rigor otro remedio que confesar nuestra extrañeza cuando en lógica se oye hablar de axiomas, ya sea que se opere con un número reducido de ellos —como en el sistema de Frege—, ya sea que se opere —como en el de von Neumann— con infinitos axiomas. Hasta Frege, los lógicos consideraban su tarea examinar la derivación de teoremas a partir de axiomas en dominios tales como la geometría, pero por lo común nunca trataron de presentar a la propia lógica como un sistema deductivo a base de axiomas y teoremas. Frege no fue el primero, desde luego, en sostener la posibilidad de derivar principios lógicos unos de otros. Pues Aristóteles hablaba ya de reducir todos los silogismos válidos a los modos *Barbara* y *Celarent*, y Crisipo de deducir modos complejos a partir de sus indemostrables. Pero Frege, sobre la base de algunas sugerencias de Leibniz y Boole, presentaría un sistema en el que los axiomas y teoremas no constituyen ya verdades relativas a la derivación entre diversos enunciados sino más bien verdades lógicas palmarias o truismos * de análogo estatuto al de las leyes de no-contradicción y tercio excluso. Si deseáramos servirnos de su lógica para la construcción de un sistema deductivo a la usanza ordinaria —esto es, un sistema deductivo en el que los axiomas no sean truismos lógicos—, habría que comenzar por añadir los axiomas fregeanos a nuestro repertorio a título de premisas suplementarias, pasando luego a realizar las inferencias deseadas de acuerdo con el principio de sustitución, el principio de separación o una de sus dos reglas relativas al razonamiento con cuantificadores. No deja de ser cierto que, a la hora de componer sus *Grundgesetze*, se decidió a adoptar por razones de conveniencia práctica una serie de patrones adicionales

* Cf. la nota al pie de la pág. 159 *(T.)*

de inferencia que habrían de dispensarle de todos sus axiomas para la lógica primaria, excepción hecha del primero. Mas lo que nunca puso en claro es por qué se haya de contar con ningún axioma en el dominio de la lógica. Es posible que Frege, como Whitehead y Russell después que él, juzgase natural contar con ellos en razón de su intento de hacer de la aritmética una extensión de la lógica. Mas comoquiera que ello sea, y tras un breve período en que el programa de presentación de toda la lógica como un sistema deductivo fue aceptado sin discusión, los lógicos acabarían reconociendo que las verdades de la lógica primaria pueden acreditarse como tales sin necesidad de acudir a derivarlas a partir de axiomas.

La base del nuevo método de presentación consiste en la sistemática enumeración de las posibilidades de verdad de un cierto número de proposiciones simples, esto es, en la enumeración de las posibles combinaciones de valores de verdad de esas proposiciones. Así, para una proposición tendremos dos posibilidades de verdad; para dos proposiciones tendremos cuatro; y, en general, para n proposiciones tendremos 2^n posibilidades. Con la ayuda de una tabla, como la que a continuación se indica, que nos muestre la doble posibilidad abierta a una proposición P, podremos definir la negación con sólo escribir «f» y «v» bajo $\sim P$ frente a la «v» y la «f» que respectivamente figuran bajo P:

P	$\sim P$
v	f
f	v

Ya en la antigüedad, Filón de Megara aplicó el mismo procedimiento en su caracterización de los enunciados condicionales; pues, en efecto, aseguraba que un enunciado de esta suerte sería verdadero si su antecedente y su consecuente fuesen ambos verdaderos, o si su antecedente fuese falso y su consecuente verdadero, o si su antecedente y su consecuente fuesen ambos falsos, siendo falso si su antecedente fuese verdadero y su consecuente falso. Ello equivale a una definición de la conectiva «si» como la que aparece bajo el signo de herradura en la siguiente serie de definiciones tabulares:

P	Q	$P.Q$	$P \vee Q$	$P \supset Q$	$P \equiv Q$
v	v	v	v	v	v
v	f	f	v	f	f
f	v	f	v	v	f
f	f	f	f	v	v

Mas, que sepamos, tales listas de posibilidades no fueron construidas en forma tabular hasta el siglo pasado, en que Boole se sirvió de ellas para explicar el proceso de expansión por el que una expresión de su sistema podía ser transformada en una suma de productos (esto es, en una disyunción de conjunciones) y Frege las utilizó expresamente para la definición de sus diversas funciones de verdad. Cuando tengamos dos y sólo dos

proposiciones a considerar (tal y como sucede con las definiciones que se acaban de exponer), las posibilidades de verdad podrían ser representadas valiéndonos de una matriz como la que se reproduce más abajo, construyéndose la definición correspondiente mediante la inserción de los valores «v» o «f» en los lugares indicados:

		Q	
	$\supset$	v	f
P	v	v	f
	f	v	v

Pero la tabulación en líneas paralelas y verticales reviste la ventaja de poderse aplicar a cualquier número de proposiciones, cabiendo hacer uso de ella —como veremos en seguida— a efectos calculatorios.

Comenzando por la tabla más simple de posibilidades, suficiente para la definición de la negación en cuanto función de verdad de un único argumento, podríamos pasar a construir tablas progresivamente más complicadas duplicando para ello en cada caso los valores «v» y «f» de la tabla inmediatamente precedente y haciendo repetirse a estos últimos cuantas veces sea menester hasta igualar el número de posibilidades de la tabla final, tal y como se muestra en la figura que sigue:

P	Q	R
v	v	v
v	v	f
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f
f	f	v
f	f	f

Otras ordenaciones resultan viables y han sido utilizadas, siendo lo esencial en todas ellas que podamos contar con un procedimiento capaz de asegurarnos de haber efectuado las diversas combinaciones posibles de los valores de verdad y de no haberlo hecho más de una vez con cada una. Se observará que, en nuestros ejemplos, nos hemos servido de mayúsculas como letras argumentales. El propósito de ello es sugerir que la construcción de la definición tabular de una función veritativa equivale en efecto a la formulación simultánea de un cierto número de reglas de inferencia. Así, la construcción de la definición tabular antes propuesta para la conjunción equivaldría a la formulación de las reglas expresadas por medio de los tres siguientes esquemas de inferencia:

$$\frac{P \quad Q}{P.Q} \qquad \frac{P.Q}{P} \qquad \frac{P.Q}{Q}.$$

Pues en orden a obtener cualquiera de ellas de la definición tabular en cuestión sólo tendríamos que acudir a aquellas líneas de la misma en las que a la premisa o las premisas, según sea el caso, les corresponda el valor «v» y comprobar que éste es también el valor correspondiente a cada una de las conclusiones.

En la obra de Boole no es difícil tropezar con la idea de que una proposición necesariamente verdadera habrá de revelarse como tal en el curso de su expansión; y, hacia 1920, varios lógicos llegaron independientemente a la conclusión de que —una vez definidas las funciones veritativas mediante tablas de verdad— bastaría con un simple proceso de cálculo para determinar automáticamente si una proposición compleja expresada en términos veritativo-funcionales es necesariamente verdadera, necesariamente falsa o contingente. La más conocida de todas esas caracterizaciones de un *procedimiento de decisión* para la lógica primaria por medio de las tablas de verdad acaso sea la ofrecida por L. Wittgenstein en su *Tractatus Logico-Philosophicus*, publicado por vez primera en 1921. Pero tal técnica es objeto de una consideración más directa en un artículo de E. L. Post aparecido el mismo año [14]. A título de ejemplo, consideremos la siguiente prueba del primer axioma fregeano (o, para ser exactos, de su correspondiente esquema axiomático):

		(1)	(3)	(1)	(2)	(1)
P	Q	P	$\supset$	$(Q$	$\supset$	$P)$
v	v	v	v	v	v	v
v	f	v	v	f	v	v
f	v	f	v	v	f	f
f	f	f	v	f	v	f

Las posibilidades de verdad bajo cada columna son cuatro exactamente, ya que únicamente entran en juego dos letras argumentales. En orden a asignar un valor de verdad al consecuente del esquema en cada uno de los cuatro casos posibles, sólo necesitamos consultar la definición tabular del condicional filónico, que constituye naturalmente una especificación de sus condiciones de verdad y falsedad; y, una vez realizada esta operación como se indica en (2), basta una nueva aplicación de la definición —indicada en (3)— para mostrar que el esquema arroja valor «v» en todas las posibles circunstancias o, como Wittgenstein diría, es tautológico.

Es obvio que este método resulta susceptible de aplicación mecánica (lo que quiere decir, literalmente, que cabría encomendársela a una máquina) a cualquier fórmula construida a base de signos veritativo-funcionales de la lógica primaria; y cuando dicha fórmula haya quedado probada mediante tal procedimiento, la validez del resultado no descansará ya en la corrección de tales o cuales otras fórmulas previamente seleccionadas como axiomas. Pero sería un error suponer que el nuevo método no requiera otra cosa que definiciones arbitrarias de los signos veritativo-fun-

[14] "Introduction to a General Theory of Elementary Proportions", *The American Journal of Mathematics*, XLIII (1921), pp. 163-85. El método le era asimismo conocido a Lukasiewicz por esas fechas.

cionales. Pues el descubrimiento de que la aplicación de las definiciones arroja «v» en todas las líneas de la tabla bajo la conectiva principal de una fórmula dada únicamente equivaldrá a la prueba de su carácter necesariamente verdadero cuando las líneas de la tabla agoten todas las posibilidades de verdad o falsedad de las proposiciones que constituyen los argumentos de la función de verdad expresada por la fórmula en cuestión. Que una tabla construida como se acaba de indicar agota de hecho tales posibilidades resulta obvio, pero sólo para quien haya comprendido el principio que presidió su construcción y acepte en consecuencia que toda proposición ha de ser verdadera o falsa.

El método de las tablas de verdad para la certificación de las verdades lógicas podría tal vez considerarse como un refinamiento de la técnica de von Neumann, si bien la precedió históricamente. Pues en lugar de especificar un número determinado de esquemas axiomáticos, podríamos servirnos del término «tautología» con vistas a ofrecer una descripción general, pero efectiva, de todas las proposiciones que se hayan de admitir a título de axiomas en la lógica primaria. Este es, por ejemplo, el procedimiento seguido por W. V. Quine en su *Mathematical Logic* [15]. Si alguien objetara, no obstante, que la tarea del lógico no es certificar truismos como tales —sea por el método de Frege o cualquier otro procedimiento alternativo—, sino más bien formular aquellos principios de inferencia que han de resultar válidos para toda clase de contenidos y materias estudiadas, podríamos adaptar nuestra presentación de las tablas de verdad a la satisfacción de su demanda. Pues, en efecto, decir que una proposición implica otra es decir que cualquier estado de cosas que pudiera hacer verdadera a la primera haría asimismo verdadera a la segunda, y esto es algo que obviamente se desprende de las tablas de verdad cuando la implicación considerada corresponde a la lógica primaria. En ellas, por ejemplo, es fácil apreciar que, cuando aparece una «v» bajo el encabezamiento $P.Q$, aparece asimismo una «v» bajo el encabezamiento $P \vee Q$. De hecho cabría tomar la noción de implicación, o necesidad relativa, como la noción básica de que las tablas de verdad han de dar cuenta, añadiendo que las verdades lógicas —o proposiciones absolutamente necesarias— son justamente las proposiciones implicadas por cualesquiera otras. Nosotros ya hemos visto que las definiciones tabulares de las funciones de verdad se podían entender como formulaciones compendiadas de reglas. Y en realidad hay mucho que decir en favor este modo de entenderlas, en primer lugar porque se compadece bien con la concepción tradicional de la lógica y, en segundo, porque la noción de definición implícita por medio de reglas de inferencia resulta asimismo aplicable a aquella parte de la lógica general que no podría ser presentada por recurso a las tablas de verdad. Una proposición universal se asemeja en algunos aspectos a una conjunción, de la misma manera que una proposición existencial se asemeja en algunos aspectos a una disyunción; pero las posibilidades a tener en cuenta cuando formulamos una proposición general de uno u otro género pudieran ser en ocasiones infinitas, en cuyo caso la técnica de la tabulación sería inservible.

15 § 16, * 100.

En su *Logische Syntax der Sprache* [16] (editada por vez primera en 1934), R. Carnap comentó inspiradamente que no hay diferencia de principio entre los lógicos que se sirven a un tiempo de reglas y de axiomas y aquellos otros que presentan la lógica únicamente a base de reglas de inferencia. Como observara Carnap, cualquier fórmula que haya de ser tomada por axioma habrá de presentarse acompañada de alguna explanación del cometido que le corresponde desempeñar; y semejante explanación equivaldrá de hecho a una regla en virtud de la cual quepa inferir la proposición expresada por la fórmula a partir de cualquier proposición o, en la terminología técnica de Carnap, a partir de la clase nula de las premisas, que es lo que todas las clases de premisas comparten en común. Para decirlo en dos palabras, la lógica consiste esencialmente en una ciencia de principios de segundo orden.

Combinando esta sugerencia con el recurso a los esquemas axiomáticos de von Neumann, podríamos presentar el siguiente conjunto de seis reglas como una alternativa a la versión de la lógica ofrecida por Frege en su *Begriffsschrift:*

1. $\dfrac{P \supset Q \quad P}{Q}$

2. $\dfrac{*}{P \supset (Q \supset P)}$

3. $\dfrac{*}{[P \supset (Q \supset R)] \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]}$

4. $\dfrac{*}{(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)}$

5. $\dfrac{*}{(x)Fx \supset FY}$

6. $\dfrac{P \supset Fx}{P \supset (x)Fx}$, siempre que x no intervenga libre en P.

En este sistema, el asterisco impreso encima de la raya de inferencia de un esquema indica el lugar en que cabría emplazar cualquier premisa que elijamos, por lo que su introducción equivaldría a admitir la posibilidad de aseverar sin más aquellas proposiciones que se ajusten al patrón exhibido en la parte inferior de dicho esquema inferencial. Si a alguien no le agradara este modo de hablar, podría seguir a von Neumann y describir tales proposiciones como axiomas; pero, aparte otras consideraciones, tal denominación resultaría escasamente afortunada en nuestro caso, dado que los axiomas se conciben de ordinario como independientes los unos de los otros, mientras que esas proposiciones no serían siempre independientes entre sí por relación al *modus ponens*. Si R y S, por ejemplo, representasen signos proposicionales cualesquiera, la regla (2) antes citada nos permitiría formular, entre otras muchas, las tres siguientes aserciones:

$$R \supset (S \supset R)$$
$$(S \supset R) \supset [R \supset (S \supset R)]$$
$$[R \supset (S \supset R)] \supset \{(S \supset R) \supset [R \supset (S \supset R)]\},$$

de las que la segunda podría ser inferida a partir de la primera y la tercera por medio de la regla (1). Es preferible, por lo tanto, contentarnos con describir a todas esas aserciones como *truismos* o verdades palmarias de la lógica.

[16] §§ 31 y 47.

A la hora de aplicar la lógica a contenidos extralógicos, las letras mayúsculas de nuestros esquemas de inferencia habrán de ser reemplazadas por genuinas expresiones de proposiciones acerca de esos contenidos, procediéndose luego a realizar las inferencias permitidas por las reglas de que se trate en cada caso. Mas cuando lo que nos ocupe sea la elaboración de la propia lógica, ya no nos interesaremos por la derivación de consecuencias a partir de premisas pertenecientes a otras ciencias, sino sólo por la derivación de nuevas y quizá más complicadas reglas de inferencia a partir de las iniciales. Ya que estas reglas constituyen principios de segundo orden acerca de relaciones entre proposiciones, la derivación de reglas a partir de reglas tendría que envolver principios de tercer orden. Mas, sin embargo, cabe presentarlas de una manera más sencilla recurriendo a la deducción esquemática de la que ya Crisipo se sirvió en su elaboración de la lógica elemental. He aquí, a título de muestra, una prueba de la sencilla

regla $\dfrac{Fx}{(x)Fx}$ que adaptamos a este procedimiento a partir de la demostra-

tración originaria de Bernays [17]:

$$\dfrac{Fx \qquad \dfrac{\dfrac{*}{Fx \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset Fx\}}(2)}{[R \supset (S \supset R)] \supset Fx}(1)}{\dfrac{[R \supset (S \supset R)] \supset (x)\,Fx}{(x)Fx}(6) \qquad \dfrac{*}{R \supset (S \supset R)}\begin{matrix}(2)\\(1)\end{matrix}}$$

Los numerales que figuran a los extremos de las líneas horizontales sirven para indicar qué esquemas básicos son los utilizados para facilitar cada uno de los pasos deductivos; por lo que está claro que, en orden a hacer posible la utilización de la regla (6) a mitad de la prueba, habrá que dar desde un comienzo por supuesto que las letras R y S no constituyen abreviaturas de expresiones que contengan a x libre. Pero, aparte de esta última, no se imponen otras restricciones a la interpretación de las letras esquemáticas (salvo, naturalmente, aquellas que resulten inexcusables para la preservación del sentido de las diversas expresiones y la transición de unas a otras), de suerte que la argumentación en su conjunto comporta una satisfactoria justificación de la regla $\dfrac{Fx}{(x)Fx}$. Para poder servirnos de esta regla tendrá que ser correcto —como sucede obviamente en nuestro caso— hacerlo de las reglas (1), (2) y (6) a la manera como acaba de indicarse más arriba.

Aparte de por el método seguido en dicha prueba, nuestro ejemplo es interesante por ilustrar el tránsito de las variables libres a las ligadas en la expresión de la universalidad. Ya que la universalidad que entra aquí en juego corresponde con propiedad a las proposiciones de la argumentación

[17] Hilbert y Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, c. III, § 6 regla γ'

considerada, no nos habremos desviado para nada de nuestro propósito inicial de servirnos siempre que sea posible de letras esquemáticas. Pero el lector podría razonablemente preguntarnos de dónde hemos sacado las fórmulas con variables libres a partir de las cuales nos sería dado argumentar de acuerdo con la regla reseñada. La respuesta será que, desde el punto de vista de la lógica general, aquellas fórmulas cuyas designaciones hayan sido consistentemente sustituidas por variables libres podrían considerarse ejemplificaciones de la misma estructura que las correspondientes fórmulas originarias. A primera vista, semejante interpretación de la expresión «de la misma estructura» resulta un tanto sorprendente, ya que una fórmula que exprese la universalidad por medio de una variable libre diferirá obviamente en cuanto a su carácter lógico de cualesquiera de las fórmulas implicadas por ella. Pero, en nuestro caso, estamos autorizados a reducir la identidad estructural entre una y otras a su semejanza gramatical en todos los respectos salvo por lo que se refiere al uso de variables libres, tal y como podría mostrarlo un examen más detallado del ejemplo antes citado. En efecto, de acuerdo con la regla (2) podremos aseverar cualquier proposición expresable de la forma $P \supset (Q \supset P)$, y otro tanto cabrá hacer con cualquier proposición expresable de la forma $P \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset P\}$; pero todas aquellas proposiciones cuyas expresiones difieran entre sí únicamente al modo como lo hacen $FX \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset FX\}$ y $FY \supset \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset FY\}$, donde X e Y designen cosas diferentes, revestirán también aquella forma, lo que habrá de permitir, en consecuencia, que nos sirvamos de la expresión $Fx \supset \{[R \supset (S \supset R)] \supset Fx\}$ con el propósito de aseverarlas conjuntamente. Y es porque cada una de ellas podría ser aseverada en virtud de la regla (2) por lo que asimismo podrá serlo la proposición universal expresada por medio de la introducción de una variable libre en el lugar de una designación. Es probable que sea la presencia de este género de razonamientos en el dominio de la matemática lo que ha llevado a algunos matemáticos a decir que una variable denota ambiguamente todos sus diversos valores. Por nuestra parte, podríamos dar razón más convenientemente de los méritos de dicha notación diciendo que se trata de la adecuada expresión de un resultado de la inducción intuitiva. Pues es precisamente aquella característica de las proposiciones singulares que justifica nuestra generalización lo que se halla representado en la estructura preservada por la expresión de la citada generalización.

Para poder sacar partido de este recurso en otros contextos cabría asumir fundadamente que la regla (5) nos permite aseverar todas las proposiciones expresables bajo la forma $(x)Fx \supset Fy$. Esto es, cuandoquiera que ello resulte conveniente, podremos insertar una variable libre en vez de una auténtica designación en el lugar indicado por la letra esquemática Y de aquella regla. Y si, *mutatis mutandis*, nos permitiéramos una libertad similar en relación con *todas* nuestras letras esquemáticas, acabaríamos efectivamente restableciendo un cálculo del tipo del de Frege, Whitehead y Russell. Pues podríamos entonces escribir

$$p \supset (q \supset p)$$
$$[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$
$$(\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p)$$
$$(x)fx \supset fy$$

como expresión de las proposiciones obtenidas por medio de las reglas (2), (3), (4) y (5), pasando luego a derivar todas las demás fórmulas susceptibles de aserción a partir de estas últimas tomadas por premisas. En este contexto nos sería dado disponer, naturalmente, de las acostumbradas reglas de sustitución a título de reglas derivadas, puesto que toda fórmula resultante de la sustitución de una variable libre habrá de constituir una ejemplificación de cualquier esquema ejemplificado por la fórmula originaria, con lo que cabría acreditarla como un truismo lógico si aquella última pudiera ser acreditada como tal en virtud de su estructura. Tal vez quepa objetar que semejante modo de construir un cálculo lógico con variables libres entraña la discutible admisión de dos tipos de ejemplificaciones de nuestros esquemas básicos, a saber, mediante fórmulas desprovistas de variables libres y fórmulas provistas de tales variables. Pero es importante no olvidar que el método fregeano de presentación de la lógica requería en cualquier caso de un recurso análogo. Pues, como ya sabemos, la sustitución de fórmulas que contengan variables libres en los sistemas de Frege y de sus seguidores podría llevar o bien a fórmulas en las que no figuren variables libres o bien a otras fórmulas que asimismo las contengan. Cuando la lógica se considera como una teoría abstracta independientemente de su posible aplicación, sólo se toma en cuenta el segundo de esos dos géneros de sustitución; mas cuandoquiera que el cálculo se haya de aplicar a la prueba de aserciones extralógicas, el primer género de sustitución resultará esencial. Y si opusiéramos reparos a esta duplicidad, la única salida consistiría en abandonar el programa de presentación de la lógica primaria como una teoría que ha de envolver proposiciones universales de primer orden y contentarnos con ofrecer una serie de *reglas* universales como las formuladas más arriba. Pues las variables libres únicamente intervendrían en nuestra lógica al servicio del cometido que hemos visto les incumbía en la regla (6) y el ejemplo de derivación antes transcrito, a saber, el cometido de poner de relieve la necesidad de una inducción intuitiva en el dominio de la teoría de la cuantificación, o lógica general, de la que para nada se precisa en el dominio de la lógica primaria. Pero, una vez llegados a este punto, todavía queda preguntarnos qué sistema de reglas es el más obvio y natural.

3. Deducción natural y desenvolvimiento.

En 1934 G. Gentzen propuso un sistema de reglas para la deducción natural [18]. En una ulterior sección de este mismo trabajo, Gentzen demostraba que cualquier prueba llevada a cabo en un sistema afín de lógica podría ser reducida a una forma normal en la que no figure ningún «corte» y sea en algún sentido la más directa posible. Este teorema, al que Gentzen dio el nombre de «teorema fundamental» (*Hauptsatz*), es importante en conexión con la prueba de la consistencia de la teoría numérica ofrecida posteriormente por el autor, por lo que su interés quizás contribuyera eventualmente a eclipsar el de su primer sistema. En el simbolismo adop-

[18] "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift*, XXXIX (1934), pp. 176-210, 405-31.

tado por nosotros, las reglas de este primer sistema vendrían a formularse como sigue:

$$(1)\ \frac{P \quad Q}{P.Q} \qquad (2a)\ \frac{P.Q}{P} \quad (2b)\ \frac{P.Q}{Q}$$

$$(3a)\ \frac{P}{P \vee Q} \quad (3b)\ \frac{Q}{P \vee Q} \qquad (4)\ \frac{P \vee Q \quad P/R \quad Q/R}{R}$$

$$(5)\ \frac{P/\dagger}{\sim P} \qquad (6a)\ \frac{P \quad \sim P}{\dagger} \quad (6b)\ \frac{\sim\sim P}{P}$$

$$(7)\ \frac{P/Q}{P \supset Q} \qquad (8)\ \frac{P \quad P \supset Q}{Q}$$

$$(9)\ \frac{Fx}{(x)Fx} \qquad (10)\ \frac{(x)Fx}{FY}$$

$$(11)\ \frac{FY}{(\exists x)Fx} \qquad (12)\ \frac{(\exists x)Fx \quad Fx/P}{P}$$

Cada regla es presentada aquí por medio de un esquema, siendo las de la izquierda reglas para la introducción de los signos formales en tanto las de la derecha son reglas para su eliminación. En su mayor parte, tales reglas son fáciles de entender; pero hay algunos puntos que requieren un comentario.

El obelisco que aparece en las reglas (5) y (6a) representa «lo falso» (o, como tal vez sería mejor decir, «lo absurdo»), correspondiéndole en la presentación de Gentzen el esquema adicional $\frac{\dagger}{P}$, que habría de leerse «Si se admite lo falso, lo mismo habría que hacer con cualquier otra proposición». La *Y* de las reglas (10) y (11) es una letra esquemática como el resto de las mayúsculas, pero la *x* que figura en la parte superior de la regla (9), así como la que en la regla (12) interviene en *Fx/P*, son variables libres cuyo alcance no se extiende por debajo de la correspondiente raya horizontal. La barra inclinada utilizada en la formulación de las reglas (4), (5), (7) y (12) podría interpretarse como una abreviatura de «implica». Se halla, naturalmente, destinada a sugerir la raya horizontal de un esquema de inferencia; mas, ya que desempeña el papel gramatical de un verbo, los signos que la flanquean a izquierda y derecha han de ser entendidos como nombres, esto es, como designaciones de proposiciones. Una versión completa del enunciado de una implicación tendría que revestir por consiguiente la forma §*P*/§*Q*, donde el signo § constituiría una abreviatura de «que» o «la proposición de que»; pero, para nuestros efectos, podremos adoptar la convención de que tal signo § quede absorbido por la barra inclinada de análoga manera a como la conjunción «que» quedaría absorbida por el verbo «afirma» y la subsiguiente construcción de infinitivo en la oración castellana «Fulano afirma haber hecho tal cosa». En uno y otro caso la simplificación conseguida no comporta ninguna ambigüedad. Gentzen, que se sirve de la notación $\frac{[P]}{Q}$ en lugar de *P*/*Q*,

entiende que la letra que aparece entre corchetes representa una suposición de la que se deriva una consecuencia [19]. Pero el sentido de ambas notaciones es el mismo, ya que lo que se llama a veces la derivación de una consecuencia a partir de una suposición es, en realidad, el proceso en el curso del cual nos persuadimos de que la suposición implica la consecuencia.

Parece claro que la presentación de la lógica por parte de Gentzen resulta considerablemente más natural que la de Frege, Whitehead y Russell. Cierto es que el número de sus reglas es mayor que el de las reglas y axiomas empleados en los *Principia Mathematica,* pero aquí cada signo se halla introducido por separado y es posible probar todas las equivalencias establecidas en los *Principia Mathematica* como definiciones de los signos no tomados por primitivos. Más aún, por un procedimiento semejante al seguido por Crisipo en la elaboración de su sistema de la lógica elemental cabrá extraer nuevos esquemas de inferencia a partir de los considerados como básicos. Así, podríamos probar que $P.Q/P \vee Q$ por recurso al esqueleto argumental

$$\frac{P.Q}{P}(2a)$$

$$\frac{}{P \vee Q}(3a),$$

donde los numerales que figuran a los extremos de las rayas horizontales indican los esquemas básicos aducidos para facilitar los pasos deductivos. Y, siempre que lo deseemos, podremos asimismo derivar la estructura enunciativa de una verdad lógica a partir de un esquema de inferencia, ya sea básico o derivado, mediante la aplicación de la regla (7), que es el principio de condicionalización ya usado por Crisipo.

En contraste con cuanto acaba de decirse, hay que apuntar también varios defectos en el sistema de Gentzen. Las reglas (4), (5), (7) y (12) dependen de algún modo todas ellas de otras reglas. Pues, en efecto, lo que se sigue de una suposición ha de seguirse de acuerdo con alguna regla; y ésta no podrá ser, como es obvio, la propia regla formulada con ayuda de la suposición. ¿Por qué juzgaría Gentzen necesario introducir tales complicaciones justo en esos lugares? La respuesta podría proporcionárnosla una comparación entre las reglas de la conjunción y la disyunción. Es bien sabido que, en el álgebra de la lógica, los signos de la conjunción y la disyunción son duales entre sí; y, sin embargo, la regla (4) que facilita la eliminación del signo de disyunción no se corresponde con la regla (1), encargada de facilitar la introducción del signo de conjunción, de análoga manera a como (3a) y (3b) —reglas para la introducción del signo de disyunción— se corresponden con (2a) y (2b), reglas para la eliminación

[19] El mismo año, S. Jaskowski compuso independientemente un trabajo "On the Rules of Supposition in Formal Logic", *Studia Logica,* n. 1 (Varsovia, 1934), en el que se elaboran los resultados obtenidos, ya en 1926, en el seminario de J. Lukasiewicz. Las presentaciones ulteriores de la deducción natural siguen el método de exposición de Jaskowski con preferencia al de Gentzen, pero el modo de proceder de este último reviste para nosotros el aliciente de sugerir la teoría del desenvolvimiento desarrollada más abajo.

del signo de conjunción. Si tratáramos de encontrar alguna regla que satisfaga esa correspondencia en los términos requeridos, obtendríamos

$$\frac{P \vee Q}{P \quad Q},$$

esto es, una serie de signos dispuestos de tal modo que se haría imposible interpretar a su conjunto como un esquema de inferencia, ya que bajo la raya horizontal figurarán dos expresiones proposicionales. Cabría, ciertamente, estipular una convención en virtud de la cual pudiera interpretarse esa disposición de signos como la confluencia de dos esquemas de inferencia (esto es, cabría considerarla como un modo de decir que cada una de las expresiones proposicionales que figuran bajo la raya horizontal pueden ser inferidas por igual a partir de la expresión proposicional que figura encima de esa raya). Pero eso no sería, en ningún caso, lo que deseábamos hallar, ya que equivale a confundir $P \vee Q$ con $P.Q$. En pocas palabras, estas curiosas características del sistema de Gentzen parecen haberle sido impuestas por el hecho evidente de que una inferencia no admite más que una conclusión aunque puede poseer en cambio dos o más premisas. Es probable que sea este mismo hecho lo que impidiera al Pseudo-Escoto completar su caracterización de las *consequentiae* paradójicas con la sencilla prueba de que una proposición formalmente necesaria podría ser formalmente derivada de cualquier proposición [20].

Con vistas a perfeccionar la anterior presentación de los resultados de Gentzen, vamos a proceder en lo que sigue a desarrollar una idea sugerida por la segunda sección de su trabajo, considerando ahora la derivación o inferencia deductiva como un caso especial de lo que llamaremos desenvolvimiento (*development*)*. No se cuenta por desgracia con una terminología establecida a este respecto, mas la noción de «desenvolvimiento» podría metafóricamente describirse como el despliegue de un cierto dominio en el que es menester que la verdad se dé si han de aceptarse determinadas premisas. Cuando una persona, tras de considerar ciertas premisas —expresadas acaso por P y Q—, advierte que ciertas otras proposiciones —expresadas acaso por R y S— no podrían ser falsas todas si las premisas son todas verdaderas, cabrá decir de ella que se está refiriendo al desenvolvimiento de las premisas en cuestión. Ninguna de las dos proposiciones expresadas por R y S constituiría la conclusión de una inferencia, pero podría considerárselas a ambas como los límites provisionales del desenvolvimiento referido. Aunque por conveniencia cupiese suponer que se hallan expresadas por medio de oraciones en modo indicativo, se ha de sobrentender que ni una ni otra son objeto de aserción en el contexto del desenvolvimiento. Con el fin de hacer esto patente se podría, si se quiere, acompañar a tales expresiones de un signo de interrogación; pero en lo que sigue no tendremos necesidad de adoptar esa precaución, dado que las correspondientes fórmulas serán fáciles de identificar en cuanto límites por su posición en las tablas de desenvolvimiento que procederemos a construir.

---

[20] Véase más arriba, pp. 262-63

* Cf. la nota al pie de la pág. 384 *(T.)*

Un caso sumamente simple de desenvolvimiento pudiera revestir la forma

$$\frac{P \quad Q}{R \quad S},$$

pero entre las fórmulas iniciales que ofician de premisas y las fórmulas terminales que ofician como límites cabría que se dieran numerosas expresiones intermedias, esto es, expresiones que podrían figurar a uno u otro lado de nuevas rayas horizontales surgidas por ramificación. Cuando un desenvolvimiento tenga una única fórmula terminal, aun si ésta se repite más de una vez al pie de diferentes ramas descendentes, se dirá que constituye una derivación de la proposición expresada por dicha fórmula terminal. Es obvio que un desenvolvimiento que no constituya una derivación podrá ser invariablemente proseguido hasta convertirlo en tal, a saber, mediante la adición a cada rama descendente de una fórmula que sea la disyunción de todas las fórmulas terminales disponibles. Si una derivación carece de premisas o, para ser más exactos, no posee ninguna premisa que no podamos reemplazar por cualquier otra, se tratará de una demostración. Todas estas relaciones serán puestas en claro tan pronto se las haga plasmar en unos cuantos ejemplos.

Así como se dice que una derivación es válida si las premisas implican la conclusión, de la misma manera se dirá que un desenvolvimiento es válido si las premisas *envuelven* los límites a que este último conduce. Seguimos en este punto a Carnap, quien en su *Formalization of Logic* introdujo la denominación de «involucración lógica» (*logical involution*) o «envolvimiento» para designar la relación establecida entre dos conjuntos de proposiciones cuando es imposible que todas las del primer conjunto sean verdaderas y todas las del segundo sean falsas. La implicación se considerará, pues, ahora como el envolvimiento de un conjunto de proposiciones que únicamente tenga un miembro; y, así como la aserción de una implicación cobraría una forma del estilo de $P,Q/R$, de la misma manera la aserción de un envolvimiento que no constituya una implicación cobrará una forma del estilo de $P,Q/R,S$, donde las comas que aparecen antes y después de la barra servirán para separar las expresiones proposicionales de los conjuntos relevantes. En lo que sigue haremos libre uso de la convención según la cual una barra inclinada absorbe los prefijos del tipo de §, que de otro modo habría que asignar a todas las proposiciones que figuren a uno u otro lado de la misma; pero es importante recordar que, cuando la barra aparece flanqueada por expresiones desprovistas de prefijos, no por ello se la ha transformado en una conectiva o una partícula gramatical distinta de un verbo. Con otras palabras, una fórmula que responda a la estructura $P,Q/R,S$ constituirá sencillamente la abreviatura de una fórmula cuya estructura sea $\{\S P,\S Q\}/\{\S R,\S S\}$, fórmula que a su vez es una abreviatura de la oración *El conjunto que consta de la proposición de que-P y la proposición de que-Q envuelve el conjunto que consta de la proposición de que-R y la proposición de que-S*. Pero ya que es posible omitir tanto los prefijos cuanto los corchetes sin peligro de ambigüedad, lo haremos así siempre e incluso nos tomaremos la libertad de servirnos de los corchetes con otra finalidad de la que en seguida tendremos ocasión de hablar.

Los esquemas básicos de desenvolvimiento requeridos para la presentación de la lógica general son los siguientes:

$$(1)\ \frac{P\quad Q}{P.Q} \qquad (2a)\ \frac{P.Q}{P} \qquad (2b)\ \frac{P.Q}{Q}$$

$$(3a)\ \frac{P}{P\vee Q} \qquad (3b)\ \frac{Q}{P\vee Q} \qquad (4)\ \frac{P\vee Q}{P\quad Q}$$

$$(5)\ \frac{*}{P\quad \sim P} \qquad (6)\ \frac{P\quad \sim P}{*}$$

$$(7a)\ \frac{*}{P\quad P\supset Q} \qquad (7b)\ \frac{Q}{P\supset Q} \qquad (8)\ \frac{P\quad P\supset Q}{Q}$$

$$(9)\ \frac{\{Fx\}}{(x)Fx} \qquad (10)\ \frac{(x)Fx}{F\Upsilon}$$

$$(11)\ \frac{F\Upsilon}{(\exists x)Fx} \qquad (12)\ \frac{(\exists x)Fx}{\{Fx\}}$$

El asterisco que aparece en la formulación de las reglas (5), (6) y (7a) desempeña un papel muy semejante al del comodín en el juego de naipes, pues cabría entenderlo como un sustituto de cualquier expresión proposicional. Habría sido posible emplear en lugar suyo una mayúscula como *R*, pongamos por caso, pero el asterisco sirve aquí al propósito adicional de llamar la atención sobre las reglas mencionadas, que revisten especial importancia en el proceso de la demostración. Aparte esta presencia del asterisco, las únicas novedades que presentan nuestros esquemas son la aparición de dos expresiones bajo la raya horizontal de las reglas (4), (5) y (7a) —esto es, en los tres lugares en que Gentzen creía necesario introducir suposiciones— y el empleo del signo $\{Fx\}$ en las reglas (9) y (12) para representar el conjunto de todos los posibles valores de la función representada por Fx. Pero estos pocos cambios son suficientes para asegurar la simetría y permitir la introducción y la eliminación de cada uno de los signos formales mediante aquellas reglas que resulten más naturales en cada caso. Así, las reglas (5) y (6) constituyen respectivamente versiones de los principios de tercio excluso y no-contradicción, siendo todas las demás obvias con una única excepción.

La regla (7a), que pudiera a primera vista parecer algo curiosa, equivale en realidad al principio según el cual un condicional filónico es implicado por la negación de su antecedente. Si lo deseamos, será fácil obtener dicho principio a título de regla derivada:

(13) $\sim P/P\supset Q$.

Prueba.

$$\frac{\dfrac{\sim P\quad P}{*}(6)\qquad \dfrac{*}{P\supset Q}(7a)}{}.$$

Mas como regla básica es preferible la (7a), dado que la elegancia parece requerir que cada uno de los signos formales se introduzca por separado, esto es, que ninguna regla básica tenga que ver con más de un signo.

En líneas generales, siempre será posible derivar un nuevo esquema de desenvolvimiento a partir de otro ya dado transfiriendo una expresión proposicional al otro lado de la raya horizontal y añadiendo o quitando al mismo tiempo un signo de negación. He aquí, por ejemplo, un nuevo principio de desenvolvimiento derivado de la regla (4):

(14) $\sim Q/P, \sim(P \vee Q)$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vee Q}{P \quad Q}(4) \qquad \sim Q}{*}(6) \qquad \dfrac{*}{\sim(P \vee Q)}(5)}{}.$$

La coma inserta entre las dos expresiones que figuran tras la barra inclinada se destina, como se habrá pensado, a mostrar que esas dos expresiones se hallan extraídas del final de dos diversas ramas descendentes de derivación. De modo semejante, la coma emplazada entre dos expresiones que precedan a la barra se destinaría a indicar que dichas expresiones han de considerarse extraídas del inicio de dos diversas ramas ascendentes.

Al desenvolver nuestras derivaciones es esencial cuidar de que dos fórmulas-casos anteriormente conectadas, ya sea directamente por medio de una raya horizontal o indirectamente a través de varias de esas rayas, no vuelvan a ser puestas en conexión en ningún caso. Pues de no hacerlo así correríamos el riesgo de obtener patrones argumentales tan absurdos como éste:

$$\dfrac{\dfrac{P \vee Q}{P \quad Q}}{P.Q}$$

De modo semejante, si Fx apareciese introducida bajo $(\exists x)Fx$ no debería a su vez verse seguida de $(x)Fx$, pues el patrón igualmente absurdo

$$\dfrac{\dfrac{(\exists x)Fx}{Fx}}{(x)Fx}$$

envuelve el mismo error de enlazar mediante la horizontal inferior elementos que ya han sido enlazados por medio de la superior, a saber, aquellas fórmulas que expresan los valores de la función representada por Fx. El proceso de desenvolvimiento constituye una generalización de la técnica llamada por los matemáticos de la prueba por casos, y los casos que ya una vez han sido distinguidos como alternativos no deben volver nunca a ser tomados en conjunción.

El principio de condicionalización, que en el sistema de Gentzen intervenía como una regla básica, podría ser ahora fácilmente probado en el nuevo sistema. Pues, en efecto, para ello sólo se requiere que la propo-

sición expresada por $P \supset Q$ sea demostrable si la proposición expresada por P implica la proposición expresada por Q, lo que vendría a probarse como sigue:

(15) *Si* P/Q, *entonces* $*/P \supset Q$.
Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{Q}\,(\text{Hyp})}{P \supset Q}\,(7b)}{}\qquad \dfrac{*}{P \supset Q}\,(7a)$$

En orden a ampliar la ilustración del método de desenvolvimiento sería conveniente proceder a probar los axiomas y reglas de alguna versión bien conocida de la lógica general. En primer lugar, demostraremos la equivalencia de $P \supset Q$ y $\sim P \vee Q$ (esto es, la equivalencia utilizada en los *Principia Mathematica* para la definición del condicional filónico), cosa que puede hacerse por medio de las dos derivaciones que a continuación se indican:

(16) $P \supset Q / \sim P \vee Q$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{P \supset Q \quad P}{Q}\,(8)}{\sim P \vee Q}\,(3b) \qquad \dfrac{*}{\dfrac{\sim P}{\sim P \vee Q}\,(3a)}\,(5)$$

(17) $\sim P \vee Q / P \supset Q$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{\sim P \vee Q}{\sim P}}{P \supset Q}\,(13) \qquad \dfrac{\sim P \vee Q}{\dfrac{Q}{P \supset Q}\,(7b)}\,(4)$$

En segundo lugar, nos cercioraremos de contar con el *modus ponendo ponens*, o regla de separación, para el condicional filónico como una de nuestras reglas básicas, a saber, la regla (8). En tercer lugar, procederemos a pergeñar demostraciones de los cuatro axiomas independientes seleccionados por Whitehead y Russell para la lógica elemental o, más exactamente, pasaremos a demostrar la validez de los correspondientes esquemas axiomáticos:

(18) $*/(P \vee P) \supset P$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vee P}{P}\,(4)}{(P \vee P) \supset P}\,(7b) \qquad \dfrac{P}{(P \vee P) \supset P}\,(7b)}{}\qquad \dfrac{*}{(P \vee P) \supset P}\,(7a)$$

(19) $*/P \supset (P \vee Q)$.

Prueba

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P}{P \vee Q}\,(3a)}{P \supset (P \vee Q)}\,(7b)}{}\qquad \dfrac{*}{P \supset (P \vee Q)}\,(7a)$$

(20) $*/(P \vee Q) \supset (Q \vee P)$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{*}{P \vee Q}}{P}}{Q \vee P}\,(3b)}{(P \vee Q) \supset (Q \vee P)}\,(7b) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{*}{P \vee Q}}{Q}\,(4)}{Q \vee P}\,(3a)}{(P \vee Q) \supset (Q \vee P)}\,(7b).}{(P \vee Q) \supset (Q \vee P)}\,(7a)$$

(21) $*/(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{*}{Q \supset R}}{\sim Q \vee R}\,(16)}{\sim Q}\,(4)}{R}}{P \vee R}\,(3b)}{(P \vee Q) \supset (P \vee R)}\,(7b)}{(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(7b)}{(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(7a)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\sim Q}{P}}{P \vee R}\,(3a)}{(P \vee Q) \supset (P \vee R)}\,(7b)}{(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(7b). \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\sim Q}{\sim (P \vee Q)}\,(14)}{(P \vee Q) \supset (P \vee R)}\,(13)}{(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(7b)}{(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}\,(7b)$$

Y, finalmente, probaremos los dos esquemas axiomáticos adicionales y las dos reglas adicionales de inferencia requeridas para una versión de la lógica general como la de Hilbert y Ackermann, si bien sirviéndonos de esquemas axiomáticos en lugar de axiomas:

(22) $*/(x)Fx \supset FY$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{*}{(x)Fx}}{FY}\,(10)}{(x)Fx \supset FY}\,(7b).}{(x)Fx \supset FY}\,(7a)$$

(23) $*/FY \supset (\exists x)Fx$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{*}{FY}}{(\exists x)Fx}\,(11)}{FY \supset (\exists x)Fx}\,(7b).}{FY \supset (\exists x)Fx}\,(7a)$$

(24) Si P no contiene libre a x, entonces $P \supset Fx/P \supset (x)Fx$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \supset Fx \quad \dfrac{*}{P}}{Fx}\,(8)}{(x)Fx}\,(9)}{P \supset (x)Fx}\,(7b).}{P \supset (x)Fx}\,7(a)$$

(25) Si P no contiene libre a x, entonces $Fx \supset P/(\exists x)Fx \supset P$.

Prueba.

$$\dfrac{\dfrac{Fx \supset P \qquad \dfrac{\dfrac{*}{(\exists x)Fx}}{Fx}\,(12)}{P}\,(8)}{(\exists x)Fx \supset P}\,(7b). \qquad \dfrac{*}{(\exists x)Fx \supset P}\,(7a)$$

Todas las derivaciones que tienen lugar en estos desenvolvimientos son obvias y sencillas a excepción de las que integran las pruebas de (24) y (25), que requieren de alguna explicación. Cuando nosotros enunciamos la regla (9) de la forma $\dfrac{\{Fx\}}{(x)Fx}$ y la regla (12) de la forma $\dfrac{(\exists x)Fx}{\{Fx\}}$, nos servimos allí de los corchetes para indicar que estábamos tratando de la clase de todas las proposiciones que constituyen valores de la función Fx; esto es, lo que escribíamos mediante dichas fórmulas eran abreviaturas de

$$\dfrac{Fx_1 \qquad Fx_2 \qquad Fx_3 \qquad \text{etc.}}{(x)Fx}$$

y

$$\dfrac{(\exists x)Fx}{Fx_1 \qquad Fx_2 \qquad Fx_3 \qquad \text{etc.}},$$

donde Fx_1, Fx_2, Fx_3, etc., representarían los diversos valores de la función. Pero evidentemente es imposible construir tablas de desenvolvimiento con algo más que un número finito de ramas de derivación. ¿Cómo podríamos hacer uso, en ese caso, de reglas de carácter no-finito? Es claro que la única posibilidad a este respecto consistiría en probar algo con absoluta generalidad de todos los valores de la función expresada por Fx, sirviéndonos para ello del signo Fx *como si se tratara de la expresión de un valor semejante* más bien que de la expresión de la función. Se trata aquí del método de razonamiento con variables libres sobre el que llamamos la atención en nuestra última sección. Si consiguiéramos ahora demostrar por este procedimiento que la proposición expresada por P implica cada uno de los valores de la función expresada por Fx, podríamos probar que $P/(x)Fx$ mediante el desenvolvimiento

$$\dfrac{\dfrac{P}{Fx_1} \qquad \dfrac{P}{Fx_2} \qquad \dfrac{P}{Fx_3} \qquad \text{etc.}}{(x)Fx}.$$

Y, de manera semejante, si consiguiéramos demostrar por el mismo procedimiento que cada uno de los valores de la función expresada por Fx implica la proposición expresada por P, podríamos probar que $(\exists x)Fx/P$ mediante el desenvolvimiento

$$\frac{(\exists x)Fx}{\dfrac{Fx_1}{P} \quad \dfrac{Fx_2}{P} \quad \dfrac{Fx_3}{P} \quad \text{etc.}}$$

En uno y otro caso, por supuesto, es esencial que la letra *P* constituya realmente la expresión de una proposición y no la abreviatura de otra expresión que contenga a *x* libre, como ocurriría con *Fx*. Todo ello ha tenido que ser previsto en la precedente formulación de (24) y (25), lo que da a estos principios una apariencia un tanto más complicada que la de las reglas (9) y (12).

En sus *Methods of Logic*, que constituyen una reciente contribución al perfeccionamiento de las técnicas de la investigación lógica, Quine emplea una variante del método de las tablas de verdad para la lógica proposicional pero atiende a satisfacer las exigencias adicionales de la lógica general mediante cuatro reglas del tipo de las empleadas por nosotros. En particular, ofrece una Regla de Generalización Universal y una Regla de Instanciación Existencial que respectivamente se asemejan a nuestras reglas (9) y (12) (salvo por el hecho de no servirse de corchetes para hacer referencia a todos los valores de una función) y suministra instrucciones destinadas a impedir transiciones ilícitas como la del esquema

$$\frac{\dfrac{(\exists x)Fx}{Fx}}{(x)Fx}.$$

Junto con el recurso a las suposiciones introducido por Gentzen y Jaskowski, tales reglas simplifican indudablemente la construcción de pruebas. Pero el propio Quine habla de su procedimiento como de la irrupción en un mundo al otro lado del espejo [21]; y eso es lo que tendría que parecer a menos que lo interpretemos como un modo de obtener las ventajas que cabría obtener, en un estadio previo de la lógica, por medio de la construcción de desenvolvimientos con múltiples ramas de derivación.

4. La lógica modal.

En su *Begriffsschrift*, Frege había dejado de lado las distinciones modales como irrelevantes para su propósito. De acuerdo con su explicación, quienquiera que diga que algo ha de ser tal y tal estará indicando con las palabras «ha de ser» que tiene conocimiento de una verdad universal de la que cabría deducir la proposición en cuestión; y, de manera semejante, si afirmara que algo puede ser tal y tal indicaría que no conoce verdad alguna de la cual se siga la negación de esa proposición. Si Frege está en lo cierto, expresiones tales como «ha de ser» y «puede ser», «necesario» y «posible», envolverán una encubierta referencia al conocimiento humano, por lo que no tendrían cabida en el dominio de la pura lógica y sería erróneo suponer —con Aristóteles y sus seguidores— que al lógico le in-

[21] *Methods of Logic* (1ª ed.), p. 161.

cumba sentar reglas de inferencia específicamente destinadas a gobernar las relaciones entre proposiciones modales. Numerosos autores posteriores a Frege se han mostrado de acuerdo con esta concepción, pero otros han argüido que la obra de Frege tendría que ser complementada con una teoría de la modalidad, dado que —contra lo que pensara aquél— las nociones de necesidad e imposibilidad no competen a la epistemología ni a ninguna otra ciencia especial como no sea la propia lógica. En esta sección procederemos a preguntarnos por la oportunidad de semejante complemento.

El moderno interés por la lógica modal tiene su inicio con la obra de C. I. Lewis, publicada por vez primera en forma de libro en su *Survey of Symbolic Logic* de 1918. Esta teoría se conoce comúnmente con el nombre de lógica de la implicación estricta (*strict implication*) *, por haber sido originariamente propuesta frente a una caracterización de la implicación que Lewis juzgaba equivocada. En sus comentarios informales a su propio sistema de lógica, Whitehead y Russell se habían servido de la expresión *P implica materialmente Q* como traducción de $P \supset Q$, tratando de justificar este modo de hablar sobre la base de que

$$\frac{P \qquad P \supset Q}{Q}$$

constituye indudablemente un esquema inferencial válido. La denominación de implicación material (*material implication*) es confundente, porque sugiere erróneamente que el signo en forma de herradura expresa una conexión de significado entre los signos proposicionales que ofician al respecto de antecedente y consecuente. Y quienes se sirven de ella se arriesgan a incurrir en las paradojas de que una proposición falsa —simplemente por serlo— habrá de implicar cualquier proposición, en tanto que una proposición verdadera —de nuevo simplemente por serlo— habrá de ser implicada por cualquier proposición. Lewis sostenía, en cambio, que una proposición implicaría estrictamente otra si, y sólo si, es *imposible* que la primera sea verdadera y la segunda falsa, escribiendo $P \dashrightarrow Q$ para expresar tal relación entre las proposiciones expresadas por P y Q. En su definición de la implicación seguía a H. McColl, que había incluido algunas sugerencias sobre lógica modal en su *Symbolic Logic and its Applications* de 1906; y, como este último, admitía que, de acuerdo con su definición, una proposición imposible habría de implicar cualquier proposición y una proposición necesaria ser implicada por cualquier otra. Pero mantenía que estas dos consecuencias no eran realmente paradójicas y para nada atentaban contra su tesis de que la relación de implicación llamada estricta es la encargada de justificar la inferencia de una conclusión a partir de una premisa en un argumento deductivo. Algunos críticos han apuntado que lo que Lewis entendía por implicación cuando hablaba de su implicación estricta no es exactamente lo mismo que entendemos por implicación (*entailment*) cuando decimos que una proposición implica o hace que otra se siga de ella —donde la relación de «hacer seguirse» (*to entail*) sería la conversa de «seguirse de»—, puesto que podría darse entre dos proposiciones con

* Cf. la nota al pie de la pág. 3 *(T.)*

el carácter puramente extrínseco revelado por las paradojas. Pero ninguno de ellos logró nunca la exclusión de las así llamadas paradojas sin excluir al mismo tiempo una serie de argumentaciones que todo el mundo daría por válidas, como sucede por ejemplo con aquellas por medio de las cuales demostraba en la Edad Media el Pseudo-Escoto sus tesis paradójicas. Pues lo cierto es que nadie, al parecer, de cuantos han tomado parte en el debate ha reparado en la estrecha semejanza de las doctrinas aquí en disputa con las contiendas suscitadas sobre el particular por los lógicos antiguos y medievales.

La caracterización definitiva de la lógica modal por parte de Lewis se encuentra en su *Symbolic Logic* de 1932, publicada en colaboración con C. H. Langford. En ella se toma al símbolo $\Diamond$ como indefinido y se introduce $P \dashrightarrow Q$ como abreviatura de $\sim\Diamond(P.\sim Q)$. Los restantes símbolos indefinidos son los de la negación y la conjunción, proponiéndose las siguientes fórmulas axiomáticas para su uso en el curso de las deducciones:

B1. $p.q \dashrightarrow q.p$
B2. $p.q \dashrightarrow p$
B3. $p \dashrightarrow p.p.$
B4. $(p.q).r \dashrightarrow p.(q.r)$
B5. $p \dashrightarrow \sim\sim p.$
B6. $[(p \dashrightarrow q).(q \dashrightarrow r)] \dashrightarrow (p \dashrightarrow r)$
B7. $[p.(p \dashrightarrow q)] \dashrightarrow q$
B8. $\Diamond(p.q) \dashrightarrow \Diamond p$
B9. $(\exists p,q)[\sim(p \dashrightarrow q).\sim(p \dashrightarrow \sim q)]$

La letra B que figura al frente de cada una de ellas indica que estamos operando con el segundo conjunto de postulados de Lewis, en cuanto diferente del sistema de su *Survey*. Aparte de la sustitución de variables y el intercambio de expresiones estrictamente equivalentes, se cuenta con dos procedimientos reconocidos de derivación, uno de ellos ajustado al esquema

$$\frac{P \qquad P \dashrightarrow Q}{Q}$$

y el otro al esquema

$$\frac{P \quad Q}{P.Q}.$$

El primero de ellos, como se habrá pensado, es el patrón al que responde la regla de separación correspondiente al *modus ponens* con $P \dashrightarrow Q$ en lugar de $P \supset Q$; y el segundo, al que da Lewis el nombre de adjunción (*adjunction*), viene exigido en el sistema a causa de la modificación impuesta al primero. En los *Principia Mathematica*, que permiten la inferencia de Q a partir de P y $P \supset Q$, era posible pasarse sin la regla de adjunción de Lewis por constituir $p \supset [q \supset (p.q)]$ un teorema. Pero Lewis, aun admitiendo este teorema en su propio sistema, no puede servirse de él como premisa para la derivación de $P.Q$ a partir de P y Q, puesto que la implicación llamada material no es suficiente en su opinión para justificar la deducción y $p \dashrightarrow [q \dashrightarrow (p.q)]$ no constituye, por otra parte, un teorema del sistema. Con el concurso de la regla de separación arriba indicada, cada uno de sus axiomas se convierte en una regla de inferencia a partir de una premisa. Así, B2 —conjuntamente tomada con la versión de la regla correspondiente al *modus ponens* que Lewis nos ofrece— vendría a corresponderse con las reglas 2(a) de los sistemas presentados en nuestra última sección.

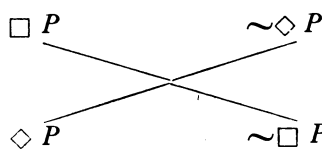
Las siete primeras proposiciones antes enumeradas podrían considerarse los axiomas básicos de la lógica modal de Lewis, dado que integran el sistema SI —que el autor considera el más «estricto»— y aparecen asimismo en todas las restantes variedades de sistemas objeto de discusión. Pero no constituyen un sistema completo en el sentido técnico del vocablo y dan pie a excesivas complicaciones al permitir la intervención de modalidades de orden superior, como por ejemplo la posibilidad de la necesidad y la necesidad de la posibilidad, etcétera. Esto último ha inducido a O. Becker [22] y otros autores a suplementar las ideas de Lewis con diversas sugerencias, las más interesantes de las cuales son, en la notación de este último, las siguientes:

C10. $\sim\Diamond\sim p \dashv \sim\Diamond\sim\sim\Diamond\sim p$ o $\Diamond\Diamond p \dashv \Diamond p$,
C11. $\Diamond p \dashv \sim\Diamond\sim\Diamond p$ o $\Diamond\sim\Diamond p \dashv \sim\Diamond p$.

Estas dos fórmulas se conocen respectivamente como los principios débil y fuerte de reducción, ya que ambos sirven —aunque no en la misma medida— para reducir la complejidad de las modalidades de orden superior. En conexión con los axiomas básicos, C11 es deductivamente equivalente a la conjunción de C10 con el principio de Brouwer $p \dashv \sim\Diamond\sim\Diamond p$. Si nos servimos de $\Box$ como abreviatura de $\sim\Diamond\sim$ (esto es, con el sentido de «es necesario que») y echamos mano de los principios de doble negación y contraposición para la implicación estricta, podremos expresarlos a ambos como sigue sin necesidad de negaciones:

C10. $\Box p \dashv \Box\Box p$,
C11. $\Diamond p \dashv \Box\Diamond p$.

Ya que cabe probar sus respectivos conversos, podríamos decir que el primero de esos principios autoriza la ecuación de la necesidad de una proposición con la necesidad de su necesidad, en tanto que el segundo permite la ecuación de la posibilidad de una proposición con la necesidad de su posibilidad. El efecto de la adición del primer principio, o principio débil, es dispensarnos de hablar de necesidades que no sean a su vez necesarias sino meramente contingentes o, si lo preferimos, obligarnos —en el caso de que deseásemos seguir sirviéndonos del adjetivo «necesario» en este último sentido— a reconocer que nuestro uso del mismo no se identifica con el del signo $\Box$ de la lógica modal. El efecto de la adición del segundo principio es convencernos de que todas las proposiciones modales han de ser necesariamente verdaderas o necesariamente falsas. Si lo adoptamos, sólo tendremos que admitir cuatro modalidades (aparte de la verdad y la falsedad, consideradas a veces como tales en razón de que la necesidad implica la verdad y la verdad implica la posibilidad), a saber, aquellas que figuran en las esquinas del siguiente cuadrado de la oposición modal:



22 "Zur Logik der Modalitäten", *Jahrbuch für Philosophie und phenomenologische Forschung*, XI (1930), pp. 497-548.

Pues, en efecto, todas las modalidades de segundo orden vendrían, sobre la base de nuestros dos principios, a quedar subsumidas en modalidades de primer orden. Así tendríamos, por ejemplo, la reducción $\Diamond\Box P=\Box P$, que al propio Becker le resulta ligeramente paradójica. Por lo que a Lewis respecta, se inclina a rechazar ambos principios de reducción y tolerar así la multiplicación de modalidades de orden superior.

P. Henle [23] ha demostrado que el más económico de los sistemas de lógica modal de Lewis, a saber, el sistema S5 (esto es, el sistema determinado por Bl-7 y C11), resulta equivalente a una variante del álgebra de Boole-Schröder (*no* el álgebra bivalente) cuyos elementos se interpreten como proposiciones y el signo modal $\Diamond$ sea introducido por medio de las reglas

$$\Diamond P=1 \text{ si, y sólo si, } P\neq 0,$$
$$\Diamond P=0 \text{ si, y sólo si, } P=0.$$

Para decirlo en dos palabras, este sistema —con su principio de reducción en sentido fuerte— constituye la realización de lo que Boole tenía *in mente* cuando en su *Mathematical Analysis of Logic* sugirió la oportunidad de hacer representar al signo 1 la suma de todas las posibilidades, a la que daba el nombre de Universo de la Proposición.

Aunque S5 es el más logrado de los sistemas estudiados por Lewis, ni éste ni ninguno de los otros sistemas conseguiría ofrecernos una completa caracterización de la implicación estricta sin el concurso de las reglas de Henle, puesto que todos sus axiomas seguirían siendo verdaderos si $\Diamond P$ se hiciese equivaler a P y se tomase el signo $\dashv$ por una mera variante tipográfica de $\supset$. Fue al parecer para excluir esta indeseable interpretación de su nuevo signo por lo que Lewis se creyó en la obligación de proponer el curioso axioma existencial

$$\text{B9.}\quad (\exists\, p,q)[\sim(p\dashv q).\sim(p\dashv\sim q).$$

El axioma quiere dar a entender que hay por lo menos dos proposiciones tales que la primera no implica para nada la verdad ni la falsedad de la segunda, y rige para la implicación estricta aunque no para la material. Pero difiere radicalmente por su género de los demás axiomas. Pues en tanto que éstos, conjuntamente tomados con los principios de sustitución, separación y adjunción de Lewis, permiten llevar a cabo sin restricciones toda clase de razonamientos que respondan a los patrones por ellos especificados, el axioma B9 restringe y hasta anula la universalidad expresada en los restantes mediante variables libres y su introducción equivale de hecho a *rechazar* la fórmula $(p\dashv q)\vee(p\dashv\sim q)$. El modo más sencillo de lograr lo que Lewis se propone consistiría quizá en decir directamente y sin rodeos que el esquema

$$\frac{P\supset Q}{P\dashv Q}$$

no es válido. Y no nos debe sorprender la necesidad de alguna precaución de este género en orden a excluir aquella indeseada interpretación de un sistema modal en el que el signo $\dashv$ se tome como indefinido. De la impli-

[23] Lewis and Langford, *Symbolic Logic*, p. 501.

cación material cabe ofrecer una caracterización completa mediante el establecimiento de las apropiadas reglas de inferencia, mas sólo porque se trata de una función de verdad. Pero, por lo que se refiere a la implicación estricta considerada a título de noción primitiva, todo lo más que cabría hacer por esa vía sería determinar aquellas propiedades que comparte en común con la implicación material. Por el contrario, y con la ayuda de la definición de implicación estricta arriba reseñada y las reglas de Henle, el sistema S5 resultaría completo y el axioma B9 se haría innecesario.

Se habrá observado que, en la presentación de su sistema, Lewis inserta el signo $\dashv$ entre expresiones proposicionales (o, más exactamente, entre variables que indican los lugares a rellenar por estas últimas) como si se tratara de un signo de la misma condición gramatical que el signo $\supset$; y que, de modo semejante, escribe el signo $\Diamond$ ante expresiones proposicionales tal y como lo podría hacer con el signo $\sim$. Si deseáramos parafrasear cada una de esas formulaciones por medio de oraciones castellanas de configuración aproximadamente similar, podríamos tal vez leer $P \dashv Q$ como *Si P, entonces Q* y $\Diamond P$ como *Posiblemente P*. Pues la forma condicional de la oración fue a menudo empleada en la antigüedad, tanto por Aristóteles como por los estoicos, para indicar la deducibilidad del consecuente a partir del antecedente, que es lo que Lewis pretende simbolizar con su signo de forma de anzuelo; y en la conversación ordinaria acostumbramos asimismo a prefijar el adverbio «posiblemente» a aquellas expresiones que gramaticalmente resultan susceptibles de ser consideradas como oraciones de una pieza. Pero lo que a Lewis le interesa mantener es, ante todo, que la deducibilidad de una conclusión a partir de una premisa en un argumento válido descansa en la vigencia entre las mismas de aquella relación a la que llama de implicación estricta, así como que dicha relación no puede definirse en términos veritativo-funcionales. En orden a hacer resaltar este objetivo podríamos leer $P \dashv Q$, cuando ello resulte conveniente, mediante la paráfrasis *La proposición de que-P implica estrictamente la proposición de que-Q*, pero sólo sobre la base de atribuir a Lewis la tácita adopción para su signo en forma de anzuelo de una convención por el estilo de la adoptada en nuestra última sección, cuando decíamos que la barra inclinada había de absorber el prefijo colocado al frente de una expresión proposicional con el fin de hacer de ella una designación. Y, partiendo de una suposición semejante por lo que se refiere al signo romboidal de Lewis, podríamos leer también, si lo deseamos, $\Diamond P$ como *Es posible que-P*. Lewis no entra a discutir la posibilidad de esta doble lectura de sus fórmulas, y quienes luego han seguido sus pasos acostumbran a hablar de la cuestión como si la elección entre una y otra fuera simple cuestión de gustos. Pero es importante no olvidar que la segunda da más exacta cuenta de los diversos factores conjugados en el programa de Lewis, por lo que hay que considerarla preferible desde un punto de vista filosófico.

Cuando Whitehead y Russell consideraban a $P \supset Q$ como el enunciado de una implicación material, parecían estar confundiendo entre sí dos diferentes cuestiones, a saber, (I) «¿Qué es lo que justifica la inferencia de la proposición de que-*Q* a partir de la proposición de que-*P*?» y (II) «¿Cuál será la más simple premisa adicional que, en conjunción con la premisa de que-*P*, resulte suficiente para inferir la conclusión de que-*Q*?».

Si la inferencia de la proposición de que-Q a partir de la proposición de que-P se hallase efectivamente justificada, cabría responder a la primera pregunta con el enunciado de una relación de implicación entre esas dos proposiciones; pero si se necesitara a tal efecto de una premisa suplementaria, no se daría ya ninguna implicación —estrictamente hablando— entre las dos proposiciones mencionadas y la única respuesta posible a la segunda pregunta consistiría en aducir la fórmula $P \supset Q$. Dicha fórmula se construye haciendo uso de los signos proposicionales P y Q, pero no versa *acerca* de las proposiciones por ellos expresadas. Ciertamente cabría reemplazarla por la fórmula equivalente *No-P o Q*, que a su vez podría ser expandida hasta hacerle cobrar la forma *No es el caso que-P o es el caso que-Q*, la cual contiene ya las designaciones proposicionales *que-P* y *que-Q*. Pero esta última fórmula no constituye un análisis del sentido de la primera, sino que se limita simplemente a reproducir más prolijamente su estructura. En cambio, la fórmula $P \dashrightarrow Q$ de Lewis se supone que versa *acerca* de las proposiciones expresadas por P y Q y que lo hace así precisamente por concebírsela como una adecuada respuesta a la primera de las preguntas antes citadas. Y, al traducirla en términos de la paráfrasis *La proposición de que-P implica estrictamente la proposición de que-Q*, podremos presumir justificadamente de haber analizado su sentido, dado que esta versión no se limita ya a reproducir idéntica estructura básica que la versión originaria, sino que llama la atención sobre una complejidad de la misma que estaba lejos de resultar apreciable a primera vista.

El que Lewis no aclarase este detalle quizá se deba a su errónea coincidencia con Whitehead y Russell en considerar necesario el recurso a enunciados de implicación como premisas de la regla correspondiente al *modus ponens*, lo que le llevaría a imitar su práctica de cerca al tiempo que propugnaba la distinción entre implicación estricta y material. Parece que, en efecto, la motivación principal que le impulsó a elaborar su teoría del modo como lo hizo fue su deseo de reemplazar la implicación material por la implicación estricta en el seno de la regla correspondiente al *modus ponens*, por lo que no es sorprendente que sus ataques al sistema de la implicación material (en cuanto diferente de su errónea denominación) trastruequen los propósitos de su argumentación. Es evidente que a nadie se le ocurriría proponer un argumento de la forma

$$\frac{P \qquad P \supset Q}{Q}$$

si de antemano hubiera establecido la verdad de la segunda premisa, ya sea por haber descubierto la falsedad de la primera premisa, ya sea por haber logrado determinar la verdad de la conclusión. Pues, en el primer caso, no cabría hacer objeto de aserción a la primera premisa; y, en el segundo, no se necesitaría para nada un argumento en orden a alcanzar la conclusión. Cuando en los *Principia Mathematica* aparece como premisa un condicional filónico de la forma $P \supset Q$, sólo cabría considerarlo necesario si fuese lógicamente necesario; y es sobre esta base, justamente, como se hace posible la aserción de $P \dashrightarrow Q$. De acuerdo con las definiciones de Lewis, tendríamos en efecto

$$(P \dashrightarrow Q) = \Box(P \supset Q),$$

donde $\Box$ significa la necesidad lógica. El propio Lewis llega a reconocerlo así cuando asegura que $P \dashrightarrow Q$ únicamente rige en su sistema cuando $P \supset Q$ es una tautología [24]. Si por «tautología» se entiende aquí un truísmo o verdad palmaria de la lógica no-modal, lo que Lewis sostiene es incorrecto, puesto que los axiomas B6 y B7 podrían suministrarnos contraejemplos. Pero lo que sí es cierto es que $P \dashrightarrow Q$ nunca se podrá dar a menos que $P \supset Q$ sea una verdad lógica. Contra lo que parece creer Lewis, el mérito de su lógica modal no estriba, por lo tanto, en ofrecernos un método de razonamiento alternativo y de algún modo superior al de Frege, sino más bien en ocuparse expresamente de la noción de necesidad que todos los lógicos —incluido Frege— acostumbran a dar por presupuesta.

Con el fin de poner en claro la relación entre la lógica de Lewis y la de Frege o los *Principia Mathematica*, diversos autores han presentado alguno o varios de los sistemas del primero como derivados de los *Principia* con la ayuda de determinados axiomas o reglas de inferencia suplementarios [25]. Así, para la derivación del sistema de Lewis en que tiene cabida el principio de reducción en sentido débil —a saber, el sistema S4—, Gödel propone añadir a la lógica primaria de los *Principia* las tres siguientes fórmulas axiomáticas de nuevo cuño

1. $\Box p \supset p$
2. $\Box p \supset [\Box (p \supset q) \supset \Box q]$
3. $\Box p \supset \Box \Box p$,

en las que $\Box$ ha de tomarse como un signo primitivo [26], más la nueva regla según la cual si P es una tesis del sistema resultante, será también posible aseverar $\Box P$. Valiéndonos ahora de la misma notación, el principio fuerte de reducción de S5 quedaría formulado como sigue:

4. $\sim \Box p \supset \Box \sim \Box p$.

Esta versión reviste una elegante simplicidad, y la nueva regla introducida contribuye a poner de manifiesto el hecho interesante de que la necesidad estudiada por la lógica modal constituye una propiedad de las mismas proposiciones que la integran. Mas no cabe decir que esta presentación ayude mucho a hacernos cargo del lugar de la lógica modal en el conjunto de las teorías deductivas. Por el contrario, el recurso a un sistema axiomático de semejante género para la lógica modal ha conducido a algunos filósofos a pensar que esta última únicamente es lógica en el sentido amplio y laxo en que quizás quepa hablar también de lógica deóntica (para referirnos a la teoría general axiomatizada de la obligación), de lógica de los tiempos (para referirnos a la teoría general axiomatizada de aquellas relaciones que en muchos idiomas se expresan mediante desinencias temporales) y hasta de lógica espacial (para referirnos a la geometría pura). Este hábito de pensamiento es desafortunado por distraer nuestra atención del género de consideraciones que serían verdaderamente relevantes para ayudarnos a apre-

[24] Ibid., p. 244.

[25] Por ejemplo, K. Gödel, "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, IV* (1932), pp. 39-40. Cf. G. H. von Wright, *An Essay in Modal Logic*, apéndice II.

[26] Gödel se sirve a estos efectos de la letra "B" (inicial de *beweisbar)* por el hecho de presentar el sistema en el contexto de un artículo sobre la lógica intuicionista, a que más adelante aludiremos.

ciar la índole lógica de la lógica modal y, de este modo, permitirnos adoptar una actitud ante el problema de los principios reductivos.

Como nosotros ya hemos visto, Lewis se inclina a rechazar ambos principios, pero confiesa que no está en situación de aducir razón alguna decisiva en favor de su punto de vista. Tras haber distinguido cinco sistemas que difieren entre sí, según nos dice, por su mayor o menor grado de astringencia, sugiere que los intereses de la investigación lógica habrían quedado probablemente mejor servidos de prestar atención a los sistemas más «estrictos» que no incluyen principios de reducción; pero afirma abiertamente que «los criterios de corrección de la inferencia lógica prevalecientes —la práctica de la deducción matemática, por ejemplo— no son lo suficientemente precisos ni críticos para determinar con claridad cuál de esos cinco sistemas sea el que mejor acierte a expresar los principios aceptables de la deducción» [27]. Esta observación es bien curiosa. Si ni siquiera es posible pronunciarnos acerca de la reducibilidad de las modalidades de orden superior a las de primer orden, ¿cómo poder pensar en zanjar la cuestión? ¿Qué clase de criterios habríamos de buscar y dónde esperaríamos encontrarlos?

Von Wright, operando con un sistema modal semejante al de Gödel, sugiere la conveniencia de comparar las modalidades aléticas con las epistémicas, esto es, las modalidades del tipo de las que manejaban Lewis y Becker con las expresadas en cláusulas del tipo de «se sabe que», comparación de la que extrae las siguientes consecuencias:

«El equivalente del Segundo Principio de Reducción para las modalidades epistémicas enuncia que, si no se sabe que una proposición sea falsa, se sabe entonces que no se sabe que esa proposición sea falsa. Esta manera de convertir la ignorancia en conocimiento es pura y simplemente inaceptable, y habría que considerarla por lo menos como una seria advertencia en contra de la suposición de que el Segundo Principio de Reducción sea verdadero para las modalidades aléticas» [28].

Pero de nuevo esta afirmación resulta harto curiosa. ¿Por qué habría de oponer la irreducibilidad de las que von Wright llama modalidades epistémicas de orden superior obstáculo ninguno al principio fuerte de reducción para las modalidades puramente lógicas?

En un trabajo ulterior, von Wright escribe:

«Nuestras 'intuiciones lógicas', por lo que se ve, no nos permiten resolver de manera concluyente el problema de la verdad que se ventila aquí. Una de las razones principales de esta limitación radica, me parece, en el hecho de que las expresiones modales de orden superior como 'posiblemente posible' o 'posiblemente imposible' difícilmente podrían ser objeto de algún *uso* en el discurso científico u ordinario (excepción hecha de la lógica modal). Un problema de primordial importancia es, por lo tanto, el de *encontrar un uso*, o algún género de 'equivalente' de ese uso, para las expresiones en cuestión (fuera del contexto de la lógica modal). Una vez conseguido ese propósito, el problema de la verdad arriba mencionado podrá ser abordado sobre bases más firmes» [29].

---

27 *Symbolic Logic*, pp. 501-2.
28 *An Essay in Modal Logic*, p. 77.
29 "Interpretations of Modal Logic", *Mind*, N. S., LVI (1952), pp. 153-77. La cita está tomada de la pág. 77 de la reimpresión en sus *Logical Studies*.

A continuación, y tras haber suministrado una interpretación en términos de procesos naturales que satisface los axiomas básicos de su lógica modal pero ninguno de los dos principios reductivos, prosigue escribiendo:

«Me parece que el hecho de poder contar con ilustraciones de este género en el dominio de los procesos naturales demuestra que ninguna de ambas identidades en cuestión podría aspirar a gozar de validez universal por lo que se refiere al concepto de lo posible (y de lo necesario) en la lógica modal, ni tampoco cabría rechazar a una ni otra como contraria a la 'auténtica' naturaleza de la modalidad» [30].

Esto último resulta todavía más curioso. Del hallazgo de un modelo que satisfaga algunos pero no todos los axiomas de un sistema formal no sería razonable concluir que ese sistema sea insatisfactorio en su conjunto en relación con el propósito radicalmente diferente para el que fue concecebido. Quien acepte el principio fuerte de reducción en el dominio de la *lógica* modal no se compromete por ello a defender la aplicación de ese principio a todos los usos efectivos de los adjetivos «posible» y «necesario», por no hablar de su aplicación a usos imaginarios o inventados.

Para hacernos una idea adecuada de la situación de la lógica modal dentro del universo de las teorías deductivas, detengámonos una vez más en la consideración de cuál sea el cometido que está llamado el lógico a desempeñar. El lógico desea presentarnos aquellas reglas o principios de inferencia que han de resultar válidos para toda clase de contenidos o materias, pero no puede enumerarlos por separado uno por uno porque están lejos de constituir un conjunto finito. Eso le lleva a seleccionar algunos principios de carácter muy general, haciendo luego ver cómo otros muchos se podrían derivar a partir de ellos. Naturalmente espera poder dar con un número reducido de principios generales de los que quepa extraer *todos* los demás principios de la lógica, y hemos de ver más adelante cómo Frege logró colmar esa ambición en el dominio de la lógica por él considerado. Pero lo que por el momento nos interesa examinar es la manera como el lógico procede a derivar dichos principios inferiores o secundarios a partir de los superiores o primarios.

En su reducción de todos los principios válidos del silogismo a *Barbara* y *Celarent*, Aristóteles nos ofrece una muestra de un cierto modo de razonar acerca de los principios lógicos en el que se recurre a algunos de los propios principios estudiados. Pues lo que hizo, en efecto, fue demostrar la validez de cada uno de los principios silogísticos otros que *Barbara* y *Celarent* poniendo de relieve cómo el resultado de aplicar uno de esos principios a un caso particular podía invariablemente conseguirse, dando un rodeo, por medio de la aplicación de *Barbara* o *Celarent* en unión de unos cuantos principios elementales de carácter no-silogístico. Para ello no creyó necesario proceder a una generalización expresa acerca de todos los diversos casos particulares, sino se limitó a asumir —con impecable corrección— que cualquier patrón argumental en que cupiese construir una deducción artificial a base de letras esquemáticas podría asimismo dar lugar, cuando ello resultase necesario, a una genuina deducción en la cual operemos con términos reales. Crisipo adoptaría el mismo plan al ocuparse de un dominio en el que el número de los patrones argumentales

[30] Ibid., p. 88.

válidos no es ya finito como lo era en la teoría silogística; y, por lo poco que conocemos de su obra, podemos conjeturar que supo aplicar con gran provecho dicho método. En la última sección tuvimos ocasión de comprobar cómo Frege y sus seguidores habían vuelto a poner una vez más en práctica esa técnica, si bien la derivación de nuevas reglas a partir de las primitivas con la ayuda de estas últimas se veía en ellos oscurecida por su proclividad a hablar de axiomas y teoremas de primer orden. En el sistema de los esquemas gentzenianos de inferencia natural (así como en el sistema de los esquemas de desenvolvimiento resultante de introducir determinadas modificaciones en el de Gentzen), el programa en cuestión era llevado a efecto con mayor claridad de lo que nunca lo había sido gracias a la construcción de árboles de prueba que permitían al lector el inmediato reconocimiento de la validación de una regla por otras.

No puede caber duda de lo apropiado de un procedimiento que conquistó el favor de tantos lógicos ilustres, pero también cabría la posibilidad de otra presentación alternativa de la lógica que acaso sea más explícita, aunque a primera vista pueda parecernos menos fácilmente comprensible. En ella nos las habríamos con tesis más bien que con esquemas de razonamiento, pero nuestras tesis serían principios correspondientes a esquemas válidos de inferencia (o desenvolvimiento), esto es, proposiciones de segundo orden concernientes a la relación de implicación (o envolvimiento) y no truísmos lógicos de primer orden como los axiomas de Frege, siéndonos dado proceder a derivar unos de otros de acuerdo con un principio de transitividad de orden superior. Lewis parece haber pensado alguna vez en tal programa, pues sus axiomas B1-5 constituyen ejemplos de principios iniciales y B6 representa una versión de la transitividad de la implicación. Pero, en lugar de considerar a cada una de esas proposiciones como un principio de inferencia, sólo se sirve de ellas a título de premisas de la regla correspondiente al *modus ponens*, en sustitución de las homólogas concebidas en términos de la implicación material. Y, recíprocamente, cuando desea servirse de su versión del *modus ponens* como premisa para la deducción de otros principios la añade a su lista bajo la forma del nuevo axioma B7, sin atender al hecho de que dicha versión se halla ya contenida en su enunciación de la regla correspondiente al *modus ponens*.

Si, según Lewis sostiene, la implicación estricta —a diferencia de la material— *justifica* la deducción, no habrá otra diferencia que la de vocabulario entre la aserción de que una proposición implica estrictamente otra y la aserción de que la inferencia de la segunda a partir de la primera es valida. ¿Por qué presenta entonces Lewis su cálculo como lo hace? La razón de ello parece estribar en su aceptación, como algo indiscutido y necesario, del estilo de exposición introducido por Frege y difundido por los *Principia* de Whitehead y Russell. En primer lugar, Lewis parece dar de entrada por sentado que su tarea primordial es la introducción de una conectiva proposicional que pueda reemplazar, en la regla correspondiente al *modus ponens*, al signo de la implicación material (o condicional filónico) erróneamente utilizado por Frege para tal menester. Esta presuposición le lleva de manera natural a distinguir en su propio sistema entre axiomas y reglas de inferencia, así como a ofrecer la definición

$$P \dashv Q =_{\text{def.}} \sim \Diamond (P . \sim Q)$$

como contrapartida de la definición

$$P \supset Q =_{\text{def.}} \sim (P . \sim Q).$$

En segundo lugar, asume que una tesis formulada en términos de implicación estricta, al igual que una tesis formulada en términos de implicación material, ha de constar invariablemente de un solo elemento implicante y un solo elemento implicado. Mas ya que es imposible presentar a la totalidad de la lógica como una teoría de la inferencia a partir de una única premisa, se ve obligado a introducir una regla como la de adjunción carente de posible analogado entre sus tesis de la implicación estricta. En tercer lugar, comparte con Frege la creencia de que cualquier enunciado que quepa al lógico considerar de su incumbencia ha de consistir en una tesis universal del tipo de $p.q \dashv p$ más bien que en la aserción de que toda proposición de la forma $P.Q \dashv P$ es verdadera. Esta creencia le conduce a adoptar una regla de sustitución de estatuto y condición enteramente diferentes a los del resto de sus tesis. En pocas palabras, no parece sino que cada regla de inferencia añadida por Lewis a sus axiomas obedezca a la necesidad de levantar a este nivel alguna restricción previamente impuesta por la formulación de esos axiomas.

Tratemos, pues, de liberarnos del influjo de una tradición como ésta, de orígenes relativamente recientes, y procedamos a construir un sistema de lógica modal en el que la noción de implicación se tome como fundamental y nos sea dado escribir $P,Q/P.Q$ como una versión alternativa del principio comúnmente expresado por la introducción del esquema de inferencia $\dfrac{P \quad Q}{P.Q}$. O, para decirlo en términos más generales, construyamos un sistema en que de un modo natural (esto es, intuitivamente obvio) se deriven unos principios de envolvimiento a partir de otros, a su vez seleccionados por su naturalidad. Y, en orden a delimitar nuestro problema, consideremos un primer intento de reproducir de forma explícita (esto es, sin basarnos en presuposiciones encubiertas) la argumentación exhibida en un sencillo esquema de desenvolvimiento como el que sigue a continuación:

$$\dfrac{\dfrac{P \supset Q \qquad \overset{*}{\overline{P}}\,(8)}{Q} \qquad \sim P\,(5)}{\overset{*}{\overline{\sim Q}}\,(6).}$$

Podríamos decir ahora que el principio $\sim Q, P \supset Q / \sim P$ se deriva en él de los principios indicados por los números que figuran a los extremos de las rayas horizontales, a saber, $*/P, \sim P$, $P \supset Q, P/Q$ y $Q, \sim Q/*$. Pero, al hablar en estos términos, estamos ya asumiendo que la posibilidad de formular correctamente un enunciado de la forma Γ/Δ (esto es, con una barra inclinada) depende por entero de la validez de un desenvolvimiento de la

forma $\frac{\Gamma}{\Delta}$. Por razones de conveniencia, nos servimos aquí de mayúsculas griegas para representar *series* de fórmulas, incluidas series nulas. Admitimos también la posibilidad de registrar el resultado de un desenvolvimiento como

$$\frac{\Gamma \quad \overline{\Theta \quad P \quad \Lambda}}{\Delta}$$

por medio de la fórmula $\Gamma,\Theta/\Delta,\Lambda$, en la que se ha omitido P por no constituir una fórmula inicial ni terminal del desenvolvimiento en su conjunto. Al escribir, por último, $\sim Q, P \supset Q/\sim P$ más bien que $P \supset Q, \sim Q/\sim P$, permitimos intercambiar a voluntad las posiciones de las fórmulas que aparecen a la izquierda de la barra inclinada. La explicitación de todas estas reglas de procedimiento daría lugar a la siguiente reformulación de segundo orden del argumento originario:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(6)}{Q, \sim Q/*}\text{(barra)}}{\sim Q, Q/*}\text{(intercambio)} \qquad \dfrac{\dfrac{(8)}{P \supset Q, P/Q}\text{(barra)} \qquad \dfrac{(5)}{*/P, \sim P}\text{(barra)}}{P \supset Q/Q, \sim P}\text{(omisión)}}{\sim Q, P \supset Q/\sim P}\text{(omisión).}$$

Las palabras que figuran entre paréntesis a los extremos de las rayas horizontales se refieren naturalmente a los recursos por medio de los cuales se justifica cada uno de esos pasos. Para la reformulación de argumentos más complicados tendremos que acudir a algunos otros, a saber, un recurso que facilite la eliminación de cualquier género de redundancia a uno u otro lado de la barra inclinada y un par de ellos que nos permitan pasar por alto *conjuntos* intermedios de fórmulas al enunciar los principios establecidos mediante esquemas de desenvolvimiento de la lógica general. Y aunque ello no resulte estrictamente necesario para nuestro propósito, podríamos asimismo adoptar el recurso obviamente legítimo de añadir cuantos elementos deseemos a uno u otro lado de la barra inclinada de una fórmula que exprese un principio correcto. Finalmente, del correcto enunciado del principio Γ/P en unión de la premisa Γ siempre será posible concluir P.

Llegados a este punto, todavía cabría simplificar nuestra tarea dejando de considerar como axiomáticos los principios correspondientes a nuestros esquemas de desenvolvimiento originarios y adoptando en su lugar para cada uno de los signos formales una regla específica de orden superior que fije su uso por referencia a la barra inclinada. Pues la adición de tales reglas a los recursos generales arriba reseñado haría posible derivar todos nuestros principios de envolvimiento originarios a partir de un único principio P/P correspondiente al trivial esquema de inferencia $\frac{P}{P}$.

He aquí, sobre esas bases, la configuración que adquiriría nuestro nuevo sistema:

$$\alpha 1.\ \frac{P}{P}$$

$$\alpha 2.\ \frac{\Gamma/\Delta}{\Gamma, \Theta/\Delta, \Lambda} \qquad \alpha 3.\ \frac{\Gamma, P/\Delta \quad \Theta/P, \Lambda}{\Gamma, \Theta/\Delta, \Lambda}$$

$$\alpha 4.\ \frac{\Gamma/(\Delta/\Theta)}{\Gamma, \Delta/\Theta} \qquad \alpha 5.\ \frac{\Gamma, (\Delta/\Theta)/(\Lambda/\Xi)}{\Gamma/[(\Delta/\Theta)/(\Lambda/\Xi)]}$$

$$\alpha 6.\ \frac{\Gamma, \{Fx\}/\Delta \quad \{\Theta/Fx, \Lambda\}}{\Gamma, \Theta/\Delta, \Lambda} \qquad \alpha 7.\ \frac{\{\Gamma, Fx/\Delta\} \quad \Theta/\{Fx\}, \Lambda}{\Gamma, \Theta/\Delta, \Lambda}$$

$$\beta 1.\ \frac{\left(\frac{\Gamma}{P}\right)}{\Gamma/P} \qquad \beta 2.\ \frac{\Gamma/P}{\left(\frac{\Gamma}{P}\right)}$$

$$\beta 3.\ \frac{\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda/\Xi, \Pi, \Sigma, \Phi}{\Gamma, \Theta, \Delta, \Lambda/\Xi, \Sigma, \Pi, \Phi} \qquad \beta 4.\ \frac{\Gamma, \Delta, \Delta/\Theta, \Lambda, \Lambda}{\Gamma, \Delta/\Theta, \Lambda}$$

$$\gamma 1.\ \frac{\Gamma, P.Q/\Delta}{\Gamma, P, Q/\Delta} \qquad \gamma 2.\ \frac{\Gamma/P \vee Q, \Delta}{\Gamma/P, Q, \Delta}$$

$$\gamma 3.\ \frac{\Gamma, \sim P/\Delta}{\Gamma/P, \Delta} \qquad \gamma 4.\ \frac{\Gamma/P \supset Q, \Delta}{\Gamma, P/Q, \Delta}$$

$$\gamma 5.\ \frac{\Gamma, (x)Fx/\Delta}{\Gamma, \{Fx\}/\Delta} \qquad \gamma 6.\ \frac{\Gamma/(\exists x)Fx, \Delta}{\Gamma/\{Fx\}, \Delta}$$

Al igual que antes, cada una de las mayúsculas griegas se ha de entender como un modo abreviado de referirnos a cualquier serie de proposiciones que podamos elegir, incluidas aquellas que posean un único miembro o carezcan de miembros por completo. Nuestro empleo de las mayúsculas griegas, y la misma sustancia de algunas de las reglas precedentes, nos vienen sugeridos por uno de los apartados de la obra de Gentzen citada en la última sección, aunque el sistema por él elaborado difiere en cuanto a su naturaleza del que ahora consideramos [31].

Si exceptuamos la regla $\alpha 5$, de la que se hablará más adelante, las reglas correspondientes al primer grupo se relacionan todas ellas con los recursos antes introducidos y ninguna presenta grandes dificultades de comprensión. En la formulación de $\alpha 1$ hemos tenido que servirnos de la letra itálica P en lugar de la letra griega Γ, dado que la admisión de $\frac{\Gamma}{\Gamma}$ comportaría la de $\frac{*}{*}$, de suyo inaceptable. La regla $\alpha 2$ permite la adición de elementos a uno y otro lado de la barra inclinada en la expresión de un principio; mas ya que cualquiera de las series representadas por las letras Θ y Λ, o ambas, podrían ser nulas, tal adición no es *exigida* por la regla. En esta y las siguientes reglas, la admisión de series nulas contribuye a simplificar su presentación. La regla $\alpha 3$ autoriza la omisión de fórmulas en el dominio de la lógica primaria y la $\alpha 4$ facilita la obtención de la versión del *modus ponens* ofrecida por Lewis, en tanto que $\alpha 6$ y $\alpha 7$ desempeñan en el dominio de la lógica general un cometido análogo al desempeñado por $\alpha 3$ para la lógica primaria. Como con anterioridad, los corchetes se emplean para

[31] En la formulación de su segundo sistema, Gentzen recurre a algunos términos e ideas extraídos del trabajo de P. Hertz "Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme", *Mathematische Annalen*, CI (1929), pp. 457-514.

indicar conjuntos posiblemente infinitos de proposiciones. Así, el conjunto de proposiciones indicado por el signo complejo $\{\Gamma/Fx, \Delta\}$ sería el determinado por la construcción de una demostración para la fórmula $\Gamma/Fx,\Delta$ con x como variable libre.

En el grupo siguiente, las reglas $\beta 1$ y $\beta 2$ tratan de poner de manifiesto la equivalencia entre dos diferentes modos de presentar principios de implicación. La expresión $\left(\frac{\Gamma}{P}\right)$ vendría a querer decir en ellas: *Cualquier inferencia realizada de acuerdo con el esquema* $\frac{\Gamma}{P}$ *es válida.* De modo semejante, $\beta 3$ autoriza la libre reordenación de las fórmulas a uno y otro lado de la barra inclinada en la expresión de un principio de envolvimiento, en tanto que $\beta 4$ permite la eliminación de redundancias en cualquiera de ellos. Como Leibniz dijera de uno de sus cálculos, el nuestro no toma en cuenta para nada el orden ni la repetición de los signos; y, por más que estos últimos hayan de ser ordenados de izquierda a derecha a ambos lados de la barra inclinada y puedan figurar por duplicado en uno u otro, lo cierto es que esos detalles son absolutamente irrelevantes para nuestra teoría. Más bien que entre series de fórmulas propiamente dichas, la relación de envolvimiento que aquí nos interesa se da entre *conjuntos* de *proposiciones;* y aquellas dos reglas únicamente sirven para mostrar la irrelevancia de ciertos rasgos de nuestro simbolismo. Esta es la razón de haberlas agrupado conjuntamente con $\beta 1$ y $\beta 2$.

Por lo que se refiere al tercer grupo, contamos en él con una regla específica para cada uno de los diversos signos formales de uso común. Tales reglas constituyen en parte una adaptación de las ofrecidas por K. R. Popper [32], revistiendo cada una de ellas la forma de una licencia de sustitución que gobierna el uso de un signo formal en relación con la barra inclinada.

La conjunción de todas esas reglas resulta suficiente para la reconstrucción de la totalidad de la lógica tal y como usualmente se la entiende. He aquí, por ejemplo, la prueba de un principio correspondiente al quinto de los axiomas de los *Principia Mathematica*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha 1)}{Q \supset R/Q \supset R}(\beta 1)}{Q \supset R,\ Q/R}(\gamma 4)}{} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha 1)}{P \vee Q/P \vee Q}(\beta 1)}{P \vee Q/P,\ Q}(\gamma 2)}{P \vee Q/Q, P}(\beta 3)}{\dfrac{Q \supset R,\ P \vee Q/P, R}{Q \supset R,\ P \vee Q/P \vee R}(\gamma 2)}(\alpha 3)\ (\beta 3)$$

$$\dfrac{\dfrac{Q \supset R/(P \vee Q) \supset (P \vee R)}{*/(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]}(\gamma 4)}{}(\gamma 4).$$

Es interesante reparar en que, mientras los principios que integran nuestro sistema son principios de envolvimiento, las reglas por medio de

[32] "On the Theory of Deduction", *Proceedings of the Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen*, LI (1948), pp. 173-83, 322-31.

las cuales construimos nuestras pruebas son todas ellas reglas de inferencia, esto es, reglas a las que han de corresponder principios de implicación. Y aún más digno de nota desde el punto de vista que ahora nos interesa es el hecho de que el sistema —dejando por el momento a un lado la regla $\alpha 5$— constituya una generalización del sistema básico de Lewis en términos de envolvimiento, que es una relación entre conjuntos de proposiciones, en lugar de su implicación estricta, que es una relación entre proposiciones. Pues sus axiomas B1-5 y B7 pueden ser todos obtenidos a partir de $\alpha 1$ por medio de sencillas derivaciones como la que acabamos de considerar, siendo posible obtener B6 mediante la aplicación de $\beta 1$ y $\gamma 1$ a una versión simplificada de $\alpha 3$. En cambio, el esquema $\dfrac{P \supset Q}{P/Q}$, rechazado por Lewis, no representa regla alguna del sistema. Pues ciertamente no se trata del esquema de una regla primitiva del mismo ni podría tampoco constituir el esquema de una regla derivada, ya que su conclusión es de un orden superior al de su premisa, mientras que nuestras reglas primitivas —excepción hecha de $\alpha 5$— sólo permiten la inferencia de conclusiones de orden no superior al más elevado de las premisas correspondientes.

Con la adición de $\alpha 5$, nuestro sistema se convertiría en una generalización del sistema S5 de Lewis, pues aquella regla constituye por su parte una generalización del principio de reducción en sentido fuerte. Lo que nuestra formulación viene a decir es que, en efecto, no hay diferencia entre la implicación estricta y la implicación material cuando el elemento implicante y el implicado son ambos proposiciones de envolvimiento (que, como ya sabemos, incluye dentro de sí la implicación estricta, o implicación a secas, como un caso especial). Pues, cualesquiera que puedan ser los elementos implicante e implicado, todo caso de implicación estricta es de algún modo un caso de implicación material; y, de acuerdo con $\alpha 5$, todo caso de implicación material en que los elementos implicante e implicado se ajusten a las condiciones antedichas será también un caso de implicación estricta. Esto es lo que se desprende de la derivación siguiente:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\alpha 1)}{(\Delta/\Theta) \supset (\Lambda/\Xi)/(\Delta/\Theta) \supset (\Lambda/\Xi)}\,(\beta 1)}{(\Delta/\Theta) \supset (\Lambda/\Xi),\ (\Delta/\Theta)/(\Lambda/\Xi)}\,(\gamma 4)}{(\Delta/\Theta) \supset (\Lambda/\Xi)/[(\Delta/\Theta)/(\Lambda/\Xi)]}\,(\alpha 5).$$

Si en lugar de $\alpha 5$ hubiésemos adoptado la más sencilla regla

$$\frac{\Gamma,\ \Delta/\Theta}{\Gamma/(\Delta/\Theta)},$$

que es la conversa de $\alpha 4$, nos habríamos visto abocados por un argumento similar a concluir la inaceptable tesis $P \supset Q/(P/Q)$. Pero con la adopción de $\alpha 5$ nos limitamos a excluir la barroca profusión de modalidades de los sistemas S1-4 de Lewis.

Si quisiéramos derivar el principio fuerte de reducción por una vía más familiar podríamos definir la necesidad por medio de la regla $\dfrac{\Box P}{*/P}$,

en la que el asterisco * indica la clase nula de las premisas (contenida como subclase en cada una de las clases de premisas), y probar la regla derivada

$$\frac{Q/\Box\sim Q}{\Box\sim Q}$$ como sigue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q/\Box\sim Q}{Q/(*/\sim Q)}\,(\text{def. }\Box)}{Q,\,*/\sim Q}\,(\alpha 4) \qquad \dfrac{\dfrac{(\alpha 1)}{\sim Q/\sim Q}\,(\beta 1)}{*/Q,\sim Q}\,(\gamma 3)}{\dfrac{*/\sim Q}{\Box\sim Q}\,(\text{def. }\Box).}\,(\beta 3)\;(\alpha 3)\;(\beta 4)$$

A continuación, sustituyendo Q por $\Box P$ en nuestra regla derivada (RD), procederemos a derivar nuestro principio en los siguientes términos:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha 1)}{(*/P)/(*/P)}\,(\beta 1)}{\sim(*/P),\,(*/P)/(*/\sim\Box P)}\,(\gamma 3)\;(\beta 3)\;(\alpha 2)}{\sim(*/P)/[(*/P)/(*/\sim\Box P)]}\,(\alpha 5)}{\sim\Box P/(\Box P/\Box\sim\Box P)}\,(\text{def }\Box) \qquad \dfrac{(\text{DR})}{(\Box P/\Box\sim\Box P)/\Box\sim\Box P}\,(\beta 1)\;(\alpha 3)}{\sim\Box P/\Box\sim\Box P}$$

De acuerdo con nuestra versión del principio fuerte de reducción, cualquier enunciado de envolvimiento (y por lo tanto, es claro, cualquier enunciado de implicación) que sea verdadero será necesariamente verdadero, y cualquiera que sea falso será necesariamente falso. Mas, presentado de esta forma, dicho principio ya no suscitará excesivas controversias. Pues quienquiera que lo rechace habrá de conceder la posibilidad de que la invalidez de un silogismo (o de cualquier otro argumento que aspire a ser considerado deductivo) sea una cuestión de hecho contingente, lo que evidentemente resulta absurdo. Será una cuestión de hecho contingente que los sonidos o los trazos utilizados en la presentación de un argumento posean los significados que acostumbramos a asignarles, así como que en ciertas ocasiones nos sirvamos de ellos en la presentación de un argumento inválido. Pero nada de esto tiene que ver con la cuestión que nos ocupa. Lo único que aquí se ha aseverado es que el hecho de que una proposición o grupo de proposiciones deje de implicar otra proposición o grupo de ellas no es contingente, y ésta es una aserción que no requiere ser justificada.

Cuando un filósofo dude en aceptar el principio fuerte de reducción, podremos razonablemente sospechar que no tiene idea clara de las consecuencias que se derivarían de rechazarlo y que, en lugar de concentrar su atención sobre los casos apropiados de aplicación del mismo, se ha dejado extraviar por alguno de los múltiples usos elípticos de los términos modales en el lenguaje ordinario, como es el caso por ejemplo de aquel uso que llevó a Frege a excluir de su lógica a la modalidad. En la discusión de una proposición matemática plausible pero indemostrada (como la conjetura de Goldbach de que todo número par mayor que 2 puede ser representado como la suma de dos primos), sería natural decir «Puede que sea

una verdad necesaria, pero por el momento no nos es dado aseverar que haya de serlo». A primera vista, este modo de hablar parece apoyar la idea de la irreductibilidad de las modalidades de orden superior, pero un examen más atento revelará que en la oración entran en juego tres usos diferentes de los términos modales. Pues mientras la expresión «verdad necesaria» se refiere a la noción de necesidad que interesaba a Lewis al formular su cálculo, «puede que sea» y «haya de serlo» dicen relación al conocimiento humano y «no nos es dado» envuelve la idea de una imposibilidad lingüística o moral. Una tal mescolanza está, pues, lejos de constituir un genuino contraejemplo frente al principio fuerte de reducción; y, bien pensado, no habría modo de encontrar un contraejemplo semejante. Pues, en efecto, quienquiera que desease refutar el principio en esos términos tendría que pechar con la tarea de indicar una proposición contingente en un sentido estrictamente lógico que sea sólo contingentemente contingente en tal sentido.

Otra posible fuente de duda en relación con los principios reductivos es una cierta dificultad en la interpretación de la expresión «necesariamente verdadero» tal y como esta última es empleada en el discurso ordinario. En el capítulo de sus *Primeros Analíticos* en que se ocupa de la tercera figura silogística, Aristóteles nos dice que el argumento

Todo hombre es un animal — Ningún hombre es un caballo

Algún caballo no es un animal

no es un silogismo válido o, con otras palabras, que no es necesario que algún caballo no sea un animal si todo hombre es un animal y ningún hombre es un caballo [33]. Ahora bien, la afirmación de Aristóteles constituye obviamente una verdad de la forma $\sim\Box P$ y por tanto se trata, de acuerdo con el principio fuerte de reducción, de una verdad necesaria. Mas si tratáramos de expresar esto último mediante la oración «Lo que Aristóteles dice es necesariamente verdadero», alguien podría pensar que lo que esta oración da a entender es que la verdad de la afirmación de Aristóteles se sigue necesariamente del hecho de haberla éste formulado. Eso ha llevado a un notable lógico de nuestros días a advertir que los principios reductivos necesitan ser enunciados con más cuidado de lo que se acostumbra. Por su parte, concedería al parecer que *es necesariamente verdadero que no es necesario que algún caballo no sea un animal si todo hombre es un animal y ningún hombre es un caballo.* Pero rechazaría que *lo que Aristóteles dice en el pasaje arriba mencionado es necesariamente verdadero,* alegando al respecto que la expresión «necesariamente verdadero» sólo cabe aplicarla a una proposición inserta en un contexto bien determinado y entendida por relación a ese contexto [34]. Semejante observación no carece sin duda de buen sentido, pero no tiene por qué arrojar ninguna sombra sobre el principio fuerte de reducción —tal y como este último se representa por medio de la fórmula $\sim\Box P/\Box\sim\Box P$— y no debe hacernos olvidar que, al fin y al cabo, nos es dado decir

33 *Analytica Priora,* I, 6 (28a30).

34 A. Church, "A Formulation of the Logic of Sense and Denotation", en *Structure Method and Meaning: Essays in Honor of Henry M. Sheffer,* 1951, pp. 3-24. El autor menciona sólo el principio débil de reducción, sirviéndose, naturalmente, de un ejemplo distinto.

cuanto deseemos acerca de la afirmación de Aristóteles refiriéndonos a ella como tal. Pues si decimos simplemente «La afirmación de Aristóteles en sus *Primeros Analíticos*, 28ª30, es una verdad necesaria», no habrá lugar a equívoco ninguno, si bien nadie estaría en situación de determinar la corrección de nuestro juicio hasta conocer el contenido de la afirmación de Aristóteles.

En nuestro deseo de hacer justicia a la noción de modalidad lógica, nos hemos visto conducidos a presentar la lógica como la teoría general de aquel tipo de relación entre conjuntos de proposiciones que dimos en llamar de envolvimiento. En nuestra última sección habíamos puesto en claro que el sentido de los signos formales (o lógicos) de conjunción, disyunción, negación, conexión filónica, universalidad y existencia se agotaba en la enunciación de las reglas de desenvolvimiento de las proposiciones expresadas con su ayuda. Pero en nuestra nueva versión de la lógica hemos tomado como fundamental la noción de envolvimiento, y los signos formales de las versiones más usuales se hallan ahora introducidos por medio de reglas que cabría tratar como definiciones. Las reglas de nuestro tercer grupo no permiten ciertamente por sí mismas la eliminación de los signos formales de todos los contextos en los que se podría hacer uso de ellos, pero sí determinan exhaustivamente su sentido al fijar el papel que desempeñan en los correspondientes argumentos. Sin duda la palabra castellana «y» comporta numerosas sugerencias que no se hallan previstas en la regla $\gamma 1$, pero el signo lógico de la conjunción no pretende ni más ni menos que expresar el sentido que dicha regla le confiere y otro tanto sucede con el resto de los signos formales y las reglas específicas a ellos destinadas. Aunque cada uno de esos signos formales sólo aparezca en la correspondiente regla a uno de los lados de la barra inclinada, dichas reglas resultan suficientes —en unión de las precedentes— para facilitar la introducción o la eliminación de los diversos signos tanto a un lado como al otro de la barra. Así, la expresión $\Gamma/P.Q, \Delta$ sería potencialmente equivalente a la pareja de enunciados de envolvimiento $\Gamma/P, \Delta$ y $\Gamma/Q, \Delta$; y la expresión $\Gamma/(x)Fx, \Delta$ podría ser reemplazada por el signo complejo $\{\Gamma/Fx, \Delta\}$. En pocas palabras, los signos formales revisten especial interés para el lógico por poder éste auxiliarse de los mismos en la presentación de la teoría del envolvimiento; y, recíprocamente, los signos que no puedan definirse como ellos por relación al signo de envolvimiento carecen de lugar en el dominio de la lógica.

Dado que hay una importante diferencia entre aquellos conjuntos que pueden ser especificados mediante la enumeración de sus miembros y aquellos otros que únicamente pueden serlo por medio de la indicación de alguna característica común a todos sus miembros, no debe sorprendernos que la lógica general (o funcional) —que se ocupa de relaciones entre conjuntos posiblemente infinitos de proposiciones, especificados por referencia a funciones proposicionales— revista una mayor complicación que la lógica primaria (o proposicional), que únicamente se ocupa de relaciones entre conjuntos finitos de proposiciones. Mas nuestras reglas básicas $\alpha 1$-7 son todas ellas simples e incluso triviales (si por tal no se entiende carentes de importancia). Lo que tampoco debe sorprendernos, pues la lógica se ocupa de las propiedades más generales de la relación de envolvimiento y no de su vigencia entre conjuntos de proposiciones dotadas de un concreto contenido, circunstancia esta última a la que debe su fundamental simplicidad.

5. En torno a la posibilidad de lógicas alternativas.

En la versión de la lógica que acabamos de considerar, la noción básica de la misma venía identificada por las reglas propuestas como una generalización de la relación que justifica la inferencia, por lo que no había lugar a dudas acerca de la interpretación del signo básico correspondiente. Pero un sistema como el de la *Begriffsschrift* de Frege o los *Principia Mathematica* podría ser desarrollado sin atender para nada a la interpretación de sus signos, de suerte que —abstractamente considerado— cupiera ver en él una alternativa entre varias posibles.

En el trabajo de 1921 en que introdujo el método de las tablas de verdad para la lógica elemental [35], E. L. Post sugeriría la consideración de un sistema formal alternativo en el que cada variable pudiera tomar no simplemente uno u otro de los dos valores de verdad v y f, sino cualquiera de los m diferentes valores v_1, v_2, ..., v_m. Habiendo comenzado por el examen del sistema de los *Principia*, en que los signos $\sim$ y $\vee$ se toman como primitivos, se sirvió para la presentación de su nuevo sistema de las tablas de verdad correspondientes a dos nuevas funciones representadas por los signos $\sim_m$ y $\vee_m$. Por lo que se refiere a la primera de ambas funciones, su tabla de verdad presentaría la disposición que se indica en la figura:

P	$\sim_m P$
v_1	v_2
v_2	v_3
.	.
.	.
.	.
v_m	v_1

Es decir, el signo $\sim_m$ es un operador que efectúa la permutación en un lugar de los m valores en cuestión. La tabla de verdad de la segunda función presenta una apariencia algo más complicada, pero el principio de construcción que la inspira es simplemente el de que $P \vee_m Q$ ha de tomar en cualquier caso el más alto de los dos valores correspondientes a P y Q (esto es, el indicado por el menor de los subíndices). A lo largo de todos estos puntos, Post procede abstractamente sin sugerir la posibilidad de más de dos valores de verdad, pero a continuación pasa a mostrar que el sistema construido resulta susceptible de interpretación en el contexto de la lógica ordinaria mediante las siguientes estipulaciones: (I) cada elemento (representado por una mayúscula) se ha de tomar no como una proposición, sino como un conjunto ordenado de m—1 proposiciones (representadas ahora por minúsculas) tales que, si una de ellas es verdadera, lo sean también todas aquellas que la siguen en la serie; (II) un elemento detentará el valor v_1 si exactamente r—1 de sus proposiciones son falsas; (III) si las proposiciones de P se expresan por medio de p_1, p_2, ..., p_{m-1} y las de Q por medio de q_1, q_2, ..., q_{m-1}, las proposiciones de $P \vee_m Q$ se expresarán por medio de $p_1 \vee q_1$, $p_2 \vee q_2$, ..., $p_{m-1} \vee q_{m-1}$; (IV) si las proposiciones de P se expresan por

[35] "A General Theory of Elementary Propositions", *The American Journal of Mathematics*, XLIII (1921), pp. 163-85.

medio de p_1, p_2, ..., p_{m-1}, las proposiciones de $\sim_m P$ se expresarán por medio de $\sim (p_1 \vee p_2 \vee \dots p_{m-1})$, $\sim (p_1 \vee p_2 \vee \dots p_{m-1}) \vee (p_1 \cdot p_2 \dots p_{m-1})$, ..., $\sim (p_1 \vee p_2 \vee \dots p_{m-1}) \vee (p_{m-2} \cdot p_{m-1})$.

¿Habremos de considerar al sistema m-valente de Post como una lógica alternativa? La respuesta a esta pregunta dependerá del sentido que otorguemos a la palabra «lógica». Si nos contentamos con aplicar tal denominación a cualquier sistema que revista ciertas afinidades formales con el de Frege, cabría ciertamente hacerlo así con el sistema de Post. Por lo menos no se tratará de un absurdo manifiesto, puesto que éste es el modo justamente como se procedió a extender la aplicación de la palabra «geometría». Mas si nos permitimos esa libertad, habremos de reconocer que un sistema formal al que se dé el nombre de «lógica» en nuestro nuevo empleo técnico del vocablo no necesita guardar ya ninguna conexión con el razonamiento. En particular, no hay que suponer que la construcción de lógicas alternativas en tal sentido demuestre en modo alguno la inadecuación del sistema de Frege en relación con el propósito para el que fue elaborado ni tan siquiera su convencionalidad [36]. Si insistimos, en cambio, en reservar la denominación de «lógica» para aquellos sistemas que quepa interpretar en términos de relaciones entre proposiciones, podríamos de nuevo conceder al sistema m-valente de Post carácter lógico en un amplio sentido, mas no sería apropiado considerarlo por más tiempo como una *alternativa* al sistema bivalente de Frege, toda vez que la citada interpretación presupondría este último sistema (o el de los *Principia Mathematica*) como teoría subyacente. El propio Post sugiere, al final de su artículo, la posibilidad de traducir toda su argumentación al lenguaje de un sistema polivalente; en cuyo caso, el sistema polivalente aparecería en su opinión como el fundamental, en tanto que el sistema bivalente ordinario cobraría la apariencia de un artificio. Pero lo cierto es que Post no explicó allí cómo llevar a cabo aquella traducción y resulta difícil, si no imposible, asignar algún significado concreto a su sugerencia.

Por esos mismos años, J. Lukasiewicz concibió la idea de recurrir a un sistema de lógica trivalente para resolver el problema aristotélico de los futuros contingentes [37]. He aquí la explicación que nos ofrece de su enfoque de la cuestión:

«Puedo presuponer sin contradicción que mi presencia en Varsovia en un instante dado del año que viene, pongamos por caso el mediodía del próximo 21 de diciembre, no es positiva ni negativamente determinable en este instante. Por lo tanto, es *posible pero no necesario* que me halle presente en Varsovia a esa hora y en esa fecha. Sobre la base de dicho presupuesto, el enunciado 'Me hallaré presente en Varsovia el mediodía del 21 de diciembre del año que viene' no es ni verdadero ni falso en este instante. Pues si fuese verdadero en este instante, mi futura presencia en Varsovia tendría que ser necesaria, lo que contradice mi presuposición inicial; y si fuese falso en este instante, mi futura presencia en Varsovia tendría que ser imposible, lo que de nuevo contradice mi presuposición inicial. El enunciado considerado no será, por lo tanto, verdadero ni falso en este instante y le habrá de corresponder un tercer valor diferente de 0, o lo falso, y de 1, o lo verdadero. Podremos indicarlo como '1/2', esto es, 'lo posible', que vendrá a constituir un tercer valor junto

36 En su *Many-valued Logics*, de 1952, J. B. Rosser y A. R. Turquette se abstienen de cualquier intento de interpretación de los formalismos objeto de su consideración.

37 "O logice trójwartościowej", *Ruch Filozoficzny*, V (1920), pp. 169-71.

con 'lo falso' y 'lo verdadero'. Este es el curso de la argumentación que hubo de conducir a la propuesta de un sistema trivalente para la lógica proposicional» [38].

Si hemos de operar con tres valores de verdad, las funciones veritativas tendrán que ser redefinidas o sus definiciones extendidas de modo que comprendan todos aquellos casos en que uno o más de sus argumentos tomen el valor 1/2. Introduciremos en este contexto el signo $[P]$ como abreviatura de «el valor de verdad de P»; y, en orden a facilitar la comparación de esas funciones con las bivalentes, nos serviremos de la notación de Peano-Russell más bien que de la del propio Lukasiewicz. Las definiciones que adoptamos ahora para el condicional filónico y la negación vienen representadas por la matriz que sigue:

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\sim$
1	1	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1	1

La columna del extremo derecho nos indica que, para $[P]=0$ y $[P]=1$, el valor de $[\sim P]$ no experimenta modificación; mientras que, para $[P]=1/2$, tendremos $[\sim P]=1/2$. De modo semejante, en la definición de $P \supset Q$ los viejos casos aparecen tratados como de costumbre, resolviéndose los nuevos sobre la base del principio de que, si el valor del antecedente es menor o igual que el del consecuente, el valor del condicional habrá de ser 1, siendo en caso contrario 1/2.

Es importante reparar en que los signos veritativo-funcionales no pueden conservar, en el sistema trivalente, exactamente las mismas relaciones que guardaban entre sí en el sistema bivalente, de suerte que fórmulas que resultasen tautológicas en este último sistema podrían dejar de serlo en cuanto fórmulas del nuevo sistema. Así, Lukasiewicz introduce la disyunción mediante la definición

$$[P \vee Q]=[(P \supset Q) \supset Q].$$

Esta equivalencia no nos resulta familiar, pero se halla elegida para asegurarnos de que una disyunción en el sistema trivalente posea el mismo valor que sus disyuntos si éstos poseen valores semejantes, correspondiéndole en caso contrario el mayor de los dos. Si aplicamos esta definición a $P \vee \sim P$, sólo obtendremos 1 por valor de la disyunción cuando uno de los disyuntos posea dicho valor, correspondiéndole en caso contrario el valor 1/2, como parece desprenderse de lo que Lukasiewicz nos dice a este respecto. Las consecuencias de su definición de $P \,.\, Q$ no son, empero, tan felices. Pues se sirve para ello de la regla de De Morgan

$$[P \,.\, Q]=[\sim(\sim P \vee \sim Q)],$$

tratando sin duda de asegurar que una conjunción posea el mismo valor que sus conyuntos si éstos poseen valores semejantes, correspondiéndole en caso contrario el menor de los dos; pero el resultado que de la definición se desprende es que a $P \,.\, \sim P$ sólo podrá corresponderle valor 0 cuando el

[38] "Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls", *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des lettres de Varsovie, Classe III*, XXIII (1930), pp. 51-77.

valor de P sea uno de los dos valores extremos, correspondiéndole en caso contrario 1/2, lo que resulta harto chocante.

Aparte de los signos veritativo-funcionales ordinarios, Lukasiewicz introduce un nuevo signo funcional cuyo sentido se supone ha de ser el de «posiblemente». De acuerdo con su práctica usual, se sirve a estos efectos de la mayúscula inicial M de *möglich*. Pero nosotros usaremos para mayor comodidad el signo romboidal de Lewis, no sin antes advertir que la noción de posibilidad de Lukasiewicz difiere considerablemente de la de Lewis.

La definición adoptada por Lukasiewicz (a instancias de su discípulo A. Tarski) para el signo de posibilidad viene dada por la equivalencia $[\Diamond P] = [\sim P \supset P]$. Semejante equivalencia resulta a primera vista sorprendente, puesto que $\sim P \supset P$ es el antecedente de la *consequentia mirabilis* por medio de la cual cabía demostrar la verdad de P en el sistema de la lógica bivalente. Pero la paradoja desaparecerá tan pronto recordemos que la definición se mueve en el contexto de un sistema trivalente. Si una proposición se puede derivar de su propia negación, eso nos garantiza por lo menos que no podrá ser falsa, cualquiera que sea el número de valores de verdad que estemos dispuestos a reconocer. En un sistema bivalente, aquella propiedad habría bastado para asegurarnos la verdad de la proposición, pero en un sistema trivalente todo lo que nos pueda asegurar será su posibilidad. Con otras palabras, la definición de Tarski se considerará adecuada por permitir que la función con la que identifica la posibilidad adquiera el valor 0 cuando el argumento posea dicho valor, adquiriendo en caso contrario el valor 1: lo que se ha definido, por lo tanto, es la posibilidad en el sentido en que cabría decir de ella que excluye la falsedad.

Llegado a este punto, Lukasiewicz pasa a generalizar la noción de sistema polivalente estipulando definiciones de la negación y del condicional filónico que puedan aplicarse a cualquier número de valores, siempre que estos últimos se hallen comprendidos en el intervalo que discurre de 0 a 1. He aquí las definiciones en cuestión:

$$[\sim P] = 1 - [P]$$
$$[P \supset Q] = 1, \text{ para } [P] \leqslant [Q]$$
$$[P \supset Q] = 1 - [P] + [Q], \text{ para } [P] > [Q].$$

Cuando seleccionemos como únicos valores permisibles los límites del intervalo de 0 a 1, tales definiciones arrojarán el sistema bivalente ordinario. Si añadimos ahora como permisible el nuevo valor 1/2, obtendremos el sistema trivalente que se acaba de considerar. Pero de acuerdo con Lukasiewicz sería también posible construir un sistema de cuatro, cinco o cualquier número de valores de verdad que deseemos. Y, una vez rebasado el sistema trivalente con la introducción de tales grados de posibilidad, nada hay que nos impida llevar al infinito aquella gradación, tal y como se haría en el cálculo de probabilidades, lo que daría lugar a un cálculo proposicional infinitamente polivalente, que es el preferido de Lukasiewicz. Quizás este último obrase movido por la idea de emplear dicho cálculo para la presentación de la teoría probabilitaria. Pero lo cierto es que nunca llegó a desarrollarlo en tal sentido; y parece dudoso que lo hubiera podido conseguir, ya que es difícil encontrar

una interpretación aceptable del signo de posibilidad tal y como este último funciona en su sistema. Aplicada en semejante contexto, la definición de Tarski arrojaría el curioso resultado:

$$[\Diamond P]=1, \text{ para } [P]\geqslant 1/2$$
$$[\Diamond P]=2[P], \text{ para } [P]<1/2.$$

Las relaciones de los diversos sistemas entre sí son las siguientes. El sistema trivalente constituye un apartado del bivalente, en el sentido de que todos los teoremas del primero son asimismo teoremas del segundo; y el sistema infinitamente polivalente constituye a su vez un apartado del trivalente en el mismo sentido, si bien son pocos los teoremas de los *Principia Mathematica* sobrevivientes en este último que no sobrevivan igualmente en el infinitamente polivalente. Los teoremas más importantes del sistema bivalente que no conservan su validez en los sistemas polivalentes son aquellos que guardan relación con ese género de argumentación apagógica (*reductio ad absurdum*) que parece haber suscitado quebraderos de cabeza en el dominio de la teoría de conjuntos, como sería el caso por ejemplo de

$$(\sim p \supset p) \supset p,$$
$$(p \supset \sim p) \supset \sim p,$$
$$(p \supset q \,.\, \sim q) \supset \sim p.$$

Lukasiewicz consiguió elaborar coherentemente su sistema trivalente, proveyéndolo de una interpretación que lo haría aparecer como un sistema lógico en la más estricta de las dos acepciones del vocablo «lógica» antes consideradas. Mas su sistema está, en realidad, lejos de relacionarse con la lógica bivalente al modo como Lukasiewicz sugiere. El uso del término «posible» que éste tiene presente a todo lo largo de su examen de la cuestión es el de una persona que, preguntada acerca del futuro, dijera que es posible que haya al día siguiente una batalla naval. Con posterioridad, en un trabajo en que presenta un diferente sistema lógico-modal, Lukasiewicz dejaría la puerta abierta a otras concepciones de la posibilidad, mas manteniendo en cualquier caso invariable su supuesto de la incompatibilidad de $\Diamond P$ y $\sim P$ [39]. Ahora bien, sería ciertamente deshonesto que la persona de marras afirmase «Es posible que hoy haya habido una batalla naval» constándole que en realidad no hubo ninguna, puesto que la cláusula «es posible que...» vendría a significar en tal contexto —según Frege quería— que el usuario de la misma nada conoce en contra de aquella afirmación. Pero de ahí no se sigue que haya un tercer valor entre la verdad y la falsedad; ni parece probable que nadie propiciase esa interpretación de no empujarle a ella su preocupación por el problema aristotélico de los futuros contingentes. En su momento, nosotros ya apuntamos que este problema debía toda su razón de ser a la errónea concepción de la verdad como una propiedad que hubiera de corresponder a un enunciado en un instante dado. Y, por lo que respecta al presente planteamiento del mismo, sólo tendríamos que añadir que los tres valores de Lukasiewicz no parecen constituir valores de verdad, ni tan siquiera auténticos valores modales, sino lo que cabría llamar más bien «valores de certidumbre».

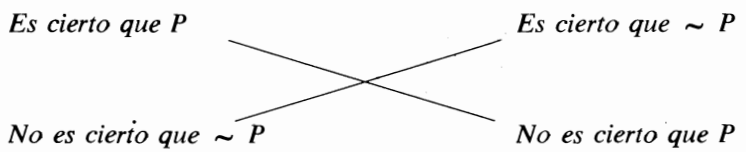
---

[39] "A System of Modal Logic", *The Journal of Computing Systems*, I (1953), pp. 111-49. Cf. asimismo su libro *Aristotle's Syllogistic*, 2ª ed., § 49.

Más arriba veíamos cómo, junto con el principio de tercio excluso, Lukasiewicz abandonaba asimismo el principio de no-contradicción. Ello torna al sistema inaceptable en su conjunto. Mas si, no obstante, cupiese superar tal deficiencia mediante algunos ajustes que satisfagan a Lukasiewicz y a quienes —como él— se preocupan por el problema de los futuros contingentes, el sistema resultante vendría a admitir también, al parecer, una interpretación de acuerdo con la tabla

$[P]=1$ ... *Es cierto que P.*
$[P]=1/2$... *No es cierto que P y no es cierto que* $\sim P$.
$[P]=0$ ... *Es cierto que* $\sim P$.

Pero, lejos de obligarnos a abandonar la lógica bivalente, esta interpretación presupone la distinción ordinaria de verdad y falsedad y el uso ordinario de la partícula «no». Recurriendo ahora al cuadrado de la oposición, podríamos presentar como sigue las relaciones entre esas diversas expresiones:



Es decir, las dos expresiones afirmativas son contrarias tales que cada una de ellas implica como su subalterna la contradictoria de la otra; mientras que las dos negativas son subcontrarias tales que podrían ser ambas verdaderas (de acuerdo con los principios de la lógica bivalente ordinaria), pero no ambas falsas. Todas estas relaciones resultan similares a las que se dan de hecho entre las cuatro expresiones modales «necesario», «imposible», «posible» y «no-necesario»; lo que no debe sorprendernos, puesto que «cierto» podría considerarse como una abreviatura de «necesario por relación a lo que conocemos». Pero lo que hay aquí de lógico es justamente la noción general de necesidad (o la noción de posibilidad, que podría ser tomada en su lugar como fundamental en nuestro análisis) y no la de conocimiento; y, por más que las funciones modales no sean definibles mediante tablas de verdad como las bivalentes ordinarias, no por ello requieren de una teoría alternativa frente a la de estas últimas, esto es, frente a la lógica primaria bivalente.

En un capítulo ulterior tendremos ocasión de examinar otra alternativa a la lógica clásica, sugerida por L. E. J. Brouwer y A. Heyting con el fin de purgar de paradojas la filosofía de la matemática. La peculiaridad de este sistema es la no inclusión a título de axioma ni teorema del principio de tercio excluso. Esto es, al menos, lo que sostienen sus autores; pues, como hemos de ver, no faltan razones para creer que lo que ambos bautizan con la denominación de principio de tercio excluso no es la ley que usualmente responde a dicho nombre.

Si, tomando como punto de partida el sistema fregeano de la lógica primaria, nos preguntásemos ahora qué es lo que haya de retener del mismo cualquier cálculo abstracto que aspire a ser considerado como puramente lógico sobre la base de la parcial semejanza de sus estructuras formales,

no cabría dar una respuesta precisa a tal pregunta, toda vez que únicamente nuestro arbitrio sería el llamado a regular esa extensión de la acepción de la palabra «lógica». Pero acaso resultara razonable esperar que dicho cálculo retenga un cierto número de fórmulas en correspondencia con algunas de las tesis principales del sistema de Frege, así como las reglas de sustitución y separación empleadas en este último. Aceptado que el nuevo sistema ha de reproducir de un modo u otro ambos aspectos del de Frege, podríamos asumir a título de ejemplo que el mismo contenga las cuatro fórmulas

$$p \supset \sim \sim p$$
$$q \supset (p \supset q)$$
$$\sim p \supset (p \supset q)$$
$$p \supset [\sim q \supset \sim (p \supset q)],$$

todas las cuales figuran en efecto no sólo en los sistemas polivalentes de Lukasiewicz, sino asimismo en el desarrollo por parte de Heyting de las sugerencias brouwerianas en pro de una lógica que prescinda del principio de tercio excluso. Ahora bien, A. Tarski [40] ha demostrado que cualquier sistema que satisfaga dichas condiciones y se halle libre de contradicción únicamente admite una extensión que sea a un tiempo consistente y completa, a saber, el sistema bivalente ordinario de la lógica. E igualmente ha probado teoremas similares por lo que se refiere a aquellos cálculos alternativos que sólo difieren del sistema de Frege por servirse exclusivamente del signo de la implicación material o incluir asimismo los signos de la conjunción y la disyunción además de los de la implicación material y la negación. De todo ello se desprende que, incluso desde un punto de vista puramente formal, el sistema bivalente ordinario goza de un estatuto privilegiado en el conjunto de los sistemas deductivos a los que quepa apellidar de lógicos, ya que contiene a todos los demás como fragmentos de sí propio. Con otras palabras, no hay alternativas respecto de la lógica clásica en el sentido en que se dice, por ejemplo, que la geometría de Lobachevski representa una alternativa frente a la de Euclides.

En nuestra última sección tratábamos de mostrar que la lógica clásica podía ser presentada como la teoría general de aquella relación entre conjuntos de proposiciones que incluye a la de implicación como un caso especial. Si nuestra caracterización era aceptable (según parecía serlo de acuerdo con la concepción tradicional de la lógica como la ciencia de los principios del razonamiento válido para toda clase de contenidos o materias), quienquiera que desee defender la posibilidad de una alternativa frente a la lógica clásica se encontrará impugnando de algún modo la clásica noción de implicación. Pues lo que ahora queda en claro es que no cabe remendar el cuerpo de la lógica al modo sugerido por Lukasiewicz o Brouwer y preservar al mismo tiempo la noción de implicación vigente en el dominio de la lógica clásica. Pero ¿cómo sería posible abandonar esa noción y proseguir, no obstante, ejercitando el raciocinio? ¿Mediante qué argumentos podríamos demostrar la necesidad de cambiar de arriba abajo nuestra concepción gene-

---

40 "Über Erweiterungen der unvollständigen Systemen des Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, VII (1934-5), pp. 51-57; reeditado en inglés en *Logic, Semantics, Metamathematics*, pp. 393-400.

ral de la demostración? Sin duda cabría servirse del razonamiento en orden a mostrar que un argumento dado, al que habíamos concedido nuestro crédito, resulta ser falaz. Pero el razonamiento no nos podría servir para probar que toda nuestra concepción del razonamiento necesite ser sometida a revisión. Y, sin embargo, ésta sería la ardua tarea —si nuestro análisis de la cuestión no nos engaña— que el presunto reformador de la lógica habría de echar sobre sus hombros.

X. LA FILOSOFIA DE LA LOGICA DESPUES DE FREGE

1. Expresión, designación y verdad.

Pocos lógicos parecen hoy dispuestos a hacer suya toda la filosofía fregeana de la lógica [1], pero la terminología de funciones y valores de verdad característica de aquélla ha logrado sobrevivir y, en ocasiones, parece comprometer a sus usuarios con las doctrinas de Frege que declaran haber abandonado. Conviene comenzar este capítulo, por tanto, con una discusión de las teorías fregeanas del significado y la verdad.

Lo más peculiar de la concepción del significado por parte de Frege es su intento de explicar el uso de toda clase de palabras y demás signos en términos del proceso de la denominación. Frege admite, por supuesto, que los verbos, los nombres comunes, los adjetivos, las preposiciones y otros diversos géneros de símbolos no constituyen nombres ni cuasi-nombres propios, pero opina que en todos estos casos nos las habemos simplemente con recursos para la construcción de nombres complejos tales como «la capital de Prusia» o «el hombre que descubrió el carácter elíptico de las órbitas planetarias». En su desarrollo de este orden de ideas Frege acreditó una notable sutileza, y lo que dice acerca del sentido y la referencia parece ofrecer una adecuada solución a los problemas suscitados por enunciados tales como «La estrella matutina es idéntica a la estrella vespertina». Sin embargo, no podemos ocultar nuestra extrañeza ante su tesis de que las oraciones enunciativas han de considerarse nombres o designaciones de valores de verdad; y el mero hecho de verle desembocar en semejante conclusión debiera hacernos sospechar de sus supuestos iniciales.

La doctrina fregeana de los valores de verdad resulta chocante e inaceptable porque su autor nunca llegó a explicar con claridad en qué han de consistir esos objetos. En un lugar nos dice que el valor de verdad de una oración (*Satz*) es la circunstancia de ser ésta verdadera o falsa según el caso. Esta caracterización parece inteligible, pero se compadece mal con su sugerencia de que todas las oraciones verdaderas han de designar un mismo valor de verdad y otro tanto todas las oraciones falsas. Pues la circunstancia de que «5 es un número primo» sea verdadera (si se nos permite hablar en estos términos) no es la misma que la circunstancia de que «2+2=4» sea verdadera. Otras veces se limita a aludir a lo Verdadero y lo Falso. Esta fraseología se destina, sin duda, a advertirnos que de lo que se está ocupando es de dos, y sólo dos, objetos. Pero ¿qué podrían ser estos objetos? En su acepción usual «lo verdadero» vendría a querer decir «aquello que es verdadero», pero aquello a lo que primariamente corresponde la verdad es una proposición o —como diría Frege— un contenido objetivo de pensamiento (esto es, lo que una oración expresa, en cuanto diferente de lo que se supone que designa); y lo cierto es que por medio de distintas oraciones cabría

[1] El más fiel partidario de la doctrina de Frege en nuestros días es A. Church, que la ha defendido en diversos lugares. Cf., por ejemplo, "The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, LXXX (1951), pp. 100-12, así como la introducción al primer volumen de su *Introduction to Mathematical Logic*.

expresar una infinita multiplicidad de proposiciones o contenidos de pensamiento.

¿Habrá que entender, pues, que sus valores de verdad se identifican con los dos atributos de la verdad y la falsedad? Estos constituirían, en efecto, un par de objetos en una amplia acepción de la palabra «objeto», siendo además posible llamarlos valores en un sentido que no tiene mucho que ver con lo que un matemático entiende por valores cuando habla de la sustitución de una variable. Pero resulta un tanto absurdo decir que toda oración enunciativa verdadera designa o representa la verdad, ya que las oraciones son en definitiva signos muy distintos de aquellos de los cuales cabría decir con propiedad que designan la verdad (el caso, por ejemplo, de la palabra «verdad» o la expresión «lo que Poncio Pilato quería ver definido»). Para ciertos propósitos quizás podríamos adoptar la convención de escribir

5 es un número primo=verdad

en sustitución de «Es verdad que 5 es un número primo», pero la posibilidad de modificar nuestro lenguaje en tal sentido no serviría para justificar la doctrina fregeana de los valores de verdad. Pues si adoptáramos la práctica de escribir «=verdad» tras de determinadas oraciones enunciativas y «=falsedad» tras de otras, nuestras dos expresiones no retendrían ya sus actuales significados sino que habrían de ser consideradas de otra suerte, por ejemplo como algo semejante a las marcas de aprobación y desaprobación utilizadas por un maestro al corregir las respuestas de los alumnos a sus preguntas.

En su trabajo *Ueber Sinn und Bedeutung*, Frege trata de hacer plausible su teoría arguyendo que se halla implicada en la universalmente aceptada distinción entre la historia y la ficción. Las oraciones de un poema épico o una novela poseen sentido —nos dice Frege—, pero no se las clasifica de ordinario como verdaderas ni falsas porque no se supone que posean referencia. Las oraciones de un libro de historia, por el contrario, se supone que poseen referencia no menos que sentido. Pues, en efecto, quien mantenga en serio que Ulises fue desembarcado en Itaca mientras dormía profundamente, tendrá que estar dispuesto a mantener que el término «Ulises» representa un objeto; y semejante interés por la referencia de una parte de la oración sólo resultaría inteligible si se da por sentado que la oración en su conjunto designa algo. De la misma manera que en la comprensión de una oración, sea de tipo histórico o literario, el sentido de una de sus partes adquiere relevancia por contribuir a determinar el de la oración en su totalidad, cuando nos preguntemos por la verdad de un enunciado histórico la referencia de una de sus partes adquirirá relevancia por contribuir a determinar la referencia de la oración en su totalidad, esto es, su valor de verdad.

Este argumento constituye la mejor defensa de Frege, pero no justifica su intento de distinguir entre el sentido y la referencia de un enunciado. Pues, si suponemos que una oración enunciativa ha de poseer idéntico sentido en un contexto de ficción que en una narración histórica, tendremos asimismo que suponer que cabe por igual servirnos de ella en ambos casos para formular un enunciado verdadero o falso. Pues el sentido de esa oración es todo cuanto se necesita a tal efecto de acuerdo con la propia ex-

plicación de Frege, dado que una proposición —o contenido completo de pensamiento, al que una oración enunciativa le sirve de vehículo— ha de ser siempre algo susceptible de verdad o falsedad. No cabe, desde luego, minimizar la importancia de la distinción existente entre las oraciones de una obra literaria y las de una obra de historia, mas —contra lo que Frege parece presumir— el *quid* de semejante distinción no reside en el hecho de que las primeras sólo posean sentido en tanto las segundas poseen sentido y referencia. La diferencia fundamental entre unas y otras se ha de buscar, más bien, en el hecho de que el historiador nos comunica efectivamente algo por medio de sus oraciones, en tanto que el narrador de una fábula sólo simula hacerlo así; de donde se desprende que muchas de las oraciones de este último sólo podrán considerarse significativas en el peculiarísimo sentido en que diríamos que la oración «Juan tiene la pluma de la mujer del jardinero» es significativa cuando figura como ejemplo en un texto de gramática. En todos estos casos se tratará de signos complejos tales que *podrían* ser usados en determinadas circunstancias con un propósito de comunicación, y ésta es precisamente la razón de que *sean* usadas por el fabulador cuando —para nuestro entretenimiento— finge que se dan esas circunstancias. Si alguien malinterpretara la situación y creyera que la fábula constituye una auténtica comunicación, se vería tentado de conferir mentalmente un sentido completo a cada una de sus oraciones, lo que, según Frege apuntara, comportaría por lo común la consideración de algunas de sus expresiones como auténticas designaciones; pero ninguna razón hay para decir que ello comporte la consideración de las oraciones de la fábula como designaciones de valores de verdad.

A la base de la teoría de Frege se halla el supuesto de que todo signo completo ha de poseer al mismo tiempo sentido y referencia, convicción esta última que le vendría impuesta por su obsesión por los nombres y los cuasi-nombres. Cuando por una u otra razón nos interesamos por el estudio del lenguaje y comenzamos a plantearnos cuestiones acerca del significado, quizá sea lo más natural buscar una primera pista en aquellas situaciones en las que nos es dado enriquecer el lenguaje con nuestros propios actos, las más obvias de las cuales son aquellas en las que asignamos nombres propios a las cosas. Muchos otros filósofos anteriores a Frege trataron, ciertamente, de explicar la significatividad de las palabras afirmando que éstas han de representar cosas de análoga manera a como el nombre «Sócrates» representa a Sócrates. Pero esta explicación es desafortunada, porque los nombres propios ni siquiera resultan esenciales para la comunicación.

En lugar de «Sócrates murió por beber la cicuta» podríamos decir «El filósofo de nariz achatada que fue el primero en interesarse por la definición de las virtudes murió por beber la cicuta». No deja de ser cierto que la segunda afirmación no es exactamente idéntica a la primera, ya que su comprensión presupone algún conocimiento que no se halla presupuesto por la comprensión de la otra; pero podría desempeñar su cometido en múltiples contextos y, en líneas generales, no cabe imaginar ningún contexto (como no sea el de la compilación de un diccionario de nombres) en el que los propósitos satisfechos por la primera afirmación no se vean asimismo satisfechos por el recurso a una paráfrasis que nos permita prescindir del nombre propio, tal y como sucede con la segunda afirmación. Y la cosa

no acaba aquí. En ciertos contextos que nos resultan familiares cabría incluso eliminar las descripciones definidas, así como palabras tales como «yo», «tú», «esto», «aquello», «aquí» y «ahora», todas las cuales son tratadas por Frege como si fueran cuasi-nombres. Para conseguirlo, únicamente necesitaríamos procurarnos un código como el que se utiliza en el servicio de correos para la transmisión de telegramas de salutación. A una oración de uso frecuente en castellano le correspondería en él una expresión unitaria desprovista de partes significativas, adquiriendo esta última con el uso constante la misma fuerza que hoy pudiera detentar la primera. No faltan, de hecho, ejemplos de ello en la comunicación ordinaria. Cuando un jugador de golf grita «¡Ojo!», quienes se encuentran frente a él interpretan su voz como la advertencia de que se dispone a impulsar su pelota en esa dirección. Y cuando el radiotelegrafista de un buque emite un S.O.S., quienes captan la señal internacional de auxilio entienden sin necesidad de traducción que se requiere urgentemente ayuda en el lugar de donde partió aquélla. Sin duda sería imposible efectuar por procedimientos como éste todas las comunicaciones a que estamos acostumbrados, pero es importante hacer notar que dicha imposibilidad dependería de nuestro modo de aprendizaje del lenguaje y no de nuestro modo de servirnos de él una vez aprendido.

A lo largo del día, cada uno de nosotros tiene ocasión de proferir numerosas oraciones nunca oídas hasta la fecha en la historia de la humanidad. Así, incluso un niño podría decir «He visto una muñeca que anda y una máquina eléctrica de cortar césped en la tienda de al lado de la iglesia donde el abuelo hizo caer el platillo de la colecta al acabar el sermón del arzobispo», cosa que a nadie le parecería una gran proeza; y, sin embargo, es muy probable —por no decir casi seguro— que nadie haya combinado jamás en castellano esas palabras de la misma manera exactamente que se hace en nuestro ejemplo. Ahora bien, de lo dicho se desprende que un lenguaje exclusivamente integrado por expresiones unitarias tendría que resultar inadecuado para nuestras necesidades, puesto que no nos proveería de recursos para hacer frente a situaciones inéditas. Cada una de las expresiones aprendidas resultaría apropiada únicamente para determinadas situaciones; y, aunque en ciertos casos cabría extender analógica o metafóricamente algunos de esos usos a nuevas situaciones, nunca podríamos disponer de un repertorio de expresiones lo suficientemente vasto como para adecuarse a todos y cada uno de los cometidos satisfechos por el habla ordinaria. En un lenguaje medianamente evolucionado habremos de contar, por consiguiente, con una sintaxis no menos que con un vocabulario, aunque no falten razones para creer que en un primer momento los hombres dispusieron solamente de vocabulario. Pero ya sea que hablemos sirviéndonos de simples expresiones estereotipadas o de complejas oraciones, cuanto digamos ha de ser siempre susceptible —al menos en principio— de construcción por parte de otros usuarios del lenguaje en situaciones similares, si estas últimas se dieran. Pues, aunque sea improbable, ciertamente no es imposible que docenas de niños, en diversos instantes y lugares, profieran cada uno con absoluta propiedad la parrafada que nos servía antes de ejemplo. Y nuestro planteamiento de la cuestión no cambiaría gran cosa si supusiéramos que el lenguaje a considerar contiene nombres propios. Pudiera ser que el día de mañana nadie, salvo un actor o un trata-

dista de gramática, tenga nunca ocasión de decir «Sócrates está ahora bebiéndose la cicuta», pero no es impensable que alguien recurra a esa oración para hacer un auténtico enunciado y hasta un enunciado verdadero, pues cabría la posibilidad de que otro Sócrates (esto es, otra persona así llamada) bebiese un día cicuta.

Una expresión unitaria se asemeja a un gesto u otra convención mímica. Pues decir «Sí» y mover la cabeza de arriba abajo no son sino dos modos de significar nuestro acuerdo, de la misma manera que decir «¡Caramba!» con una determinada entonación de voz no es sino un modo enfático de expresar lo que a veces expresamos enarcando las cejas. Pero una oración compleja, que conste de sujeto y predicado, podría ser igualmente interpretada en esos términos. Pues la afirmación «Estoy cansado» es una pieza de conducta a la que cabría recurrir para los mismos propósitos para los que en ocasiones recurrimos al mudo ademán de cerrar los ojos y reclinar nuestra cabeza. ¿Diremos en todos estos casos que nuestros signos poseen a un tiempo sentido y referencia? Ciertamente habría que distinguir entre el sentido general de un signo considerado como un patrón de conducta (esto es, aquello que aprendemos al aprender a hacer uso del signo) y las diversas comunicaciones que podríamos efectuar mediante el mismo al servirnos de él en diferentes ocasiones, comunicaciones que sería correcto aventurar difieren entre sí por referirse a diferentes circunstancias según las ocasiones en que las proferimos. Pero esta distinción no coincide con la de Frege. Pues el sentido general de que ahora hablamos no es, como su *Sinn*, una determinada proposición, ni la referencia en cuestión tampoco se reduce a una designación o denominación. En este último caso podrían entrar en juego palabras o expresiones con una función designativa, como cuando decimos «Sócrates murió por beber la cicuta» o «El lechero llamó a la puerta esta mañana»; pero ello no es esencial, ya que el acto de referir que aquí nos interesa podría haber sido ejecutado mediante signos de una pieza, esto es, carentes de partes significativas, y no es impensable que todos los signos hubieran resultado ser de ese género. Si deseáramos continuar sirviéndonos de la terminología de Frege, sólo nos sería dado decir que, al proferir una oración, expresamos un sentido; pero, para una adecuada comprensión de esta última afirmación, deberemos proseguir nuestro análisis.

La economía que nos proporciona es el más relevante de los méritos que han favorecido la supervivencia y el desarrollo de la sintaxis. Ahora bien, la primera y más obvia medida económica que podemos adoptar en la construcción de oraciones es el empleo de un mismo vocabulario para expresar enunciados, preguntas, órdenes y demás. En un lenguaje cuyas expresiones careciesen de partes o aspectos separadamente significativos no cabría que se diera una fundamental semejanza entre una pregunta y el enunciado que responde a ella o entre un ruego y la promesa de satisfacerlo. Pero, que nosotros sepamos, todos los lenguajes humanos de los que hay alguna noticia cuentan con recursos tendentes a permitir que oraciones en posesión de las mismas palabras o raíces de palabras puedan, no obstante, ser distinguidas en tanto que indicativas, interrogativas, imperativas u optativas. En las lenguas europeas, son las modificaciones verbales las más frecuentemente llamadas a especificar tales diferencias; pero incluso dentro de este grupo lingüístico caben otras posibilidades.

Así, las preguntas se expresan comúnmente mediante alguna adaptación de la forma enunciativa, adaptación que podría consistir en la adición de una partícula (*Num venis?*), la inversión del orden de las palabras («¿Vienes tú?») o simplemente una especial entonación («¿Tú vienes?»).

En ocasiones, y por razones estilísticas o retóricas, el modelo correspondiente a uno de esos géneros de comunicación podría ser aplicado a una comunicación de otro género, como cuando se transmite una orden militar mediante una oración de indicativo en tiempo de futuro o se enfatiza un enunciado construyéndolo en forma de interrogación. Pero, en todos estos casos, tendrá que haber alguna convención o regla implícita que adecúe el modelo originario a la intención del que se sirve de él en el nuevo contexto. Y, cualquiera que pueda ser el recurso expresivo con que se cuente a tal efecto, puede decirse que en toda oración compleja hay siempre alguna peculiaridad con la especial función de poner de manifiesto la actitud del que habla o el objetivo que persigue al hacerlo. Pues la comunicación es, ante todo, la deliberada manifestación de una actitud hacia una proposición o un estado de cosas concebible. Así, la formulación de un enunciado será la manifestación de la creencia del que habla; la formulación de una pregunta, la manifestación de su curiosidad o su deseo de recibir alguna información de su interlocutor, etcétera. Sólo los tipos más corrientes de comunicación han recibido denominaciones específicas, pero entre las consideradas comúnmente como exclamaciones podríamos distinguir, si lo deseamos, una apreciable variedad de subespecies. Piénsese, por ejemplo, en las diferencias de matiz existentes entre «¡Gracias a Dios que pasó todo!», «¡Al diablo con el Papa!» o «¡Fulano nombrado obispo, cielo santo!». Y si tomáramos en cuenta los usos del lenguaje con otros fines que el de la comunicación (el caso, por ejemplo, de su uso ritual), tendríamos que multiplicar las distinciones, aunque para nuestros propósitos podremos pasarlas por alto.

El principal interés que lo antedicho reviste para el lógico es la distinción que comporta entre la manifestación de una actitud y la presentación de una proposición hacia la que se manifiesta esa actitud. En algunas de nuestras expresiones unitarias, tales como «Sí», «¡Caramba!» o «¡Maldición!», nada hay que nos indique la proposición hacia la que el que habla manifiesta su actitud, dado que el proferir esa expresión en una ocasión dada resulta por sí solo suficiente para indicar adónde se dirige su interés. Pero el caso opuesto de una expresión unitaria que no incluya la manifestación de una actitud no podría evidentemente darse, ya que sin esa manifestación de una actitud no habría comunicación. En cambio, no sería inimaginable que una determinada evolución de la sintaxis hubiera dado lugar a signos puramente proposicionales, llamados a constituir oraciones completas al agregárseles lo que cabría llamar un signo actitudinal, como el trazo judicativo de Frege. Por ejemplo, los enunciados podrían expresarse en esa hipótesis de la forma «*P*, sí» y las preguntas de la forma «*P*, duda», donde «*P*» no sería en sí misma enunciativa ni interrogativa sino tan sólo un signo destinado a presentar una proposición. Pero lo cierto es que no ocurre así en ninguno de los lenguajes naturales conocidos, de suerte que quienquiera que desee prestar en ellos atención a un signo proposicional tendrá que citar una expresión que constituya ya una oración completa por incluir también la manifestación de una actitud. Los

lógicos han acostumbrado a servirse con exclusividad en sus ejemplos de oraciones enunciativas, sin tener para nada en cuenta la posibilidad de otras alternativas. Es posible que hayan obrado así movidos por una cierta confusión de la lógica con la epistemología, pero por lo demás tampoco faltan buenas razones en favor de su preferencia.

Por lo pronto, las oraciones enunciativas suelen ser más simples en cuanto a su estructura que el resto de las oraciones, con excepción de los imperativos. En segundo lugar, las proposiciones presentadas por medio de enunciados admiten toda clase de variedades, en tanto que los ruegos o las órdenes han de tener siempre que ver con alguna posible acción futura de parte del destinatario de los mismos. En tercer lugar, los enunciados del habla ordinaria —a diferencia de los demás tipos de comunicación, exceptuando tal vez a las preguntas— se consideran usualmente independientes de la particular actitud de la persona que eventualmente los formula. La razón de ello es presumiblemente que la creencia constituye un factor común en toda suerte de situaciones comunicativas de una cierta complejidad, concurriendo además la posibilidad de que personas diferentes en contextos asimismo diferentes formulen enunciados similares. Esto último resulta especialmente frecuente en las discusiones científicas. Mas, cualquiera que pueda ser la explicación, el caso es que si alguien se interesara por el significado de un enunciado así considerado, nos contentaríamos con replicar ofreciéndole una expresión de la forma «que tal y tal»; mientras que, si se tratara del significado de cualquier otro género de locución, nos creeríamos asimismo obligados a mencionar la actitud del hablante. Quizá sea algo exagerado aventurar que todo enunciado ha de significar una proposición, pero ciertamente cabría conceder a Frege que los enunciados se conciben a menudo como expresiones de contenidos de pensamiento en ese sentido en el que un contenido de pensamiento resulta compartible por una pluralidad de sujetos, vaya o no acompañado de creencia. En cuarto lugar, y ésta es la razón más importante, las oraciones enunciativas —o, más exactamente, las formas verbales que en ciertos contextos admiten esa consideración— podrían en ocasiones ser usadas sin hacer recaer sobre las mismas ninguna clase de aserción. Cuando decimos, por ejemplo, «Habrá una mala cosecha si este tiempo continúa», no nos comprometemos con la creencia de que haya de haber una mala cosecha, por lo que la primera parte de la frase oficia pura y simplemente como un signo proposicional. Cierto que éste no es, a su vez, sino una parte del signo correspondiente a la proposición total aseverada, mas la oración en su conjunto no podría desempeñar su cometido de presentar esa proposición si dicha parte no constituyera un signo proposicional por derecho propio. Todo ello se halla implícito en la formulación estoica de esquemas de inferencia tales como «Si lo primero, entonces lo segundo; pero lo primero; luego lo segundo».

Ya que es difícil, si no imposible, hablar de estas cuestiones sin recurrir a una terminología medianamente especializada, acordemos decir que las oraciones y cláusulas como las que acabamos de considerar son expresiones proposicionales, que expresan, presentan o significan proposiciones. A lo que habría que añadir que —mientras algunas expresiones proposicionales, tales como «2+2=4» y «La virtud tiene en sí misma su propia recompensa», expresan una y la misma proposición cada vez que hacemos uso de ellas— la mayor parte de esas expresiones proposicionales, tal y

como de ellas nos servimos en la conversación, expresan diferentes proposiciones en ocasiones diferentes según las circunstancias de su uso. Ahora bien, es evidente que, si todas nuestras expresiones proposicionales constituyeran signos unitarios, no habría entonces designaciones; y es interesante reparar en que estas últimas podrían faltar incluso en expresiones proposicionales dotadas de una cierta estructura interna. Cuando un cronista de bolsa resume su información con las palabras «Cerrando a la baja», esas palabras nos comunican que, al cierre del mercado, la oferta de papel predomina sobre la demanda, mas no designan nada propiamente hablando; y sería irrelevante advertir que su informe es una abreviatura de «La Bolsa está cerrando a la baja», puesto que el cronista ha omitido las tres primeras palabras de esta oración precisamente por creerlas innecesarias en el contexto. ¿Cuál puede entonces haber sido la razón de la introducción de las designaciones en el curso del desarrollo sintáctico del lenguaje? Parece ser que la respuesta ha de buscarse una vez más en la economía que el recurso nos proporciona. Nuestro lacónico cronista de bolsa encontrará tal vez mañana un medio de informarnos, sin hacer uso de designaciones, que la sesión se cierra con predominio alcista; pero si todas nuestras expresiones proposicionales hubieran de asemejarse a los informes del cronista, necesitaríamos una enorme cantidad de ellas, muchas de las cuales serían por lo demás de muy raro uso. La posibilidad de construir oraciones, tal y como acostumbramos a hacerlo, a partir de designaciones y signos funcionales representa una ventaja, ya que gracias a estos elementos nos es dado enfrentarnos con relativa facilidad a una diversidad de situaciones prácticamente ilimitada.

Con todo esto no tratamos de sugerir que la estructura de sujeto-predicado que encontramos en todos los idiomas altamente evolucionados se reduzca a un simple recurso arbitrario. Por el contrario, parece evidente que la utilidad del recurso depende del hecho de que muchas, aunque no todas, las proposiciones hacia las cuales manifestamos actitudes sean de carácter atributivo o relacional. Siempre resulta aventurado basar un argumento metafísico sobre el tipo de construcción que una determinada expresión proposicional pueda exhibir; mas quien desee sostener seriamente que toda sintaxis se reduce a una libre construcción del espíritu humano, tendrá que pechar con la tarea de explicar lo que entiende por libertad a este respecto e ilustrar suficientemente cómo habríamos de proceder a construir una alternativa radicalmente diferente. Pero lo que nosotros pretendíamos no era poner de manifiesto la convencionalidad de la sintaxis sujeto-predicativa, sino tan sólo hacer ver que las designaciones no deben erigirse en paradigma de nuestro uso de los signos, toda vez que es posible explicar su presencia como algo incidental en el proceso de la comunicación. Decir que «Sócrates» representa a Sócrates equivale a decir sencillamente que las expresiones proposicionales que contienen dicho nombre resultan apropiadas para presentar proposiciones acerca de Sócrates, proposiciones hacia las cuales podemos desear manifestar una serie de actitudes. Que los nombres y los cuasi-nombres posean a un tiempo sentido y referencia es una peculiaridad de tales signos que habremos de considerar en nuestra próxima sección. Pero lo que por ahora nos es dado concluir es que la noción básica de la teoría del significado no es la de designación, sino más bien la de lo que llamara Frege la expresión de un sentido.

Una vez aclarados estos puntos, será posible recurrir a algunos de los resultados de Frege con vistas a la formulación de una satisfactoria teoría de la verdad. En su caracterización del discurso indirecto, apuntaba Frege que una cláusula denominativa como «que las órbitas planetarias son circulares» ha de tener por referencia el sentido de la correspondiente oración «Las órbitas planetarias son circulares». Con otras palabras, un adecuado desarrollo del lenguaje permitiría no sólo la expresión de proposiciones sino asimismo su designación. Naturalmente, la designación de una proposición no podrá a su vez ser una expresión proposicional de acuerdo con nuestro uso técnico de estos vocablos; y ni tan siquiera será necesario construirla a partir de una expresión proposicional, como cuando anteponemos a esta última el prefijo «que» o nos servimos en latín de un acusativo y un infinitivo. Pues, aunque las designaciones construidas valiéndonos de esos procedimientos a partir de expresiones proposicionales revistan una cierta prioridad, expresiones como «el teorema de Pitágoras», «la doctrina del pecado original» o «lo que Gladstone dijo en 1883», e incluso simples palabras aisladas como «materialismo», podrían desempeñar el mismo cometido. De hecho, la diversidad de signos de que podríamos hacer uso a estos efectos no reconoce límites; y, en orden a persuadirnos de la importancia de poder designar proposiciones, sólo necesitamos pensar en el drástico emprobrecimiento que experimentaría nuestro lenguaje si esos signos nos faltaran. La lógica, en particular, difícilmente podría ser estudiada sin echar mano de ellos, ya que los términos característicos de que el lógico se sirve —términos tales como «implica», «inconsistente», «necesario» y «posible»— se usan primordialmente para pergeñar oraciones en las que han de oficiar como sujetos designaciones de proposiciones. Y, por idéntica razón, el adjetivo «verdadero» dejaría de poder ser usado en el sentido que interesa a los filósofos.

En un pasaje antes citado, nos decía Frege que «El contenido de pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero» resulta equivalente a «5 es un número primo». Mas lo que Frege pasó allí por alto es que el principio que inspira dicha equivalencia constituye una adecuada solución al problema filosófico de la verdad. Nosotros necesitamos del adjetivo «verdadero» porque contamos con designaciones de proposiciones y deseamos decir mediante ellas lo que, de otro modo, sólo cabría decir por medio de expresiones de esas mismas proposiciones. Si concebimos la conjunción castellana «que» como un prefijo que convierte a la expresión de una proposición en una designación, quizá nos sea dado decir que la adición de la cláusula «es verdadero» invierte aquella operación. Pues, en efecto, cuando aquel prefijo y esta cláusula concurren juntamente nada añaden a lo que Frege llamaría el contenido de la locución en que ambos intervienen, lo que nos inclina a decir que el signo complejo «es verdad que» sólo sirve para desempeñar el mismo cometido retórico que la partícula «efectivamente», a saber, el de indicar una concesión o poner fin a una disputa. No hay que olvidar, empero, que el término «verdadero(a)» se aplica con frecuencia a proposiciones que no han sido designadas mediante frases precedidas de la conjunción «que» e incluso a proposiciones que no podrían ser ahora designadas de esta suerte. Así, se ha dicho por ejemplo: «Cualquier declaración que el Papa pueda un día hacer *ex cathedra* acerca de cuestiones relativas al dogma o la moral es verdadera».

Es obvio que en este caso no cabría eliminar el término «verdadera» por el simple recurso de formular las expresiones correspondientes a todas y cada una de las declaraciones que el Papa pueda hacer alguna vez. Pero cabría, no obstante, eliminarlo mediante un adecuado empleo de variables proposicionales, como acontecería por ejemplo en la paráfrasis «Si el Papa, hablando *ex cathedra* acerca de cuestiones relativas al dogma o la moral, declara que p, entonces p». Y, una vez hecho esto, quedaría en claro aquí también que el papel del adjetivo «verdadero(a)» no es otro que el de poner en conexión una designación proposicional con una expresión proposicional. Pues así como la letra «p» de la apódosis de la nueva oración representa un hueco a rellenar por una expresión proposicional, de la misma manera la cláusula «que p» de la prótasis constituye un signo llamado a convertirse en una designación proposicional al sustituir por una expresión proposicional la letra «p». Al formular nuestra paráfrasis nos hemos servido deliberadamente de una variable libre, más bien que de una variable ligada, para significar la universalidad; ya que, si hubiéramos iniciado la paráfrasis con el cuantificador «para cualquier p», la gramática del término castellano «cualquier» habría sugerido que los lugares vacíos indicados por medio de la letra «p» sólo podrían ser rellenados a base de designaciones, que no era por supuesto lo que nuestra formulación quería dar a entender.

De acuerdo con Frege, cada signo completo había de expresar un sentido y designar algo que hemos dado en llamar su referencia. Pero nosotros ya hemos visto que hay razones para creer que expresión y designación son cometidos diferentes a desempeñar por signos de género asimismo diferente, y nuestra distinción parece revestir importancia no sólo para la teoría de la verdad sino asimismo para la resolución de las dificultades con las que Frege tropezaba al hablar de funciones. Así como de la oración «El Papa es un hombre» puede decirse que expresa una proposición, del signo «... es un hombre» que oficia en ella de elemento constitutivo podría decirse que expresa una función proposicional. Y aunque de ninguno de ellos quepa decir con propiedad que designen nada, nos será dado construir cuando nos plazca signos con la misión de designar lo por ellos expresado. Así, «humanidad» y «ser un hombre» constituyen en castellano designaciones usuales del atributo —o, en la terminología de Frege, del concepto— que aseveramos del Papa al afirmar que éste es un hombre. Las dificultades de Frege eran debidas al hecho de ignorar la necesidad de nuevos signos al efecto, lo que le llevaba a asignar un cometido designativo a expresiones como «ξ es un hombre» a despecho de su inadecuación en tal sentido. Cierto es que no incurre con demasiada frecuencia en giros tan obviamente insatisfactorios como «el concepto: ξ es un hombre»; pero en las glosas a su lenguaje simbólico acostumbra a escribir «el concepto $\Phi(\xi)$» y en su discusión general de estos problemas menudean las fórmulas desafortunadas o impropias, como es el caso de «el concepto *hombre*» o «el concepto hombre». No es de extrañar, por consiguiente, que se sintiera incómodo más de una vez a causa de ello y tendiera a lamentarse de la fundamental insuficiencia del lenguaje. Lo que hacía era suponer erróneamente que la designación de una función ha de ser incompleta o insaturada como lo es su expresión, pese a lo cual veía con claridad que un signo apropiado para servirnos de él a título de pre-

dicado no podría oficiar con propiedad, al mismo tiempo, de sujeto gramatical cuando se trata de hablar de la función que dicho signo expresa.

En el habla ordinaria, palabras tales como «humanidad» desempeñan a plena satisfacción el cometido de designar funciones proposicionales, o atributos, porque estamos familiarizados con ellas y sabemos perfectamente bien cómo evitar el riesgo de confundirlas con las correspondientes expresiones. Cuando los lógicos sugieren, como lo hacen a veces, que deberíamos considerar a «humanidad» como una abreviatura de «la humanidad de ξ», hay que decir que están en un error. Pues mientras es permisible, aunque indeseable por razones estilísticas, decir «La humanidad se ejemplifica en el Papa», carecería en cambio de sentido decir «La humanidad de ξ se ejemplifica en el Papa». Ahora bien, en un lenguaje simbólico como el de Frege cabría esperar contar con reglas más explícitas que las del lenguaje ordinario; y, si deseáramos incluir en él designaciones de funciones proposicionales, podríamos tratar de hacer ver cómo se relacionan estas últimas con las correspondientes expresiones. Más aún, podríamos hacerlo así adaptando para ello un recurso del que se sirve Frege cuando habla de campos de valores. Así como este último escribe $\grave{\alpha}$ (α *es un hombre*) en lugar de «la clase de los hombres», podríamos escribir por nuestra parte $\grave{\alpha}$ (α *es un hombre*) en lugar de «humanidad» o «la característica de ser hombre». Nuestro nuevo signo se deriva aquí, como es obvio, de una expresión funcional con un lugar vacío, pero no habría peligro alguno de confusión, toda vez que la letra encerrada por el paréntesis se halla encadenada a la letra con espíritu áspero que la precede fuera de él y el signo complejo en su conjunto constituye indudablemente una designación. Invirtiendo ahora el signo fregeano de la pertenencia con el fin de expresar la ejemplificación de una propiedad (esto es, lo que llamaba Frege la inclusión bajo un concepto), podríamos escribir $\Delta \cup \grave{\alpha} \Phi(\alpha)$ como un equivalente de $\Phi(\Delta)$ en nuestra nueva notación. Con todo ello no tratamos de sugerir que estas innovaciones constituyan el mejor de los simbolismos posibles con que hacer frente al problema, sino tan sólo de mostrar que las dificultades de Frege podrían ser fácilmente superadas valiéndonos de recursos muy semejantes a los que él tuvo a su disposición, sobre la base siempre de obligarnos a distinguir con nitidez entre expresiones y designaciones. Ya que $\Delta \cup \grave{\alpha} \Phi(\alpha)$ constituye una expresión proposicional de una relativa complejidad, es natural que incluya en su interior una expresión funcional, a saber, $\ldots \cup - - -$, pero ello no debe conturbarnos. Pues lo que aquí se defendía no era la posibilidad de construir expresiones proposicionales a base exclusivamente de designaciones, y para nada nos afecta en consecuencia el argumento capital que Frege esgrime para mostrar la imposibilidad de hablar directamente de funciones.

Hay, no obstante, otro género de consideraciones que deberían hacernos precavidos cuando hablemos de funciones en el dominio de la lógica. Cuando Frege introdujo este vocablo, concebía a una función lógica como aquella cuyos valores todos eran valores de verdad. Las funciones consideradas en la lógica primaria se suponía que habrían de correlacionar valores de verdad con valores de verdad, en tanto las consideradas en la lógica general de primer orden correlacionarían cualquier clase de objetos con valores de verdad. En la literatura lógica posterior, numerosos autores que no aceptan la teoría fregeana de los valores de verdad, ni quizá se

hayan detenido nunca a examinarla con detalle, han dado en llamar al primer tipo de funciones funciones de verdad, reservando para las del segundo tipo la denominación de funciones proposicionales. Mas si llegamos a la conclusión de que Frege erró al describir una oración enunciativa como el nombre de un valor de verdad, no tendremos otro remedio que rechazar la analogía que le condujo a adoptar su terminología funcional. Algunos lógicos han tratado de concebir a las funciones con que se opera en el dominio de la lógica como si su misión fuera la de correlacionar cosas en el más amplio sentido posible de la acepción (esto es, en un sentido aún más amplio que el del «objeto» de Frege) y proposiciones, mientras que otros se han servido del término «función proposicional» como si se tratara simplemente de un modo conveniente de referirnos a un fragmento de oración como «... es blanco» o «... ama a - - -». Ninguna de estas explicaciones hubiera satisfecho a Frege, y ninguna de ellas resulta suficiente para justificar la preservación de su terminología. Pues una función en el sentido estrictamente matemático del término es un esquema de correlación, y no una expresión como sugiere la segunda explicación; en tanto que la aplicación del signo de una función semejante (por ejemplo, «$\surd$») a una designación (por ejemplo, «2») habría de dar lugar a otra designación (por ejemplo, «$\surd$2»), y no a una expresión como sugiere la primera explicación.

Sería, por tanto, preferible abandonar enteramente la terminología de Frege y adoptar en su lugar otro modo de hablar que no sugiera analogías inapropiadas. Por ejemplo, se podría hablar de «dependencias veritativas» en vez de funciones de verdad y de «atributos» y «relaciones» en vez de funciones proposicionales. Y, si lo que trajéramos entre manos fuese la presentación de la lógica sin parar mientes en su historia, esto sería lo que haríamos. Pero, en lo que resta de este libro, tendremos ocasión de tropezarnos con numerosos autores que han seguido utilizando el término «función» sin aceptar, no obstante, la teoría fregeana de los valores de verdad, por lo que será conveniente atenernos a su prática y contentarnos con advertir que —cuandoquiera que ese término aparezca en nuestro texto— se ha de entender en un sentido equivalente al de uno u otro de los dos sustitutos que acabamos de proponer.

En algunos aspectos, la caracterización de la verdad esbozada más arriba se asemeja a la ofrecida por A. Tarski en su trabajo sobre el concepto de verdad en los lenguajes formalizados [2]. Y, como él hace con la suya, tampoco dudaríamos por nuestra parte en acoger aquella caracterización bajo la autoridad de la famosa definición aristotélica de la verdad, según la cual ésta consistiría en decir, de lo que es, que es y, de lo que no es, que no es [3]. Pero entre nuestra concepción y la de Tarski cabría asimismo registrar una importante diferencia. Nosotros hemos sostenido que el adjetivo «verdadero(a)» se aplica primariamente a las proposiciones, en tanto que él asume que se aplica primariamente a las oraciones. La oración «La nieve es blanca» —nos dice— es verdadera si, y sólo si, la nieve es blanca. El signo entrecomillado se ha de entender aquí como un nombre o una

[2] Originariamente publicado en polaco en *Travaux de la Société des sciences et des lettres de Varsovie*, III, Math.-Phys., XXXIV (1933), fue traducido con posterioridad al alemán en *Studia Philosophica*, I (1936), pp. 261-405, existiendo también versión inglesa del mismo recogida en el volumen *Logic, Semantics and Metamathematics*, pp. 152-278.

[3] *Metaphysica*, *Γ*, 7 (1011b25).

designación, y el propósito de dicha caracterización es hacer ver que la condición necesaria y suficiente de la oración así *mencionada* vendría dada por el *uso* de esa misma oración (o, más exactamente, de ese mismo patrón verbal (*form of words*). En resumidas cuentas, pues, la diferencia entre esta teoría de la verdad y la nuestra propia radicaría en que, allí donde Tarski habla de oraciones, nosotros propondríamos más bien hablar de proposiciones. Ahora bien, como el propio Tarski apunta, las dificultades de su caracterización comienzan tan pronto como se intenta convertir lo que para él es un paradigma de explicación en una definición general mediante el uso de una variable, esto es, escribiendo:

Para cualquier p, «p» es una oración verdadera si, y sólo si, p.

Pues, a menos de estipular expresamente algo en contrario (y sería muy difícil, si no imposible, formular esa estipulación en términos satisfactorios, según advierte Tarski), el signo entrecomillado no sería, como se pretende que lo sea, un signo funcional al que quepa convertir en el nombre de una oración mediante una adecuada sustitución de la letra que figura entre comillas, sino sencillamente una designación de dicha letra. Por otra parte, Tarski arguye que la posibilidad de construir la paradoja del Mentiroso dentro del lenguaje ordinario demuestra que no cabe formular en este último, en cuanto diferente de un lenguaje formalizado, una definición aceptable de la verdad. Y semejante conclusión es tan excéntrica que debiera inducirnos a sospechar de los supuestos que hacen posible derivarla. La raíz de tales perplejidades parece hallarse en la creencia, que Tarski no cuestiona, de que la verdad constituye primariamente una propiedad de las oraciones.

Cuando nos ocupemos de fórmulas matemáticas (que son las que interesan especialmente a Tarski) o de frases que se asemejen a la de su ejemplo por no contener palabras-casos de carácter reflexivo (esto es, palabras que comporten la localización de cosas o sucesos por relación a las circunstancias en que se las emplea), el supuesto de Tarski no dará lugar a serias dificultades. Pues ciertamente cabe hablar de la verdad de una fórmula matemática y tampoco es absurdo hablar de la verdad de la oración genérica «La nieve es blanca». En uno y otro caso nos las habremos con un signotipo de carácter complejo que expresa la misma proposición en cada una de las ocasiones de su uso, lo que permitiría hablar por igual de la verdad de dicho signo o la verdad de la proposición por él expresada. Pero éstos no son los casos más frecuentes. El caso más frecuente es el de una oración que puede ser proferida en diferentes instantes y diferentes circunstancias para expresar proposiciones asimismo diferentes, algunas de ellas verdaderas y otras falsas. Lo que Fulano asevera cuando dice «Tengo hambre» no tiene por qué ser la misma proposición aseverada por Mengano al proferir esa oración en ese mismo instante, ni tampoco la misma que Fulano aseverara ayer mediante idénticas palabras. Y si decimos, como a veces se hace, que una oración es verdadera en el preciso instante de hablar o de escribir, lo único que podemos querer decir es que la hemos usado en ese instante para expresar una proposición verdadera, lo que acaso no quepa hacer en otro instante. Cuando no se hallaba directamente interesado en la propuesta de su propia teoría de la verdad, Frege acreditó ser bien consciente de este hecho. Así, en el curso de su diatriba contra la corrupción psicolo-

gista de la lógica, advierte que quizá quepa describir a la oración «Tengo hambre» como verdadera para algunos hombres y falsa para otros, o como verdadera en ciertas circunstancias y falsa en otras, mas sólo porque se la usa para expresar proposiciones diferentes en ocasiones diferentes. «Todas las determinaciones de espacio, tiempo, etc., corresponden» —escribe— «a la proposición (*Gedanke*) cuya verdad se halla sujeta a consideración, pero el hecho de ser ésta verdadera es en sí mismo inespacial e intemporal» [4].

Con el fin de escapar a estas dificultades, quienes se muestren de acuerdo con Tarski tal vez podrían alegar que las oraciones a las que este último adscribe la verdad, en su sentido básico o primario, son locuciones-casos, esto es, efímeros acontecimientos lingüísticos. Tarski no pensaba ciertamente en ellas cuando compuso su trabajo, pues tales locuciones no serían designables mediante el tipo de designaciones de que Tarski se sirve, esto es, mediante nombres entrecomillados o denominaciones descriptivo-estructurales construidas valiéndose de recursos tales como su deletreo. Pero el caso es que a veces empleamos la palabra «oración» —o equivalentes suyos como «frase»— para referirnos a algo de aquel género, como cuando decimos, por ejemplo, que un orador hizo una pausa para tomar aliento a mitad de una frase de su perorata. Y si adscribiéramos la verdad a una oración en tal sentido, no habría en principio dificultad alguna en conceder la posibilidad de que se torne falsa de un instante a otro. Pero lo que está claro, sin embargo, es que cuando una oración-caso se considere susceptible de verdad, la condición de su verdad no podrá ser formulada en los términos de Tarski, esto es, acudiendo al recurso de decir «si, y sólo si» y repetir seguidamente la oración en cuestión. Pues una oración-caso no es un patrón verbal sino, como hemos dicho, un acontecimiento efímero, que por lo tanto no podría ser *usado* de ese modo más de lo que podría ser *mencionado* en uno u otro de los modos como Tarski acostumbra a mencionar las oraciones que le interesan. Y, en efecto, nadie habla comúnmente de la verdad de una locución-caso, como no sea que se la considere como la expresión de una proposición.

Una de las afirmaciones en las que Tarski hace un hincapié más pertinaz es la de que la paradoja del Mentiroso se debe a una inconsistencia del lenguaje ordinario, en virtud de la cual éste permite la aplicación de sus propios términos «verdadero(a)» y «falso(a)» a sus propias oraciones. Y no parece faltarle razón para pensar que las consideraciones *semánticas* —como llama a las que se hacen en su trabajo— imponen una distinción de niveles de lenguaje. Pues ciertamente cabe decir que la posibilidad de construir la oración «'La nieve es blanca' es verdadera» presupone la posibilidad de construir la oración «La nieve es blanca», circunstancia esta última que nos ayudaría a dar razón de por qué la curiosa locución del Mentiroso no alcanza a expresar proposición alguna. Pero sería una gratuita paradoja (en un otro sentido del vocablo) decir que el lenguaje ordinario resulta inconsistente por su aspiración a la universalidad y la omnicomprensión. El lenguaje ordinario no es, en efecto, un sistema cerrado, sino todo cuanto nos sea dado hacer cuando hablamos; y, si las consideraciones semánticas demuestran la necesidad de distinguir entre diversos niveles de lenguaje, tal distinción habrá de hacerse dentro del lenguaje

[4] *Gg.*, vol. I, pp. XVI-XVII.

ordinario. Pues aunque los lenguajes naturales, como las lenguas castellana y alemana, constituyan en un cierto sentido alternativas las unas respecto de las otras o por contraposición a un simbolismo técnico, el lenguaje ordinario —tal como Tarski lo discute— no es una alternativa frente a ningún lenguaje extraordinario que los lógicos hayan podido o puedan construir con vistas a satisfacer todas las legítimas finalidades hoy satisfechas por el lenguaje ordinario. Por el contrario, se trata más bien de la matriz en la que se han de moldear todos los restantes sistemas de comunicación y no tiene sentido, en consecuencia, criticarlo como si se tratara de la fallida construcción de un rival profesional.

La ansiedad con la que muchos lógicos insisten en considerar a la verdad como asunto de las oraciones más bien que de las proposiciones tiene su origen en la fobia a las entidades abstractas, que a su vez parece originada por dos motivos principales. El primero de ellos, que cabría detectar entre los filósofos desde los tiempos en que Platón concitara su oposición hablándoles de un mundo suprasensible, es la obsesión por la economía del pensamiento. El segundo, de más reciente historia, es la violenta reacción contra todo intento de hablar acerca de la estructura del mundo. Una vez diagnosticada dicha fobia, el paciente debería ser invitado, e incluso instado con ahínco, a llevar a cabo su programa de eliminación sistemática de tales entidades en vez de limitarse simplemente a formular proclamas oraculares. Si se le pudiera inducir a perseverar en el empeño por un plazo de tiempo lo suficientemente largo, tal vez tendría ocasión de comprobar la imposibilidad de decir todo cuanto necesita decir sin hablar de cualidades, relaciones, creencias, hipótesis, conclusiones y demás. La cura sería completa si llegara a reconocer que, por más que Platón y sus seguidores hayan incurrido en el absurdo de hablar de lo suprasensible como de algo que cupiera observar con la ayuda de un supersentido, ello no es todavía suficiente razón para pensar que todos los intentos de designar objetos suprasensibles sean de alguna manera inapropiados. Pues si deseáramos hablar acerca de nuestro uso del lenguaje, tendríamos que encontrar algún modo de decir que una oración o una cláusula predicativa expresan algo. Y, en orden a decir lo que expresa un signo de ese género, necesitaríamos echar mano, no de otra expresión, sino de una designación, ya que —en cualquier enunciado de la forma «... expresa - - -»— los signos que hayan de rellenar los dos lugares vacíos habrán de ser designaciones, la primera de ellas la designación de una expresión y la segunda la designación de lo que esa expresión expresa. Sería absurdo, por lo tanto, vedarnos esa facilidad por el mero hecho de que a veces se haya abusado de ella.

Es improbable, sin embargo, que la decisión de constreñir la atención al caso de las oraciones hubiera conquistado tantos adeptos entre los lógicos si no fuera por el hecho de contar con palabras que, en ciertos contextos, querrían decir lo mismo que «oración», mientras que en otros querrían decir lo mismo que «proposición» En nuestro examen de la obra de Bolzano tuvimos ocasión de ver cómo la palabra alemana *Satz* oficia a veces como un término gramatical equivalente a «oración» o «cláusula», mientras que otras indica una ley, un teorema, un principio o una proposición, esto es, algo que cabría expresar diversamente en diferentes lenguajes y describir como verdadero o falso. La palabra castellana «oración» es

en este sentido menos ambigua que *Satz*, y normalmente no se la considera como algo a lo que quepa calificar con propiedad de verdadero o falso. Pero nuestra palabra «enunciado», aunque a otro nivel, es casi tan versátil como *Satz*. Pues podría significar ya una oración enunciativa, ya lo afirmado al proferir una oración enunciativa, ya el acto de enunciar algo. Por regla general, quienes encuentran plausible adscribir la verdad a las oraciones parecen haberse dejado influir por la asociación existente entre «oración enunciativa» y «enunciado» y, a través de «enunciado», entre «oración enunciativa» y «proposición».

No hay duda de que, en ocasiones, la alusión a las proposiciones suscita recelos por la proclividad de ciertos autores, como Bolzano, a emplazarlas en un extraño limbo entre el lenguaje y la realidad. Pero sería equivocado suponer que el empleo del término «proposición» nos haya de comprometer forzosamente a aceptar aquel emplazamiento. Tal y como se usan comúnmente en nuestros días, los términos «oración» y «proposición» sirven para establecer dos tipos diferentes de clasificación de los acaecimientos lingüísticos (*events of speech*) actuales y potenciales. Por acaecimiento lingüístico entendemos aquí el hecho de proferir (*to utter*) una oración, esto es, la producción de una locución (*utterance*) que ejemplifique un cierto patrón verbal, que en principio admitiría otras ejemplificaciones. Pues, en efecto, es imposible hablar sin hacerlo en algún lenguaje, esto es, sin servirnos de signos susceptibles de repetición. Pero nosotros ya hemos visto que diversas locuciones correspondientes a una oración-tipo podrían expresar proposiciones diferentes de acuerdo con las circunstancias en que han sido proferidas; y es obvio asimismo que una única proposición podría ser expresada valiéndonos de locuciones correspondientes a diferentes oraciones-tipos, puesto que no hay un único lenguaje en el que hayamos de decir todo cuanto tenemos que decir. Cuando los gramáticos emplean, como hacen comúnmente, el término «oración» para designar un patrón verbal, se refieren con ello al denominador común de una serie de locuciones que se asemejan entre sí fónicamente o por otras características perceptibles, aunque pudieran diferir considerablemente en tanto que vehículos de comunicación. Un buen ejemplo de ello sería la oración «Yo tengo la pluma de la mujer del jardinero», que generaciones de escolares han tratado de traducir al francés sin pensar para nada en preguntarse «¿Qué pluma?» o «¿Qué jardinero?». Cuando los lógicos emplean, por su parte, el término «proposición», se refieren más bien al denominador común de una serie de locuciones que se asemejan entre sí como vehículos de comunicación (salvo en lo que respecta a la actitud que pueda respaldarlas), aunque pudieran diferir fónicamente o por el resto de sus características perceptibles. Quienquiera que se sienta intimidado por las conclusiones de Bolzano podría, si lo desea, adscribir la verdad o la falsedad a esos signos proposicionales que aquí llamamos locuciones. Pero en tal caso habrá de conceder, como Leibniz lo hiciera, que la verdad no puede ser asunto exclusivo de las locuciones *actuales*, ya que tiene sentido hablar del descubrimiento de verdades no formuladas con antelación. Y, con la concesión de la verdad a las locuciones *potenciales*, habría ya concedido todo cuanto se necesita en la moderna concepción de las proposiciones. Para expresarlo en dos palabras, cuando un lógico habla de proposiciones no incurre en una abstracción más peligrosa que cuando

el gramático lo hace de oraciones, si bien lo que este último dice parece en ocasiones más inmediatamente aceptable por el hecho de que la noción de semejanza en cuanto a las características perceptibles es más fácil de captar que la noción de semejanza funcional. Como veremos en la última sección de este capítulo, el modo como podamos referirnos a las proposiciones en el discurso plantea algunos problemas peculiares, pero para su solución no será necesario ir más allá de la caracterización de las proposiciones que acabamos de esbozar.

2. La teoría de las descripciones y las diversas especies de designación

Frege introdujo su distinción entre sentido y referencia sobre la base de la consideración del enunciado «La estrella matutina es idéntica a la estrella vespertina», y nosotros ya hemos visto que semejante distinción servía bien al propósito de ofrecer una solución a los problemas planteados por aquel enunciado. Pues mientras las dos cláusulas «la estrella matutina» y «la estrella vespertina» designan uno y el mismo objeto, ambas poseen obviamente diferentes sentidos. ¿Pero cómo reconciliar la admisión de este hecho con nuestro intento de mostrar que expresiones y designaciones constituyen dos géneros de signos radicalmente diversos entre sí? La respuesta ha de ser que esas designaciones, al igual que otras muchas, derivan de expresiones, lo que permitiría decir que poseen sentido por derivación. Cuando nosotros nos servimos de la cláusula «la estrella matutina» como sujeto de una oración, no expresamos mediante dicha cláusula la proposición de que hay una, y sólo una, estrella habitualmente visible de madrugada, mas nuestro uso de la misma presupone la aceptación de esa proposición. En el lenguaje de la vida cotidiana, una oración que contenga la cláusula «la estrella matutina» se dirá que comporta (*implies*) que hay una, y sólo una, estrella habitualmente visible de madrugada. Este uso de «comporta» no ha sido muy estudiado en los tratados de lógica, pero es interesante y un tanto complejo. En un cierto sentido, comportar quiere decir aquí algo menos que expresar. Pues si la persona que se sirve de una cláusula que comporta una proposición determinada pasara a formular esa proposición, todos diríamos que ha añadido algo a su uso originario de la cláusula. En un otro sentido, sin embargo, lo que se entiende aquí por comportar sería algo más que la simple expresión de una proposición. Pues una persona podría expresar una proposición sin manifestar, ni pretender hacerlo, su creencia en ella; mas si se sirve de una cláusula que comporte esa proposición, se sobreentenderá que se ha comprometido a aceptarla incluso aun cuando la oración en que la cláusula interviene no sea una oración enunciativa. Así, si una persona invita a visitarla a un conocido reciente y le dice «Por favor, traiga consigo a su esposa», no asevera con ello la proposición de que su conocido esté casado, pero deja entender evidentemente que lo cree así. Designar algo es seleccionarlo como objeto de nuestra atención; y cuando el que habla se sirve de una descripción definida en singular como si estuviera tratando de designar una cosa, resulta natural asumir su creencia en la existencia de la cosa que haya de responder a la descripción, ya que en caso contrario su proceder sería de todo punto irrazonable. Cuando no esté segura, en cambio, de la verdad de esa proposición existencial

procurará cualificar convenientemente sus palabras. Si, por ejemplo, no sabe a ciencia cierta que el conocido esté casado, podría decir «Si está Vd. casado, traiga consigo, por favor, a su esposa». En este contexto, la descripción ya no parece seleccionar una determinada cosa, susceptible quizá de otras descripciones por parte de su usuario. Pues la cláusula condicional surte el efecto de cancelar el compromiso que de otro modo habría de contraerse al hacer uso de una descripción definida. A la vista de lo que muchos lógicos han dicho acerca de las descripciones definidas, acaso sea oportuno reparar en que una descripción definida podría darse en plural, esto es, de manera que comporte la existencia de *más de una* cosa que responda por ella. Así es como decimos, por ejemplo, «Los primeros apóstoles fueron todos judíos».

Frege fue bien consciente de que el uso de una descripción definida en el lenguaje ordinario como sujeto de un enunciado singular presupone la aceptación de una proposición no expresamente aseverada, dándose cuenta de que, cuando la descripción no alcance a designar cosa alguna, no se podría decir que el enunciado en su conjunto sea verdadero ni falso. Pero creía importante insistir en la vigencia del principio de tercio excluso para todas las fórmulas bien formadas de su propio lenguaje simbólico, lo que —según ya vimos— le llevaba a proveer de alguna suerte de referencia a toda descripción definida de su sistema, aun admitiendo que esa referencia tendría poco que ver en ocasiones con lo que normalmente consideramos tal al hacer uso de una descripción. Algunos lógicos han tratado con posterioridad de hacer frente a la dificultad por otras vías.

Whitehead y Russell procedieron en los *Principia Mathematica* como si la proposición que de ordinario se diría comportada por el uso de una descripción se hallase explícitamente enunciada en la oración que contiene a esta última. De acuerdo con su interpretación, «El rey de Francia es calvo» vendría a equivaler a $(\exists c)\{(x)[F(x)\equiv x=c].G(c)\}$, esto es, «Hay una cosa c tal que (I) para toda cosa, esa cosa es rey de Francia si, y sólo si, es idéntica a c, y (II) c es calva», que ciertamente expresará una proposición falsa si no hay ningún rey de Francia o hay más de uno [5]. Mas, en orden a asegurar la consistencia de su concepción, creyeron necesario distinguir entre intervención principal y secundaria de una descripción en el seno de una oración. Así, si alguien afirma «El rey de Francia no es calvo» queriendo decir con ello $(\exists c)\{(c)[F(x)\equiv x=c].\sim G(c)\}$, la descripción habrá intervenido con carácter principal, mientras que si hace uso del mismo patrón verbal significando mediante él $\sim(\exists c)\{(x)[F(x)\equiv x=c].G(c)\}$, la descripción habrá intervenido con carácter secundario. Se echa de ver que, en el primero de estos casos, el usuario de la descripción quedaría obligado a reconocer la aportación existencial (*existential implication*) de esta última, mientras que, en el segundo, la oración en su conjunto podría expresar una proposición verdadera aunque no haya ningún o un único rey de Francia. En su propio simbolismo, la distinción resulta claramente formulable por medio de un recurso semejante al uso de un cuantificador para indicar el alcance de una generalización. Así, nuestro ejemplo de intervención principal se traduciría mediante la fórmula $[(\imath x)F(x)]\{\sim G[(\imath x)F(x)]\}$, traduciéndose nues-

[5] *Principia Mathematica*, I, * 14.

tro ejemplo de intervención secundaria mediante la fórmula $\sim[(\iota x)F(x)]$ $\{G[(\iota x)F(x)]\}$. La repetición de la descripción a modo de prefijo de la expresión que figura entre paréntesis se toma aquí como indicación de que la aportación existencial de dicha descripción se halla confinada a los límites impuestos por los paréntesis. Se cuenta, sin embargo, con una convención que, en gracia a la simplicidad, permite la omisión del prefijo cuando su alcance sea el más reducido de las expresiones entre paréntesis en que la descripción pudiera entrar a título de término.

Hilbert y Bernays, por su parte, resolvieron la dificultad rehusándose a admitir como término ninguna descripción definida hasta tanto la proposición que dicha descripción comporte no haya quedado probada [6]. Se sigue de esta regla de procedimiento que un conjunto de signos inadmisible como fórmula en una fase dada del desarrollo del sistema podría, no obstante, resultar admisible en una fase posterior, tras la demostración de una serie de nuevos teoremas.

¿Qué habremos de decir de estas tres sugerencias? Consideradas como propuestas rivales tendentes a asegurar la preservación del principio de tercio excluso en relación con las fórmulas del lenguaje artificial de la lógica matemática, todas ellas son igualmente respetables, si bien detentan peculiares ventajas e inconvenientes. El esquema de Frege es el que mayor libertad concede al usuario de las descripciones, resultando el de más fácil manejo de los tres; pero es también el más arbitrario por su alejamiento de la práctica ordinaria. El esquema de Whitehead y Russell evita las extravagancias del anterior, permitiendo no obstante una considerable libertad al usuario de las descripciones que desea explicitar el contenido de las mismas; pero sólo consigue hacerlo así a costa de buen número de complicaciones simbólicas. El esquema de Hilbert y Bernays es fácilmente manejable y resulta asimismo sumamente natural en el sentido de corresponderse estrechamente con la práctica de los lenguajes naturales; pero restringe la libertad del usuario de las descripciones y convierte la noción de fórmula bien formada en algo relativo al grado de desarrollo del sistema, cosa que alguien podría considerar como un defecto. Por nuestra parte, sin embargo, nos inclinamos a preferirlo a los otros dos, sin que ello quiera decir que estos últimos hayan de resultar inapropiados en el contexto de la lógica matemática.

Por desgracia, la discusión de los méritos técnicos de nuestras tres propuestas se ha visto frecuentemente mezclada por obra de los filósofos con otras consideraciones ajenas a la cuestión. La razón de ello hay que buscarla en el intento de Russell de presentar su propia propuesta como una contribución al análisis filosófico. Russell mantenía, en primer lugar, que su interpretación de las descripciones definidas en el dominio de la lógica matemática constituye también una correcta caracterización del modo como aquéllas son usadas en el lenguaje ordinario y, en segundo lugar, que la distinción entre nombres lógicamente propios y descripciones se corresponde con la distinción existente entre dos géneros de conocimiento, a los que respectivamente bautizó con los nombres de conocimiento directo (*knowledge by acquaintance*) y conocimiento por descripción (*know-*

6 *Grundlagen der Mathematik*, I, § 8.

ledge by description). Nosotros ya sabemos que la primera de estas pretensiones es infundada y no necesitamos decir más acerca de ella, salvo anotar que Russell fue inducido aquí a errar por su deseo —por lo demás muy razonable— de encontrar un modo de escapar a la doctrina de Bolzano y Meinong, de acuerdo con la cual la cláusula «el actual rey de Francia», siendo como es significativa, habría de tener algo, aunque no necesariamente algo existente, por correlato [7]. Mas la segunda pretensión plantea un problema interesante del que nos hemos de ocupar en lo que sigue.

Según Russell, un *nombre lógicamente propio* es aquel que se usa para designar un objeto directamente conocido por el que habla en el momento de hablar, por ejemplo algo que está viendo en un sentido básico e inanalizable del verbo «ver», y que designa lo que designa sin describir ni comportar más nada acerca de ello. Los nombres propios ordinarios no se ajustan a esos estrictos requisitos. Así, «Homero» se habría de entender como equivalente a «el autor de la *Ilíada*», o algo por el estilo, y constituye en realidad una descripción. Tendría sentido decir «Homero no existió», mas no lo tendría en cambio decir «A existe» ni «A no existe» si «A» fuese un nombre lógicamente propio. Russell admite, ciertamente, que es difícil hallar en el lenguaje ordinario algo que sea un nombre lógicamente propio, pero opina que los demostrativos «esto» y «aquello», usados por referencia a datos de los sentidos, podrían tal vez citarse como ejemplos [8]. En todo esto hay una buena dosis de discutible epistemología que para nada nos concierne, pero es interesante reparar en que las tres caracterizaciones lógico-matemáticas de las descripciones definidas antes consideradas parecen presuponer la posibilidad de designaciones que no sean descripciones. Pues, en efecto, una descripción definida se construye haciendo uso de una expresión funcional, adecuándose a la intención de su usuario únicamente si hay algo que satisfaga esa función. Pero si todas las designaciones hubiesen de constituir descripciones, la justificación del uso de una descripción nos embarcaría en una regresión infinita; pues la demostración de que una cosa, y sólo una, es tal y tal tendrá que comportar a no dudarlo alguna referencia a dicha cosa, y lo hará así por medio de otra designación. Como cabría haber esperado, este argumento destinado a mostrar la necesidad de designaciones que no sean descripciones adquiere máxima cogencia cuando se le presenta en conexión con la caracterización russelliana de las descripciones. Pues, según Russell, todo enunciado en que intervenga principalmente una descripción definida será una abreviatura de un enunciado existencial complejo, y todo enunciado existencial se habrá de construir aplicando un cuantificador a una expresión funcional derivada de un enunciado de estructura más simple por omisión de uno de sus elementos constitutivos. Mas tanto Frege antes que él cuanto Hilbert y Bernays después que él han hablado asimismo como si tuviera que haber enunciados elementales de estructura sujeto-predicativa cuyo sujeto no sea una descripción definida sino un nombre propio, conectado de un modo más directo a aquello que designa. En el caso de Hilbert y Bernays la cuestión no reviste demasiada importancia, dado que se contentan con tratar a los enunciados del

---

7 B. Russell, "On Denoting", *Mind*, N.S. (1905), pp. 479-93; reproducido en *Logic and Knowledge*, pp. 41-56.

8 *Principia Mathematica*, I, pp. 174-5; "The Philosophy of Logical Atomism", *The Monist*, XXVIII (1918), pp. 495-527, reproducido en *Logic and Knowledge* (cf. especialmente p. 201).

tipo de «2+2=4» como elementales para sus propósitos. Pero, en el caso de Frege, tendría que haberle preocupado más de lo que lo hizo, puesto que Frege sostenía que toda designación posee un sentido y eso sugiere por lo menos que toda designación es una descripción.

En una nota al pie de su trabajo *Ueber Sinn und Bedeutung*, Frege escribe por ejemplo:

«En el caso de un auténtico nombre propio como 'Aristóteles', las opiniones pudieran divergir en cuanto a su sentido. Cabría, por ejemplo, asignarle el siguiente sentido: el discípulo de Platón y maestro de Alejandro Magno. Quienquiera que lo haga así asignará a la oración 'Aristóteles nació en Estagira' otro significado que el asignado por quien interprete aquel nombre como si su sentido fuese: el maestro de Alejandro Magno que nació en Estagira. En tanto que la referencia siga siendo la misma, tales variaciones de sentido resultan tolerables, si bien conviene evitarlas en la estructura teórica de una ciencia demostrativa y no se habrían de dar en un lenguaje perfecto» [9].

La observación de Frege es insatisfactoria, puesto que confunde el sentido del nombre con lo que dicho nombre sugiere a este o aquel oyente, oscureciendo así las características peculiares de los nombres propios ordinarios. Una persona que haya aprendido la palabra «Aristóteles» de un diccionario clásico y no recuerde nada del artículo correspondiente, salvo que Aristóteles nació en Estagira, no consideraría por ello al enunciado «Aristóteles nació en Estagira» como una futilidad del tipo de «El hombre nacido en Estagira nació en Estagira». En cambio, concedería sin dudarlo la inanidad de «Aristóteles se llama Aristóteles». La moraleja a extraer de lo que acaba de decirse es obvia. Un nombre propio ordinario funciona como una descripción definida que comporta o presupone la existencia de algo denominado por tal nombre en el círculo del que habla y su interlocutor. Algunos de esos nombres, como el apelativo «Paquito», implican además que la cosa así denominada es de un cierto género, por ejemplo un varón menor de edad. Y, cuando ello sea preciso, la capacidad selectiva de un nombre propio podrá verse reforzada mediante la introducción de palabras adicionales, como en «vuestro Paquito», «Fulano hijo», «Toledo de Ohio». Los nombres propios, como las descripciones, admitirían a veces ser usados desprovistos de fuerza existencial, como cuando los obligamos, por así decirlo, a suicidarse. Pero el hecho de que resulte algo paradójico decir «Homero nunca existió» demuestra claramente que el uso normal de un nombre propio presupone la existencia de algo denominado por tal nombre. Así, las palabras «New College» se convirtieron en un nombre propio cuando fueron por vez primera usadas por los habitantes de Oxford como equivalentes a la cláusula «el *college* al que la gente de la localidad se refiere comúnmente cuando dice 'New College'».

Decir, como hace Russell, que los nombres propios ordinarios constituyen un género de descripciones definidas puede ser confundente, pero está claro que los nombres propios ordinarios y las descripciones definidas plantean los mismos problemas, ya que su uso comporta —pero no garantiza— la existencia de cosas de las que son designaciones. ¿Es razonable, entonces, esperar que haya algo como lo que llamara Russell nombres lógicamente propios? De acuerdo con su explicación, si «A» es un

[9] *Über Sinn und Bedeutung*, p. 27.

nombre lógicamente propio, no sólo no tendrá objeto sino que carecerá de sentido decir «A existe», puesto que —aunque «A» hubiera de designar algo— tendría que hacerlo así sin comportar la posesión de ninguna característica por parte de la cosa designada. Esta parece una exigencia imposible de satisfacer. Pues designar, como hemos dicho, consiste esencialmente en seleccionar algo como objeto de nuestra atención por medio de un signo, y un signo que haya de servir a este propósito habrá de comportar algo consigo, aunque no sea más que la noción de que hay alguna cosa que ese signo designa para un cierto grupo de personas. Mas cuando Russell añade que una palabra no podría ser un nombre lógicamente propio a menos de designar algo directamente conocido por el que habla, está introduciendo otra exigencia de muy distinto cuño. Pues lo que ahora parece requerirse no es una designación carente de aportación existencial, sino más bien una designación cuya aportación en tal sentido se halle garantizada como verdadera. Ahora bien, la teoría del conocimiento presentada por Russell al respecto pudiera ser errónea y, en cualquier caso, hay que admitir que el conocimiento asignado al que habla no podría proporcionar ninguna garantía al que le escucha, pero es interesante reparar en que hay al menos una designación cuyo uso garantiza invariablemente —para el segundo no menos que para el primero— la verdad de lo por ella comportado. Se trata de la palabra «yo».

No todos los pronombres-casos de carácter reflexivo poseen esta peculiarísima propiedad. Cuando una persona asustadiza cree erróneamente que hay alguien debajo de la cama y se arma de valor para gritar «¡Salga usted de ahí!», el pronombre «usted» estará lejos de designar cosa alguna por más que sea usado con absoluta convicción. Y cuando, en el cuento de los nuevos ropajes del emperador, un cortesano dice «Esta es una rica tela» sin alcanzar a ver tela ninguna en manos del desvergonzado sastre, su afirmación pone de manifiesto que cabe un uso impostor del demostrativo «esta» en que tampoco se designaría nada. Mas ni la falsa creencia ni la mala fe (en cuanto diferentes de la deliberada, pero no insincera, simulación a los efectos de una representación dramática) podrían frustrar el carácter designativo del uso del pronombre «yo». Esta es, en definitiva, la razón de que San Agustín y Descartes demostrasen especial interés por la oración «Yo existo». Mientras que «Tú no existes» y «Esto no existe» no pasarían de invalidarse a sí mismas, la afirmación «Yo no existo» se autorrefuta. Pues la denegación de la existencia resulta aquí incompatible no sólo con la proposición existencial comportada por el uso del término-sujeto, sino con el hecho mismo de haber sido proferida la afirmación en cuestión. Sería erróneo, no obstante, suponer que la palabra «yo» goce de un privilegio único entre los signos usados con el propósito de referir. Aunque sea difícil llamar designaciones a los advervios «aquí» y «ahora», su cometido es contribuir a la selección de aquellos objetos sobre los que ha de recaer nuestra atención y, como «yo», nunca podrían dejar de prestar ese servicio al ser usados. Si una persona hablase de algo que sucedió en Lyonnesse durante el reinado del rey Arturo, pudiera estar creyendo erróneamente que hay un lugar llamado Lyonnesse y hubo una vez un rey llamado Arturo o tratando conscientemente de inducir a otros en esa errónea creencia; mas ningún uso de los vocablos «aquí» y «ahora» resultaría nunca engañoso en uno u otro de aquellos dos sentidos. La razón de

ello es obvia: «aquí» y «ahora», al igual que «yo», no presuponen al ser usados otra cosa que lo que se desprende de la propia proferencia de esos vocablos. En un lenguaje dotado de una sintaxis suficientemente desarrollada podrán aparecer como tres signos usados entre otros con el propósito de referir, pero su peculiaridad radica en que no añaden nada a lo ya implícito en una expresión unitaria. Cuando un hombre grita «¡Socorro!», da adecuadamente a entender con esta única palabra que él —el que habla— necesita ayuda en el lugar y en el instante —aquí y ahora— de hablar.

En última instancia, toda referencia a cosas o sucesos particulares en el espacio y en el tiempo consiste en la localización de esas cosas o sucesos por relación al acto de hablar. Pues así como un nombre propio como «Sócrates» selecciona como objeto de atención a la persona así llamada en el círculo al que pertenecen el que habla y su interlocutor, de la misma manera una descripción como «el lechero» desempeña su cometido proporcionándonos detalles suficientes para identificar un objeto *en el contexto del discurso*. Y aún más fundamental que estos recursos es el uso de tiempos verbales o desinencias temporales para indicar la fecha de un suceso por relación al momento de hablar. En un lenguaje artificial en que las reglas para el uso de un símbolo no tomen en cuenta para nada el contexto de la correspondiente locución será imposible expresar proposiciones singulares acerca de cuestiones de hecho, y es por ello por lo que un lenguaje simbólico como el de Frege no puede ser otra cosa que un complemento del lenguaje natural, extremadamente útil para la rigurosa discusión de generalidades en el dominio de la matemática y la ciencia natural, pero inadecuado por sí solo para los propósitos de la vida cotidiana o el análisis metafísico. En rigor, las únicas designaciones de que Frege y sus sucesores han hecho uso en la lógica matemática son símbolos de entidades abstractas tales como universales, clases y números. Como todas las designaciones, tampoco éstas podrían desempeñar el cometido que les es propio sin envolver aportaciones existenciales como las que antes veíamos, pero esas aportaciones son tan obvias que acostumbran a pasar desapercibidas. Así, quienquiera que hable de humanidad, o de la propiedad de ser un hombre, parece dar de modo natural por presupuesto que hay algo que todos los hombres poseen o podrían poseer en común. Y a nadie se le ha ocurrido nunca cuestionar esa presuposición como no sea a los filósofos obsesionados por su miedo a la metafísica, que les lleva a adoptar una serie de precauciones completamente fuera de lugar toda vez que las cosas a que se aplica un término general han de poseer al menos en común la característica de ser cosas a las que dicho término se aplica. De modo semejante, quienquiera que use el numeral «2» como una designación en oraciones tales como «2 es el menor de los números primos» tiende a creer espontáneamente que dicho numeral representa un objeto, y lo hace así por dar por presupuesto que hay algo que todos los conjuntos que poseen dos miembros comparten en común. En un caso como éste, no es ya tan fácil de explicar la conexión entre el nombre sustantivo y el adjetivo del que aquél se derivó históricamente, pero al menos está claro que nadie atribuiría ningún significado a un enunciado relativo a un número natural si no reconociese la posibilidad de hacer uso del numeral correspondiente para contar objetos de cualquier género.

El resultado de nuestra disquisición podría ahora resumirse como sigue. La actividad de designar no constituye el paradigma de todo otro uso de los signos, sino más bien se trata de algo incidental a la expresión de las proposiciones en aquellos lenguajes que han alcanzado el nivel sintáctico de su desarrollo. De un signo que sea una designación podrá decirse que posee un sentido, mas no porque en sí mismo exprese nada (cosa que ciertamente no hace), sino porque su uso presupone la aceptación de una proposición existencial. Si la designación es singular, comportará la existencia de una sola cosa de un género dado; si se trata de una designación plural, comportará la existencia de más de una cosa de ese género. Una designación de aquella especie que Russell bautizó técnicamente con el rótulo de «descripciones definidas» es una cláusula derivada de una expresión funcional, susceptible a su vez de ser usada en la formulación de la proposición existencial comportada por la designación. Un nombre propio ordinario, como «Sócrates» por ejemplo, equivale en su uso a una descripción de la forma «la persona llamada Sócrates», si bien sería erróneo considerar al primero como una abreviatura de la segunda, ya que se halla presupuesto por la cláusula «llamado Sócrates» y se trata por tanto de algo más primitivo que esta última. De modo semejante, los pronombres-casos de carácter reflexivo como «tú» y «esto» resultan equivalentes por su uso a descripciones tales como «la persona a la que me estoy ahora dirigiendo» y «la cosa a la que estoy ahora prestando atención». Si la proposición comportada por una designación es falsa, la designación no alcanzará a designar nada. Pero hay una designación, a saber, «yo», que no podrá dejar de designar algo cuandoquiera que su usuario se sirva de ella de acuerdo con las convenciones gramaticales que la rigen. Nuestro pronombre personal reviste dicha peculiaridad por limitarse a explicitar algo implícito en cualquier expresión unitaria. Para una adecuada comprensión del papel jugado por las designaciones de cosas y sucesos particulares en el nivel sintáctico del discurso, es conveniente tener siempre presente que las oraciones complejas funcionan como totalidades de una pieza a la manera de las expresiones unitarias, lo que hace que puedan expresar proposiciones diferentes en contextos asimismo diferentes. Las designaciones que se supone representan entidades abstractas plantean problemas especiales, pero también ellas envuelven aportaciones de tipo existencial, circunstancia ésta última que haremos bien en pasar por alto hasta que llegue la hora de atender a los debates filosóficos a que ha dado lugar.

3. La problemática de la intensionalidad.

En la lógica modal hablamos de proposiciones a las que adscribimos atributos, tales como la posibilidad, y relaciones, tales como la de implicación estricta. Es por lo tanto necesario que nuestro simbolismo contenga algún recurso que nos permita designar, no menos que expresar, proposiciones. Lewis y la mayor parte de los autores que se han ocupado de la cuestión evitan la introducción de un nuevo simbolismo especial a estos efectos, asumiendo tácitamente que, cuandoquiera que una expresión proposicional aparezca en el lugar correspondiente a la designación de una proposición, habremos de leerla como si fuera precedida de algún prefijo

por el estilo de «la proposición de que ...». Así, $\Diamond P$ y $P \rightarrow Q$ se considerarán, respectivamente, abreviaturas de *Es posible que-P* y *La proposición de que-P implica estrictamente la proposición de que-Q*. En nuestro anterior capítulo introdujimos el signo § como un prefijo destinado a convertir la expresión de una proposición en una designación, pero estipulábamos la posibilidad de omitirlo, cuando ello resultara conveniente, suponiéndolo absorbido por los correspondientes signos modales específicos, como sería el caso de los de Lewis. Es obvio que nada ganaríamos con imprimirlo en aquellos contextos en que su omisión no dé lugar a ningún malentendido, aunque en ocasiones pudiera sernos útil como recordatorio del hecho de que los enunciados de la lógica modal versan acerca de proposiciones y tienen designaciones de proposiciones por sujetos y complementos gramaticales. La construcción de que hablábamos se asemeja a la del discurso indirecto, donde —como apuntara Frege en su trabajo *Ueber Sinn und Bedeutung*— una cláusula precedida de la completiva «que» ha de tener por referencia lo que habría sido su sentido de no llevar delante aquel prefijo.

Dado que el efecto del signo § es convertir a las expresiones de proposiciones en designaciones de las mismas, cabría también servirnos de él en el simbolismo de la lógica para construir designaciones de funciones proposicionales en términos que nos permitan soslayar las dificultades de Frege. Es decir, podríamos escribir $\S xFx$ cuando deseásemos referirnos al sentido del signo funcional Fx y, de manera semejante, $\S xyG(x,y)$ cuando deseásemos referirnos al sentido de $G(x,y)$. La letra o letras insertadas tras § en estos casos se destinan a ligar la variable o variables de la expresión funcional que le sigue a continuación, por lo que no cabrá leer ya al signo § como si se tratara de una abreviatura de «la proposición de que», correspondiendo en lugar de ello a nuestras fórmulas la lectura «el atributo que una cosa posee cuando es F» o «la relación que una cosa guarda con otra cuando la primera de ellas es G respecto de la segunda» [10]. La posibilidad de contar con un simbolismo por igual aplicable a proposiciones y funciones proposicionales presentaría ventajas indudables, puesto que unas y otras plantean problemas similares. En las discusiones filosóficas sobre lógica se acostumbra a agruparlas conjuntamente bajo el rótulo de intensiones, por contraposición a los valores de verdad (considerados como objetos), las clases y los individuos, a los que se da el nombre de extensiones. Esta terminología de las «intensiones» y «extensiones» fue originariamente introducida, como sabemos ya, a propósito de los términos generales, mas su acepción actual constituye una expansión de la misma que no violenta demasiado aquel sentido y cabría aceptarla como un recurso conveniente que nos permita el tratamiento de una serie de cuestiones interrelacionadas. En ocasiones, se dice también que una descripción definida como «el rey de Francia» posee una intensión, a saber, un concepto individual como el de ser el único rey de Francia [11]. Nos guste o no esta terminología, podremos acordar que una descripción de la forma $(\imath x)Fx$

[10] En su uso delante de una expresión funcional el signo § se asemeja al operador lambda introducido por A. Church en su trabajo "Set of Postulates for the Foundation of Logic", *Annals of Mathematics*, XXXIII (1932), pp. 341-66, pero no está claro si aquel último es considerado allí por Church como un signo para la construcción de designaciones. En trabajos posteriores, Church trata a λx como equivalente al abstractor de clase de Whitehead y Russell.

[11] R. Carnap, *Meaning and Necessity*, pp. 41 190-1.

ha de poseer un sentido y, cuando haya ocasión de hablar directamente de este último, nos será dado, si lo deseamos, designarlo por medio de un signo complejo de la forma $\S x[Fx.(y)(Fy \supset y=x)]$. En todos estos casos permisibles, la prefijación de § a una expresión (delimitada si es preciso por medio de corchetes) efectúa una designación del sentido de lo que sigue, lo que tal vez dé pie para llamar a ese prefijo un abstractor intensional.

De un lenguaje en su conjunto se dirá que es intensional si nos permite la designación de intensiones allí donde ésta sea esencial, esto es, incliminable por medio de una traducción deflacionista como la que operaba la reducción de *Es verdad que-P*. Todos los lenguajes naturales de los pueblos civilizados merecen obviamente el título de intensionales. Y otro tanto sucede con el simbolismo de Lewis, toda vez que es una tácita convención de este último la de que un signo que oficie en él como sujeto gramatical del predicado $\Diamond$, o como sujeto o complemento directo del verbo $\dashv$, se considere una designación de lo que ordinariamente expresa (nosotros ya advertimos que en castellano se cuenta con una convención similar por lo que se refiere a aquellas cláusulas con una construcción de infinitivo que siguen al verbo «afirma» sin haber sido introducidas por la conjunción «que»). Es posible, no obstante, imaginar lenguajes en que las intensiones puedan ser expresadas mas nunca designadas: de estos lenguajes se dirá que son extensionales. La terminología resulta en este punto ligeramente confundente, pues quien se halle familiarizado con su historia tenderá espontáneamente a concebir a una intensión como algo susceptible de expresión y a una extensión como algo susceptible de designación; mas, si nos hemos de servir de ambos vocablos en el presente contexto, deberemos liberarnos de aquella asociación y concebir a una extensión como un individuo, una clase o un valor de verdad, concibiendo a una intensión como un concepto individual (si se da entrada a esta noción, por lo demás más bien chocante), una función proposicional o una proposición. Sería posible contar, como veíamos, con un lenguaje rudimentario en que cupiera expresar proposiciones mas no designar nada. De acuerdo con la definición que se acaba de proponer, semejante lenguaje habría de ser considerado extensional. Si lo enriqueciéramos con expresiones funcionales y designaciones de individuos y clases, seguiría siendo extensional. Pero si le añadiéramos designaciones de proposiciones, funciones proposicionales y conceptos individuales, se convertiría en un lenguaje intensional. Para decirlo en dos palabras, la diferencia entre ambos tipos de lenguaje se refiere a las entidades que cada uno de ellos admite como objetos del discurso, lo que hace que un lenguaje intensional sea esencialmente más complejo que otro extensional, ya que ha de permitir a un tiempo la expresión y la designación de todo aquello que en un lenguaje extensional sólo podría ser objeto de expresión.

En su artículo *Ueber Sinn und Bedeutung* Frege reconoció inequívocamente la posibilidad de considerar a las proposiciones como objetos del discurso, pero ni en su *Begriffsschrift* ni tampoco más tarde en sus *Grundgesetze der Arithmetik* se ocupó de proveer ningún recurso que permitiera dar satisfacción a esa u otras exigencias del lenguaje intensional. La razón de esta omisión fue presumiblemente que no consideraba necesario recurrir para nada al lenguaje intensional con vistas a la presentación de la

matemática. Whitehead y Russell procederían de igual manera en la primera edición de sus *Principia Mathematica*. Al tiempo que reconocían la posibilidad de enunciados intensionales tales como «Sócrates creía que su alma era inmortal», concentraron su atención casi con exclusividad en las características de los enunciados extensionales. Pero en la *Begriffsschrift*, y de nuevo en los *Principia Mathematica*, tropezamos con un principio lógico

$$x=y\supset(fx\supset fy)$$

que a primera vista parece inconsistente con la admisión de enunciados intensionales. Se trata, en efecto, del principio converso del de identidad de los indiscernibles leibniziano —«eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate»—, de suerte que tal vez cabría denominarlo principio de indiscernibilidad de los idénticos [12]. Que nosotros sepamos, este último principio no ha sido cuestionado ni tan siquiera por aquellos filósofos que repudian el principio de Leibniz, pese a que sus consecuencias parecen revestir extraordinaria importancia. Supongamos, por ejemplo, que sustituimos x por «12», y por «la suma del tercero y el cuarto de los números primos» y f por «el Papa sabe que el número de los apóstoles es ...». En ese caso, obtendríamos un enunciado verdadero para $x=y$ y otro enunciado verdadero para fx, pero un par de aplicaciones sucesivas del *modus ponens* arrojaría la conclusión «El Papa sabe que el número de los apóstoles es la suma del tercero y el cuarto de los números primos», enunciado este último sobre el que podrían al menos caber dudas. Por medio de argumentos similares nos sería incluso dado probar algunas paradojas de la teoría de la modalidad, como por ejemplo la de que cualquier enunciado de identidad que sea verdadero habrá de ser necesariamente verdadero. Pues, en efecto, la estrella matutina es idéntica a la estrella vespertina y la estrella matutina satisface la función expresada por las palabras «es necesario que la estrella matutina sea idéntica a ...». Parecería entonces pues, que la estrella vespertina ha de satisfacer también esta última función, esto es, que es necesario que la estrella matutina sea idéntica a la estrella vespertina.

¿Qué hacer ante esta delicada situación? En su *Tractatus Logico-Philosophicus* (5.54) Wittgenstein establece que un signo proposicional sólo podría entrar a formar parte de otro a título de argumento de una función de verdad. Formulado en esos términos, el aserto de Wittgenstein es obviamente falso, pues el signo proposicional «mañana lloverá» no oficia de argumento de una función de verdad en la oración «Fulano piensa que mañana lloverá». Pero quizá cupiera interpretar aquel aserto como un modo epigramático de afirmar la posibilidad de traducir sin residuo toda locución formulada en un lenguaje intensional a un lenguaje extensional. Esta Tesis de la Extensionalidad, como hoy se la conoce, fue adoptada por Russell en su introducción a la segunda edición de los *Principia Mathematica*, aparecida en 1925, y vigorosamente defendida por Carnap en su *Logical Syntax of Language* [13], publicada por vez primera en 1934.

Los signos complejos construidos con ayuda de nuestro abstractor in-

12 Tal denominación fue sugerida por W. V. Quine en su libro *From a Logical Point of View*, p. 139.
13 §§ 67-71, 74-81.

tensional podrían ser fácilmente eliminados de algunos contextos en los cuales concurren con expresiones especialmente destinadas a operar en sentido contrario al del abstractor. Así, la oración §*P es verdadera* podría ser reemplazada por *P* y *X ejemplifica* §*y Fy* podría ser reemplazada por *FX*. Pero éstos no son sino dos casos especiales. Carnap se vale, por su parte, de un método general de reducción gracias al cual cabría la posibilidad de reemplazar designaciones de intensiones por designaciones de expresiones, en tanto que los predicados de intensiones quedarían reemplazados por predicados de las correspondientes expresiones. Así, «Fulano piensa que mañana lloverá» vendría ahora a reducirse a «Fulano se dice a sí mismo con un sentimiento de convicción 'Mañana lloverá'», «Es necesario que 7+5=12» se reduciría a «El enunciado '7+5=12' es analítico» y «Platón escribió un libro acerca de la justicia» a «Platón escribió un libro que contiene la palabra 'justicia' o alguna otra equivalente», etcétera. Cuando una oración o una cláusula aparezca en la traducción entre comillas se ha de entender que constituye o forma parte de una designación independiente, por lo que no habrá que interpretarla como un elemento gramatical constitutivo de la oración principal. En especial, no hay que suponer que una palabra o una cláusula que intervenga como parte de una tal oración entrecomillada se pueda reemplazar a voluntad por otra que posea la misma referencia. Pues las convenciones que regulan el empleo de las comillas nos permiten usar «'7+5=12'» como designación de la oración «7+5=12», pero no nos permiten ciertamente usar «'7+5=el número de los apóstoles'» como designación de la oración «7+5=12». A partir de estas consideraciones parece que podríamos obtener una inmediata solución a nuestras cuitas. Cuando, por ejemplo, se nos haga comprender que el enunciado «Es necesario que la estrella matutina sea idéntica a la estrella vespertina» significa lo mismo que «La oración 'La estrella matutina es idéntica a la estrella vespertina' es analítica», caeremos en la cuenta de que la primera oración no versaba acerca de la estrella matutina sino acerca de un cierto conjunto de palabras, de suerte que la fórmula «Es necesario que la estrella matutina sea idéntica a *x*» no expresaría en ningún caso más de lo expresado por la fórmula «La oración 'La estrella matutina es idéntica a *x*' es analítica».

Tal vez quepa objetar a algunas de las reducciones de que se sirve Carnap para ilustrar su tesis. Por ejemplo, se podría dudar de que pensar consista siempre en hablar con uno mismo. Pero, en su conjunto, la tesis resulta indudablemente muy plausible. Cuando oímos hablar de las paradojas de la intensionalidad, todos nos inclinamos a responder que el ser necesariamente idéntico a la estrella matutina no es un auténtico atributo de objetos existentes independientemente de nosotros, como podrían serlo los objetos en que se piensa al considerar el principio fregeano de indiscernibilidad de los idénticos, sino más bien se trata de algo conectado con el lenguaje humano; y la tesis de la extensionalidad contribuye a dar una notable precisión a dicha idea. Si rechazamos, pues, la tesis de la extensionalidad, la razón para hacerlo así no podrá simplemente ser nuestra insatisfacción ante alguno de los ejemplos ofrecidos por Carnap, sino que habrá de constituir una objeción de principio a su manera de abordar el tratamiento de los enunciados intensionales. Lo más recomendable a estos efectos será, por consiguiente, concentrar nuestro examen crítico en

un sencillo caso de discurso indirecto, esto es, un caso en que no puedan caber dudas de la plausibilidad de la afirmación de que el uso del lenguaje intensional no es más que un sucedáneo de una relación de palabras proferidas y convertidas luego en objeto de cita.

Consideremos, por ejemplo, el enunciado «Los hombres de las cavernas informaban a sus hijos de que el fuego es peligroso». Se trata de un enunciado fácilmente inteligible, pero ninguna persona medianamente inteligente supondría que los hombres de las cavernas pronunciaban ante sus hijos las palabras castellanas «el fuego es peligroso» ni otras palabras de ninguno de los idiomas conocidos. Si se insistiera en sostener que el enunciado ha de versar realmente acerca de los sonidos emitidos por los hombres de las cavernas, la mejor reducción que podríamos ofrecer sería «Los hombres de las cavernas decían a sus hijos alguna frase que en su lengua significaba lo mismo que lo que significa ahora en castellano 'El fuego es peligroso'». Esta última versión ha de ser verdadera si la versión originaria es verdadera y, recíprocamente, si esta última versión es verdadera habrá de serlo la versión originaria. Pero no hay que pasar por alto, sin embargo, que la afirmación atribuida a los hombres de las cavernas se halla ahora especificada por la equivalencia de su significado con el de una oración en castellano. Si nos valiésemos de aquel procedimiento reductivo, evitaríamos ciertamente un manifiesto retorno al lenguaje intensional como el que envolvería, por ejemplo, la fórmula «Los hombres de las cavernas decían a sus hijos alguna frase que en su lengua significaba que el fuego es peligroso». Y el procedimiento en cuestión tampoco nos obligaría a adherir a ninguna teoría del significado patentemente inconveniente o inaceptable. Pues lo único que en nuestra fórmula se sostenía era que la frase empleada por los hombres de las cavernas significaba lo mismo en su lengua que lo que significa hoy una determinada oración castellana, y pudiera bien ser que la noción de identidad de significado admita alguna explicación satisfactoria sin incurrir en lo que a veces se ha tachado abusivamente de hipóstasis o reificación de los significados. Pero la reducción antes propuesta sería insatisfactoria, pese a todo, por introducir una referencia al castellano de la que no había rastro en la versión originaria de lo que los cavernícolas comunicaban a sus hijos [14].

¿Cómo evitar esta indeseada referencia sin retornar al uso de una cláusula completiva iniciada por la conjunción «que»? Sólo cabría hacerlo así por recurso a un uso algo más relajado del discurso directo no infrecuente en las traducciones. Cuando alguien, por ejemplo un fundamentalista, lee en su biblia «Dios dijo: Hágase la luz», pudiera ser que crea que Dios profirió ciertas palabras en hebreo; mas lo que no creerá, a menos de ser rematadamente tonto, es que dijera nada en castellano. De la misma manera, si formulamos el enunciado «Los hombres de las cavernas decían a sus hijos 'El fuego es peligroso'», la gente inteligente no supondrá que se desprenda de él que los hombres de las cavernas hablaran castellano; y quienquiera que se tome la molestia de traducir al francés nuestra oración traducirá asimismo las palabras entre comillas simples no menos que las otras. Pero este recurso de las comillas simples dentro del entrecomi-

14 Cf. A. Church, "On Carnap's Analysis of Statements of Assertion and Belief", *Analysis*, X (1950), pp. 97-99.

llado ordinario no es, a su vez, sino una variedad del lenguaje intensional. Pues en este contexto «'El fuego es peligroso'» no interviene como designación de los sonidos castellanos correspondientes a «El fuego es peligroso», sino más bien como un equivalente de la cláusula «que el fuego es peligroso». Cierto es que, en ocasiones, ambos recursos se asemejan tanto en el lenguaje hablado que carece de objeto preguntarse cuál de ellos se está empleando. Es lo que ocurre, por ejemplo, con el inglés hablado. Si un extranjero previniese a un niño inglés de los peligros de jugar con cerillas y éste preguntara a su madre «What does he say?» («¿Qué dice este señor?»), la respuesta de su madre podría igualmente transcribirse «He says 'Fire hurts'» («Dice 'El fuego es peligroso'») o «He says fire hurts» («Dice (que) el fuego es peligroso»). Y ello no debe sorprendernos, pues parece probable que los principales recursos con que se cuenta en todos los idiomas para designar intensiones procedan de algún modo de la simple yuxtaposición de palabras o cláusulas subordinadas suficientes para expresar aquellas intensiones.

Carnap, que ha sido el más acérrimo propugnador de la tesis de la extensionalidad, no pretende presentar a esta última como una verdad necesaria; y las consideraciones que acaban de ser adelantadas parecen sugerir que la plausibilidad de la misma se debe a una notable ambigüedad de nuestro uso de las comillas, ambigüedad a la que sin embargo no se ha prestado la atención que merece. Aunque Carnap presuma de haber logrado reemplazar los enunciados intensionales por enunciados que se refieren sólo a símbolos, sus traducciones no podrían resultar aceptables si no se permitiera retener a cada uno de los símbolos en ellas mencionado el estatuto lingüístico que le es propio al ser usado. Para decirlo en dos palabras, las comillas —contra lo que cree Carnap— no envuelven en este caso una mención de los signos en cuanto diferente de su uso, sino más bien un nuevo uso de los mismos, basado en su mención, como designadores del sentido que incumbiría expresar a dichos signos en su uso ordinario sin entrecomillar. Mas, comoquiera que ello sea, cabe la posibilidad de aprender algo del intento extensionalista por desembarazarnos de las paradojas de la intensionalidad, pues un abstractor intensional funciona en algunos aspectos de modo semejante a como lo hacían las comillas simples de nuestro último ejemplo.

En una expresión proposicional que contenga alguna clase de designación, el sentido de la expresión en su conjunto dependerá del sentido de esa designación no menos que del sentido de los restantes signos que intervienen en ella; pero en los casos más sencillos que llamamos extensionales, el valor de verdad de la proposición expresada por el conjunto no dependerá del sentido de la designación en cuanto diferente de su referencia. Así, la proposición de que la estrella matutina gira alrededor del sol resulta distinguible de la proposición de que la estrella vespertina gira alrededor del sol, pero ambas proposiciones poseen el mismo valor de verdad, ya que la estrella matutina es idéntica a la estrella vespertina. Por el contrario, en los casos más complicados que llamamos intensionales, el valor de verdad del conjunto podría muy bien depender del sentido de alguna designación contenida en una designación proposicional que a su vez forme parte del conjunto. Así, es verdad que es necesario que la estrella matutina sea la estrella matutina, mas no es verdad que sea

necesario que la estrella matutina sea la estrella vespertina. En líneas generales, y cualquier cosa que sea lo que las letras *F*, *G* y *H* puedan significar, el valor de verdad de la proposición expresada por $F\{\S G[(\eta x)Hx]\}$ dependerá de la referencia de $\S G[(\eta x)Hx]$ y ésta lo hará del sentido de $G[(\eta x)Hx]$, que a su vez dependerá del sentido de $(\eta x)Hx$, de suerte que a partir de la ecuación

$$(\eta x)Hx=(\eta y)Jy,$$

que únicamente garantiza la identidad de referencia, no nos sería dado concluir

$$F\{\S G[(\eta x)Hx]\}\equiv F\{\S G[(\eta y)Jy]\}.$$

En un caso como éste, el abstractor intensional, que llama la atención sobre el sentido del signo incluido dentro de su alcance, se destina asimismo a recordarnos que no cabe acudir al principio de indiscernibilidad de los idénticos para justificar la sustitución dentro de dicho alcance.

Nuestra tarea se habría visto considerablemente simplificada si hubiéramos podido decir que ninguna expresión de la forma $F(\S Gy)$ expresa una función proposicional. Pues se tendría en tal caso un paralelo casi exacto entre las reglas que presiden el uso de nuestro abstractor intensional y las que presiden el uso del entrecomillado: el principio de indiscernibilidad de los idénticos regiría entonces sin ningún género de restricciones y no se plantearía ningún problema acerca de los cuantificadores llamados a operar a través de un abstractor intensional con el fin de ligar variables dentro del alcance de este último, puesto que no habría lugar a la cuantificación de expresiones significativas en semejante posición. Pero la práctica ordinaria discurre en contra de esta tentadora sugerencia. La oración castellana «Había una cosa que dijo que le gustaba» difiere claramente en cuanto a su significado de «Dijo que había una cosa que le gustaba», correspondiéndole indudablemente a la primera la forma $(\exists y)F(\S Gy)$. Ser juzgado estúpido por Lenin, ser sospechoso de oportunismo para Trotsky, ser temido como un rival por Stalin —todas éstas son funciones intensionales o atributos, y quienquiera que lea un periódico tratando de localizar expresiones de ese género encontraría sin duda muchas otras. En conexión con este punto es importante, desde luego, distinguir entre $F(\S Gy)$ y $F(\S yGy)$. Mientras que la primera fórmula expresa una función intensional que admitiría como valor la proposición expresada por $F(\S GZ)$, la segunda expresa una proposición intensional acerca de la función designada por $\S yGy$; y es justamente con el fin de preservar tal distinción por lo que el argumento de esta última ha de quedar ligado por otra *y* insertada inmediatamente a continuación del signo §.

Nuestras dificultades surgen, pues, de la existencia de funciones intensionales, algunas de las cuales no podrían ser simplemente satisfechas por un objeto en cuanto tal sino sólo por un objeto en tanto que este último responda a una determinada descripción. Así, Edipo quiso matar al altivo extranjero que le ordenó apartase del angosto camino que conducía de Delfos a la ciudad de Daulia, pero no quiso matar a su padre, por más que el extranjero fuese de hecho su padre. Si alguien sostuviera que este género de funciones deben su peculiar estatuto lógico al hecho de que las expresiones de las mismas sólo tengan lugar en el discurso de segundo orden

(esto es, aquel discurso que presupone un uso más simple de los símbolos en el sentido de versar acerca de lo que éstos expresan y no todavía directamente acerca de los propios símbolos), aceptaríamos sin titubear su sugerencia; mas lo que no parece haber es una buena razón para excluir la posibilidad de tales funciones y, una vez concedido esto, resulta claro que el único modo de escapar a nuestras perplejidades consistiría en cualificar el principio de indiscernibilidad de los idénticos limitando su aplicación a las funciones extensionales (esto es, no-intensionales).

Insistir sin más en el principio de indiscernibilidad de los idénticos equivaldría, en efecto, a afirmar que en el contexto de nuestra aserción no reconocemos otras funciones que funciones extensionales. Cualificar ese principio a la manera que se acaba de indicar equivale, más bien, a admitir que, si Fx expresa una función intensional, no podremos pasar *formalmente* de las premisas FX y $X=Y$ a la conclusión FY. No hay duda de que, en ocasiones, la naturaleza de un contexto intensional muestra con suficiente claridad la posibilidad de sustituir *salva veritate* un nombre o descripción por otro nombre o descripción, pero sería vano esperar encontrar reglas de sustitución que hayan de resultar válidas en toda suerte de contextos de esa índole. Supongamos, por ejemplo, que no hay duda ninguna de la verdad del enunciado «Sto. Tomás de Aquino decía que la doctrina del Filósofo acerca del alma era correcta». ¿Cabría reproducir este enunciado sustituyendo «el Filósofo» por «Aristóteles»? De seguro que sí, pues —por más que Sto. Tomás se sirviera de la palabra latina *Philosophus* en lugar de *Aristoteles* en el pasaje a que nos referimos— nuestra sustitución parece perfectamente tolerable dentro de los límites de la libertad concedida por la costumbre al usuario del discurso indirecto. Incluso sería posible argüir que la nueva versión es preferible a la original, toda vez que se halla menos expuesta que esta última a sembrar el equívoco entre muchos lectores. ¿Diríamos en tal caso que también nos es dado sustituir, si así lo deseamos, «el Filósofo» por «el Estagirita»? Ahora ya no será posible responder con un sí o un no a secas. En el siglo XVIII, la sustitución no habría planteado con toda probabilidad ningún problema, ya que prácticamente todos los lectores hubieran reconocido en aquel giro una moderna descripción de Aristóteles a tenor de la moda literaria imperante en la época, sin caer en la tentación de suponer que Sto. Tomás identificaba a Aristóteles por referencia a su lugar de nacimiento. En nuestro siglo, en cambio, algunos lectores reconocerían todavía la pervivencia del amaneramiento dieciochesco, pero cabe que otros se dejaran extraviar creyendo que Sto. Tomás mencionaba en su texto la localidad de Estagira y acaso no faltara quien, ignorando que Aristóteles nació en Estagira, suponga que Sto. Tomás estaba pensando en otra persona. En resumidas cuentas, pues, no puede haber reglas formales de sustitución que resulten válidas para toda suerte de contextos intensionales, puesto que las nociones de afirmación, creencia, conocimiento, deseo, propósito, etc., que a menudo expresamos por medio de un lenguaje intensional, no son nociones formales. No faltan ciertamente determinadas convenciones a observar en varios de estos contextos (pues sin alguna clase de convenciones no nos podríamos comunicar como de hecho lo hacemos), pero sería erróneo considerar la investigación de esos contextos como asunto de la lógica. La lógica, tal y como en este libro la entendemos, se ocupa de la forma de las proposi-

ciones en cuanto diferente de su contenido o la materia sobre que esas proposiciones versan; y la única parte de la teoría de los enunciados intensionales que podría ser con propiedad calificada de formal es la lógica modal pura. No es de extrañar, por consiguiente, que sea ella la que ha suscitado un mayor interés entre los lógicos.

En un enunciado modal verdadero, ya sea de la forma $\Box\S G[(\eta x)Hx]$ o de la forma $\Diamond\S G[(\eta x)Hx]$, la sustitución de $(\eta x)Hx$ por $(\eta y)Jy$ podría llevarnos a una conclusión falsa, o incluso absurda, si no contáramos para ello con otro respaldo que el de una aserción contigente del tipo de

$$(\eta x)Hx=(\eta y)Jy.$$

Por ejemplo, sería ridículo extraer de la premisa modal

$$\Box\S(12<13)$$

y la verdad histórica

$$12=\textit{el número de los apóstoles}$$

la conclusión modal

$$\Box\S(\textit{el número de los apóstoles}<13).$$

Y no basta decir, como en la teoría de los silogismos modales de Teofrasto, que la conclusión ha de concordar por su modalidad con la más débil de las premisas. Pues igualmente ridículo sería extraer de la premisa modal

$$\Diamond\S\sim(\textit{el número de los apóstoles}<13)$$

y la verdad histórica

$$\textit{El número de los apóstoles}=12$$

la conclusión modal

$$\Diamond\S\sim(12<13).$$

En cambio, la sustitución en este tipo de contextos podría llevarse a cabo *salva veritate* cuando la designación a sustituir posea *necesariamente* la misma referencia que aquella que la ha de reemplazar, como sucede por ejemplo cuando sustituimos «12» por «7+5». No se quiere decir con ello que el resultado de la sustitución sea en tal caso una expresión con el mismo sentido exactamente de la expresión originaria, sino sólo que la sustitución no afecta para nada al valor de verdad de la expresión en su conjunto. Dos designaciones que posean necesariamente la misma referencia podrán, no obstante, diferir en cuanto a su sentido, comportando de esta manera una pareja diferencia de sentido entre las expresiones en las cuales intervienen, que de otro modo resultarían similares; pero, en cualquier caso, se hallarán relacionadas entre sí de forma tal que una de ellas pueda reemplazar a la otra en un contexto modal sin que se siga de ahí ninguna falsedad. En orden a comprender por qué ocurre así, consideremos una vez más el modo como funcionan las designaciones en los contextos modales.

Si la proposición expresada por $\Box\S G[(\eta x)Hx]$ es verdadera, la razón

de ello habrá de residir o bien en el hecho de que la función proposicional expresada por *Gy* rija para todos los argumentos posibles o bien en el hecho de que se halle implicada por el sentido de la designación $(\eta x)Hx$. Como ejemplo del primero de estos casos podríamos tomar el enunciado «Es necesario que la última reina de la Casa de los Estuardo haya muerto o no haya muerto». Puesto que toda cosa se ha de hallar en uno u otro de esos dos estados, podríamos reemplazar en aquel enunciado «la última reina de la Casa de los Estuardo» por cualquier otra designación de análogo carácter general sin que por ello se modifique el valor de verdad del enunciado en su conjunto. Como ejemplo del segundo caso podríamos tomar el enunciado «Es necesario que la última reina de la Casa de los Estuardo fuese una mujer». El sentido de la designación es absolutamente relevante en este caso. Si en lugar de «la última reina de la Casa de los Estuardo» hubiésemos escrito «el último monarca de la Casa de los Estuardo», nos seguiríamos refiriendo a la reina Ana, pero nuestro nuevo enunciado ya no sería verdadero. De cualquier modo, ni tan siquiera en este segundo caso formaría parte la presuposición existencial envuelta en la designación usada por el que habla de lo que este último declara ser necesario. El usuario de la designación cree presumiblemente que hubo una última reina de la Casa de los Estuardo, mas no que *ello* sea necesario, siéndole dado puntualizar dicho extremo mediante la adición de las palabras «si hubo de hecho tal reina» o la reformulación de todo el enunciado en los términos «La última reina de la Casa de los Estuardo tendría necesariamente que haber sido una mujer». Pues estas nuevas formas de expresión permiten conservar intacta la sustancia de la aserción modal al tiempo que cancelan el compromiso existencial ordinariamente comportado por el uso de una designación. En términos simbólicos se obtendría el mismo efecto introduciendo primeramente $H'x$ como abreviatura de $Hx.(y)[Hy \supset y=x]$, esto es, con el sentido de *x es la única cosa H*, y procediendo luego a escribir $\Box\S(x)[H'x \supset Gx]$ en lugar de $\Box\S G[(\eta x)Hx]$. Las aserciones modales de las que se han eliminado de esta suerte las designaciones podría decirse que se hallan transcritas en forma reducida. Si la función proposicional expresada por Gx envuelve un truísmo, $\Box\S(x)[H'x \supset Gx]$ habrá de ser verdadera cualquier cosa que sea lo que Hx pueda significar, con lo que el primero de los dos casos más arriba distinguidos vendría a subsumirse en el segundo.

En la argumentación precedente se ha asumido, como es obvio, la posibilidad de tratar a cualquier designación que aparezca en un contexto modal como una descripción definida o una abreviatura de semejante descripción: por ejemplo, la posibilidad de tratar a «la reina Ana» como una abreviatura de «la reina llamada 'Ana'» y a «12» como una abreviatura de «el número común a todos los conjuntos equivalentes en el sentido de Cantor al conjunto de los numerales '1', '2', '3', ..., '12'». Este procedimiento nos viene impuesto por la necesidad de atender en tales contextos al sentido de nuestras designaciones. En los contextos extensionales, para los que rige sin restricción el principio de indiscernibilidad de los idénticos, cabe que nos sirvamos de nombres propios sin hacernos demasiada cuestión de su sentido, de suerte que la sustitución de «Napoleón» por «Bonaparte» o viceversa parece con frecuencia reducirse a un asunto de preferencias estilísticas. Pero la situación ha de resultar por fuerza

muy diferente en los contextos modales. Pues, en efecto, se dice que es necesario que Napoleón sea idéntico a Napoleón, mientras que en cambio es meramente contingente que Napoleón sea idéntico a Bonaparte; y, en orden a comprender esta particularidad, tendremos que prestar atención —como Frege argüía— a las diferencias de sentido entre ambas designaciones, esto es, habremos de concebir a los dos nombres como si se tratara de abreviaturas de descripciones. No es ciertamente necesario que exista una persona llamada «Napoleón»; pero sí lo es que la única persona llamada «Napoleón», si existe tal persona, sea idéntica a la única persona llamada «Napoleón» [15].

Volviendo ahora al problema de la sustitución en los contextos modales, supóngase que tenemos el dato de partida

$$\Box\S[\eta x)Hx=(\eta y)Jy].$$

De acuerdo con las reglas ordinarias para el uso de las descripciones definidas, se sigue de él la fórmula $\Box\S H'[(\eta x)Jx]$, que a su vez podrá ser reducida por el procedimiento antes expuesto a $\Box\S(x)[J'x \supset H'x]$. Pero el enunciado

$$\Box\S G[(\eta x)Hx]$$

puede ser reducido a $\Box\S(x)[H'x \supset Gx]$, que —como se echa de ver bien fácilmente— ha de implicar, con la ayuda de la identidad necesaria de que partíamos, la consecuencia $\Box\S(x)[J'x \supset Gx]$, que a su vez es la forma reducida de

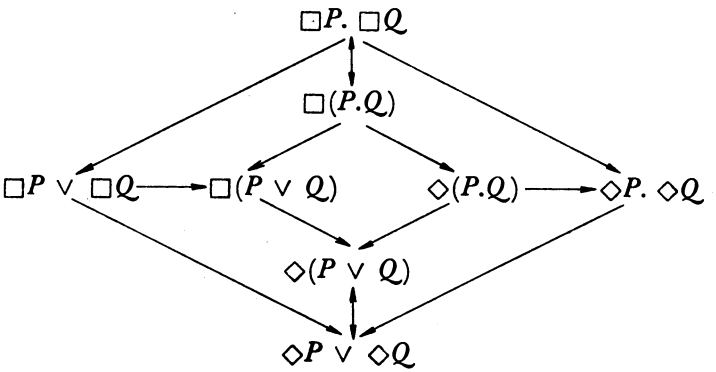
$$\Box\S G[(\eta x)Jx].$$

Por medio de un argumento similar será posible demostrar que la identidad necesaria de la referencia de dos designaciones constituye una condición suficiente para el reemplazamiento de la una por la otra *salva veritate* en un enunciado de posibilidad.

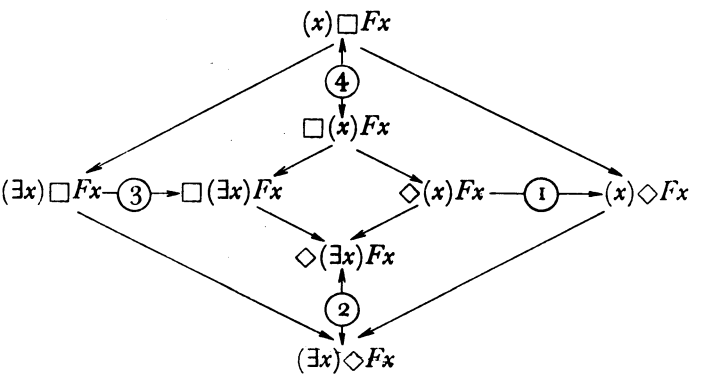
Cuando se pasa finalmente a considerar la posibilidad de servirnos de cuantificadores llamados a operar a través de los signos modales, y por ende a través de los correspondientes abstractores intensionales, resulta natural suponer que las relaciones entre fórmulas que combinan signos modales y cuantificadores se hallen gobernadas por reglas semejantes a las que gobiernan las relaciones entre fórmulas que combinan esos signos modales con los de la conjunción y la disyunción. Por lo que a estas últimas respecta, el consenso es general y podríamos representarlas valiéndonos del siguiente diagrama en que, para abreviar y con el fin de facilitar las comparaciones pertinentes, introducimos la convención de omitir el abstractor intensional que normalmente seguiría al signo modal en cada una de las fórmulas:

---

15 En los *Principia Mathematica*, * 14. 28, Whitehead y Russell afirman efectivamente que $(\iota x)\ Hx=(\iota x)Hx$ es verdadera si, y sólo si, $(\exists x)H'x$ es verdadera. Semejante restricción a la sustituibilidad en la fórmula $x=x$ viene exigida por su caracterización de las fórmulas que contienen descripciones definidas. En el castellano ordinario, el problema de la implicación existencial vendría a tratarse tal y como se indica más arriba.



La analogía requeriría en dicho caso que las reglas del primer tipo pudieran representarse tal y como se indica en el diagrama que ahora sigue, donde la cuantificación universal y existencial tomarían respectivamente los lugares de la conjunción y la disyunción:



Las fórmulas del cuadrilátero interior no plantean ningún problema, ya que sus cuantificadores aparecen incluidos en el alcance de los signos modales; mas las del cuadrilátero exterior, cuyos cuantificadores preceden a los signos modales y se supone han de ejercer su acción a través de ellos, han suscitado no escasa controversia. Las flechas sin numerar representan implicaciones garantizadas por los principios universalmente aceptados de la lógica, en tanto que las numeradas representan implicaciones sugeridas por la analogía arriba mencionada [16]. Se observará que las implicaciones de este último grupo son las únicas que conectan entre sí fórmulas de los dos cuadriláteros, así como que no son todas ellas mutuamente independientes. Por sustitución y contraposición podemos, en efecto, derivar (3) a partir de (1) y (4) a partir de (2) o viceversa. Si aceptamos todas esas implicaciones, nos será dado decir que los prefijos cuadrado y romboidal

[16] Los cuatro principios numerados se pueden encontrar en R. Carnap, *Meaning and Necessity* (1947), p. 186. Cf. también Ruth Barcan, "A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication", *The Journal of Symbolic Logic*, XI (1946), pp. 1-16.

de la lógica modal funcionan respectivamente como dos nuevos cuantificadores universal y existencial. Y esto es también lo que cabía esperar de la analogía antes propuesta. Pues cuando decimos que una proposición es necesaria, lo que se quiere decir con ello es que sería verdadera en todos los mundos concebibles; y, cuando decimos que una proposición es posible, lo que se quiere decir con ello es nuevamente que sería verdadera en alguno de los mundos concebibles.

Ciertamente no es fácil encontrar ejemplos que hagan intuitivamente plausibles las relaciones numeradas en cuestión. Pero quizá quepa alegar que la razón de esta dificultad no es otra que la de la dificultad que algunos lógicos experimentan cuando se enfrentan con los principios reductivos de la lógica modal. En los lenguajes naturales los términos modales aparecen sin duda algunas veces precedidos de cuantificadores; mas, cuando ocurre así, son casi siempre objeto de algún uso elíptico, esto es, se los usa para significar que algo es necesario o posible, según los casos, en relación con algo otro que no se explicita pero que el oyente podría identificar con facilidad. En el simbolismo técnico de la lógica modal se supone, en cambio, que todo ha de quedar suficientemente explicitado. Lo que en definitiva determina que, a la hora de verter el sentido del simbolismo técnico al habla ordinaria, nos veamos en ocasiones en aprietos por el hecho de que algunas palabras parezcan sugerir la necesidad de un cierto complemento cuando en rigor no se precisa de ninguno. Supongamos, por ejemplo, que se interpreta $(\exists x)\Diamond Fx$ como «Hay algo que puede que se queme» y $\Diamond(\exists x)Fx$ como «Puede que haya algo que se queme». Las dificultades surgen inmediatamente por la falta de equivalencia entre ambas oraciones castellanas, puesto que la primera podría ser usada para enunciar que algo es inflamable en tanto la segunda enunciaría que nuestra información no excluye la existencia de algo que esté ardiendo. Pero si se intentase ahora retraducir con propiedad estas dos últimas aserciones al simbolismo de la lógica modal, el resultado sería un par de fórmulas harto más complicadas que las conectadas en nuestro esquema por la relación (2). El rombo de la lógica modal únicamente significa ausencia de contradicción o consistencia interna y, de acuerdo con los estrictos términos de esta interpretación, las dos fórmulas que se acaban de mencionar resultarían ser lógicamente equivalentes, al menos para el universo no-vacío comúnmente asumido por los lógicos. Por lo demás, ninguno de los lógicos que se atienen a esta interpretación han ofrecido, desgraciadamente, ejemplos capaces de ilustrar satisfactoriamente las relaciones (1) y (3).

Ninguno de los sistemas lógico-modales considerados por C. I. Lewis se hallan provistos de recursos tendentes a facilitar la cuantificación modal en el sentido que acabamos de ver, esto es, la operación de cuantificadores a través de los signos modales a los cuales habrían de preceder. En cuanto a la expansión de esos sistemas en la línea que hemos esbozado en los párrafos precedentes, se halla en rigor bastante lejos de gozar de universal aceptación por parte de los lógicos Los autores que la rechazan arguyen en su contra que semejante innovación carece de objeto o incluso de sentido. Así, según G. H. von Wright se trata de una complicación innecesaria, ya que todo cuanto pueda expresarse por ese procedimiento podría ser expresado con más simplicidad sin su concurso [17]. Von Wright

17 *An Essay on Modal Logic*, p. 27.

hace descansar su argumentación en el supuesto de que es posible clasificar a todos los atributos de las cosas en dos grandes apartados, a saber, el de los atributos formales —cuya presencia en las cosas que los poseen, o su ausencia de las cosas que carecen de ellos, tiene carácter de necesidad— y el de los atributos materiales —cuya presencia en las cosas que los poseen, o su ausencia de las cosas que carecen de ellos, es meramente contingente—. Los atributos aritméticos, por ejemplo, corresponderían al primer apartado, en tanto los colores lo harían al segundo. De semejante supuesto (que von Wright denomina Principio de Predicación) parece desprenderse que, a la hora de determinar si un atributo es formal o material, la cuantificación modal habría de resultar completamente ociosa. Pues si Fx expresara un atributo formal, $(\exists x)\Box Fx$ y $(\exists x)\Diamond Fx$ serían por igual equivalentes a $(\exists x)Fx$; y, si Fx expresara un atributo material, la primera de aquellas fórmulas sería obviamente absurda en tanto la segunda sería perogrullesca.

Von Wright admite la existencia de aparentes excepciones a su principio, pero éste se halla expuesto a una objeción de tipo general que nuestro autor no parece haber tomado en cuenta. Que un atributo pertenezca necesariamnte a un sujeto que lo posee no es algo que dependa siempre única y exclusivamente de la naturaleza del atributo en cuestión. Ser menor que 13 es un atributo aritmético del que cabría decir, si se desea, que pertenece necesariamente al número 12; pero es en cambio falso que el número de los apóstoles sea necesariamente menor que 13, por más que el número de los apóstoles sea indudablemente 12. Parece como si von Wright hubiera podido dejarse extraviar en este punto por la dudosa distinción entre modalidades *de dicto* y modalidades *de re* que toma de los lógicos medievales. Si se supone que la cualificación *de re* excluye la dependencia de la modalidad respecto del sentido en cuanto diferente de la referencia del término-sujeto, habrá que concluir paradójicamente que los únicos enunciados modales *de re* verdaderos son aquellos cuyo término-sujeto pueda ser reemplazado *salva veritate* por cualquier otra designación de una cosa de la misma categoría, esto es, enunciados tales como «La reina Ana está necesariamente muerta o no muerta», en que el término-sujeto carece de importancia en orden a determinar la verdad del enunciado en su conjunto y ésta depende simplemente del carácter tautológico de la expresión «muerta o no muerta».

La objeción de W. V. Quine a la cuantificación modal es aún más radical; pues, en efecto, no se limita a sugerir que carezca de objeto, sino que afirma expresamente que carece de sentido e incluso llega a sostener que haríamos bien en olvidarnos de toda la teoría de la modalidad y las proposiciones y atributos que esta última parece requerir. Sus argumentos en tal sentido podrían compendiarse libremente como sigue con la ayuda de un ejemplo considerado con anterioridad. Quienes autorizan el empleo de términos y cláusulas modales tienden a pensar que $\Box(12<13)$ expresa una proposición verdadera. Y, si aceptamos tal, habremos presumiblemente de admitir asimismo que $\Box(x<13)$ expresa una función satisfecha por el número 12, en cuyo caso difícilmente podríamos rehusarnos a autorizar la formulación de la oración existencial $(\exists x)\Box(x<13)$. ¿Mas cómo habremos de entender esta innovación? Es claro que no puede tratarse exactamente de la aserción de la existencia de un número que posea una de-

terminada propiedad; pues si existiera dicho número, quienquiera que formule la aserción en cuestión podría ser invitado a justificarla declarando expresamente qué número es el que posee la mencionada propiedad, siendo en tal caso irrelevante que responda «12» o «el número de los apóstoles» puesto que ambas designaciones poseen la misma referencia. Y de nada valdría, por otra parte, sugerir —como lo han hecho algunos lógicos— que la variable x pueda tomar por valores algún tipo de intensiones. Pues si admitimos intensiones como posibles valores de nuestras variables, nos veremos obligados a abandonar el principio de indiscernibilidad de los idénticos y, faltos de un criterio de identidad claro y distinto, seremos incapaces de decir cuanto haya que decir acerca de las extensiones:

«Ontologías intensionales y ontologías extensionales son como el aceite y el agua. La admisión de atributos y proposiciones, junto con el libre uso de la cuantificación y otros recursos básicos, elimina a los individuos y las clases. Ambos tipos de entidades sólo pueden acomodarse en la misma lógica con la ayuda de restricciones como la de Church, tendentes a impedir que unos y otros objetos se entremezclen; lo que equivale más o menos a establecer dos lógicas por separado con un universo para cada una» [18].

Por nuestra parte no creemos que la tarea del filósofo haya de consistir en proscribir la mención de proposiciones y atributos o en recordarnos la obligación de desterrar los términos «posible» y «necesario» de nuestro vocabulario lógico. Acaso los rompecabezas metafísicos relativos al *status* de las proposiciones se asemejen un tanto a los planteados por la naturaleza de las sociedades políticas; y, así como sería exagerado precaverse de las extravagancias hegelianas afirmando «No hay Estados», de la misma manera pudiera constituir una exageración tratar de contrarrestar las aserciones de Bolzano y Meinong afirmando «No hay proposiciones». Si, como Quine ha puesto de relieve, hay algo que no funciona en los frecuentes esfuerzos de los lógicos por acreditar la cuantificación modal, habremos de buscar la fuente de la dificultad en los detalles de su simbolización más bien que en un supuesto pecado original de todas nuestras alusiones a proposiciones y modalidades. Tan pronto nos acerquemos al problema llevados de ese ánimo, tendremos ocasión de comprobar que no era tan difícil encontrarle una solución.

La construcción de una fórmula como $(\exists x)\Box Fx$ o $(x)\Diamond Fx$ presupone que sabemos ya de antemano lo que significan las fórmulas $\Box FY$ y $\Diamond FY$. Consideremos con algún detalle el primero de aquellos casos. Nosotros ya hemos visto cómo podía ser siempre eliminada una designación que, intervenga en un contexto modal. Si la designación no es una descripción definida sino un nombre propio (por ejemplo, «Napoleón»), tendremos en primer lugar que reemplazarla por una descripción definida con el mismo sentido (por ejemplo, «la persona llamada 'Napoleón'»). A continuación procederemos a extraer de nuestra descripción, sea por ejemplo $(\imath x)Gx$, el predicado $G'x$ con el significado de *x es la única cosa G*. Y finalmente escribiremos, en lugar de $\Box F[(\imath x)Gx]$, $\Box(x)[G'x \supset Fx]$ o $(x)\Box[G'x \supset Fx]$, que no será sino otro modo de aseverar conjuntamente en términos de necesidad todas las proposiciones expresables por medio de fórmulas de im-

[18] *From a Logical Point of View*, p. 157. El trabajo de Church al que Quine se refiere es "A Formulation of the Logic of Sense and Denotation", en *Structure, Method, and Meaning: Essays in Honor of Henry M. Sheffer*, 1951.

plicación del tipo de $G'Z/FZ$. Ahora bien, cuando nosotros tropezamos con la fórmula $(\exists x)\Box Fx$ ignoramos cuál sea la descripción relevante de la cosa o las cosas que se haya de decir que constituyen necesariamente ejemplificaciones de la característica expresada por Fx, mas sabemos en cambio que sólo hay dos posibilidades a considerar. $(\exists x)\Box Fx$ puede querer decir o bien *Hay algo que bajo cualquier descripción es necesariamente F* o bien *Hay algo que bajo una determinada descripción es necesariamente F*. Si se opta por la primera interpretación (*de re*), $(\exists x)\Box Fx$ no podrá expresar una proposición verdadera a menos que Fx sea un predicado tautológico, implicado por tanto por cualquier descripción que podamos concebir. Pero eso sería tanto como decir que la fórmula discutida equivale a $\Box(x)Fx$. Si se opta, en cambio, por la segunda interpretación, $(\exists x)\Box Fx$ no podrá expresar una proposición verdadera a menos que haya alguna de entre sus descripciones permisibles que implique el predicado Fx. Pero eso sería tanto como decir que la fórmula discutida equivale a $(\exists x)Fx$. Bajo ninguna de las dos interpretaciones podrá representar $(\exists x)\Box Fx$, por lo tanto, un nuevo tipo de proposición. Y un argumento similar permitiría demostrar que, si $(x)\Diamond Fx$ posee algún significado, habrá de equivaler o bien a $(x)Fx$ o bien a $\Diamond(\exists x)Fx$, con lo que tampoco sería aquí menester la cuantificación a través de los signos modales. En realidad, podríamos habernos ahorrado toda esta discusión de haber retenido a lo largo del presente capítulo la caracterización relacional de la modalidad introducida en el capítulo precedente; pero en tal caso habríamos debido pasar por alto aquella interesante particularidad del lenguaje que hace posible la construcción de enunciados de las formas $\Box F[(\imath x)Gx]$ y $\Diamond F[(\imath x)Gx]$, y tampoco habríamos podido ofrecer una aceptable reseña del reciente debate acerca de la intensionalidad.

4. Identidad, funciones y clases.

En su *Begriffsschrift*, y de nuevo en sus *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege considera la de identidad como una noción básica para la que resulta necesario formular una serie de axiomas especiales. En los *Principia Mathematica* (* 13.01), en cambio, Whitehead y Russell evitan el recurso a axiomas especiales para la identidad, introduciendo $X=Y$ como una abreviatura de $(f)[f!X \supset f!Y]$. El signo ! que aparece aquí tras de la letra f se destina a indicar que las funciones consideradas son todas ellas *predicativas* en un sentido técnico del vocablo. Tal restricción viene exigida por la Teoría Ramificada de los Tipos de Russell, según hemos de ver en el capítulo siguiente, mas los autores prosiguen apuntando que no comporta una efectiva pérdida de generalidad, ya que el Principio de Reducibilidad —introducido para mitigar el rigor de la Teoría Ramificada de los Tipos— nos permite operar con la definición como si ésta se aplicase a toda suerte de funciones, predicativas o no. En ocasiones se precisa que la distinción existente entre las funciones predicativas y las que no lo son es una distinción de *orden*, pero este modo de hablar nada tiene que ver con la idea de que el discurso que requiere del lenguaje intensional es de un orden superior al discurso expresable en un lenguaje extensional y en ningun caso bastaría para remontar las dificultades concernientes al lenguaje intensional. Si admitimos la existencia de funciones intensionales al tiempo que hacemos uso de la definición tal cual, nos encontraremos abocados a la cu-

riosa conclusión de que no podría haber ninguna relación de identidad que resultase desconocida para los seres racionales. En efecto, la estrella matutina no podría ser idéntica bajo aquellos supuestos a la estrella vespertina, ya que al menos hay una función —a saber, la de ser conocida por todos los seres racionales como idéntica a la estrella matutina— satisfecha por la primera mas no por la segunda. Es por ello por lo que cuanto antes se dijo en relación con el tratamiento fregeano de la identidad se ha de aplicar también, *mutatis mutandis*, al tratamiento de la cuestión en los *Principia Mathematica*. Es decir, la definición de la identidad propuesta por Whitehead y Russell tendría que ser cualificada de manera que únicamente se aplicase a las funciones extensionales. ¿Hay en tal caso alguna buena razón para optar por uno u otro de dichos tratamientos?

En el sistema de Frege, como en los *Principia Mathematica*, la teoría de la identidad se considera un apartado de la lógica, mas las razones de su inclusión en esta última no aparecen muy claras y un crítico hostil podría objetar que Frege no nos ha ofrecido una caracterización general de la lógica desde la que poder juzgar si permanece fiel a su programa en este punto. En cambio, cuando la noción de identidad se introduce mediante una definición parece evidente que la teoría de la misma habrá de formar parte de la logica. Pues los signos de identidad sólo podrán ahora oficiar de abreviaturas de proposiciones que cabría formular valiéndonos exclusivamente de signos de reconocido carácter lógico. Sin embargo, esta aparente ventaja únicamente podría ser obtenida al precio de la introducción del cuantificador (f) en la definición. Pues desde luego es cierto que, de acuerdo con sus propias explicaciones, la fórmula de Frege

$$x=y\supset(fx\supset fy)$$

habría de ser tratada como una abreviatura de

$$(f)[x=y\supset(fx\supset fy)].$$

Pero nosotros ya hemos visto que el lógico se halla autorizado a servirse de un tipo especial de variables libres para la expresión de la universalidad correspondiente a sus propias locuciones. Y este recurso nos permitiría escribir

$$X=Y\supset(FX\supset FY)$$

en lugar de la fórmula fregeana, de la que la actual no sería un simple sustituto, constituyendo más bien la expresión esquemática de un truísmo. En el sistema de los *Principia Mathematica*, por el contrario, el uso de una variable funcional *ligada* resulta esencial para la definición de la identidad. Pues mientras Whitehead y Russell daban a entender que una expresión de la forma $X=Y$ podría ser considerada como la abreviatura de una expresión de la forma $(f)[f!X\supset f!Y]$, no pretendían en cambio sugerir la posibilidad de reemplazar invariablemente una expresión de la forma $X=Y$ por otra de la forma $F!X\supset F!Y$ ni viceversa. Ahora bien, la aplicación de cuantificadores a variables funcionales es la señal de haber pasado a un nuevo cálculo considerablemente más complejo que el cálculo simple o restringido de funciones proposicionales a que nos hemos venido refiriendo a lo largo de este capítulo. Si juzgásemos que este nuevo cálculo ha de considerarse parte de la lógica, podríamos conceder que Whitehead y Russell han lo-

grado reducir a la lógica la teoría de la identidad, en el supuesto siempre de que haya algún modo satisfactorio de constreñir su definición al ámbito de las funciones no-intensionales. Mas si por cualquier razón deseásemos hablar de la identidad sin hacernos cuestión por el momento de todas las dificultades planteadas por el nuevo cálculo, habríamos de retornar al procedimiento de Frege y presentar la teoría de la identidad como un cálculo de más modestas proporciones resultante de la adición de dos axiomas especiales a los axiomas y reglas del cálculo funcional restringido. Una de las razones para obrar así sería precisamente el hecho de que la teoría de la identidad se halle tan estrechamente ligada como lo está a la distinción entre lenguaje intensional y extensional. La distinción entre *Sinn* y *Bedeutugn* le vino impuesta a Frege desde el primer momento por la reflexión acerca de enunciados tales como «La estrella matutina es idéntica a la estrella vespertina», y es posible que fuera la importancia cobrada en su pensamiento por esa distinción la que le impulsó a introducir la de identidad como una noción básica.

Cuando Frege escribió su *Begriffsschrift* no creía necesario proveer a su sistema de recursos específicamente destinados a permitir la inclusión dentro del mismo de un cálculo de funciones en el que se aplicaran cuantificadores a variables funcionales. Mas, al reformular su sistema de lógica de acuerdo con los objetivos perseguidos en sus *Grundgesetze*, le añadió un nuevo axioma cuantificacional cuya versión simbólica actualizada arrojaría la fórmula

$$(f)g_x(fx) \supset g_x(hx).$$

Bajo semejante formulación, el axioma nos dice que lo que rige para todas las funciones de primer grado de un argumento rige para cualquiera de ellas; y, al igual que en el simbolismo de Frege, la letra minúscula que figura como subíndice de la letra funcional g tiene por cometido el indicarnos que cualquier argumento admisible para el paréntesis que sigue habrá de ser una función de primer grado de un argumento. Se trata, pues, de un prefijo destinado a ligar la variable correspondiente, pero no exactamente de un cuantificador. Por lo demás, es obvio que nuestro nuevo axioma presenta características muy similares a las del paralelo axioma cuantificacional con variables individuales, a saber,

$$(x)fx \supset fy.$$

Pero es el único con que se cuenta expresamente en el sistema de Frege con vistas a justificar la aplicación de cuantificadores a variables funcionales, por lo que en modo alguno resulta, pues, superfluo. Sin esta innovación, cuya importancia podría calificarse de trascendental, Frege ni tan siquiera habría podido hacer que su tesis de la reducibilidad de la aritmética a la lógica pareciese mínimamente plausible. Y si, por lo demás, hubiera considerado necesario aplicar cuantificadores a variables funcionales de segundo grado o grados superiores, podría quizás haberlo hecho formulando un axioma cuantificacional por separado para cada uno de aquellos grados sucesivos. Nosotros ya hemos visto, sin embargo, que Frege se sentía un tanto incómodo ante fórmulas que envolvieran variables funcionales de orden superior, lo que le indujo a simplificar su tarea hablando de clases y clases de clases en lugar de funciones de diversos grados.

Probablemente fue la dificultad de manejo de su propia notación la que determinó la reluctancia de Frege hacia las fórmulas con variables funcionales ligadas. Y es posible que esa dificultad se debiera a su vez al rígido contraste que creía necesario establecer entre funciones y objetos. Mas, cualquiera que pueda ser nuestra opinión acerca de la concepción fregeana de las funciones, habremos de admitir que el recurso a variables funcionales ligadas resulta un tanto insólito y chocante. Así se evidencia, por ejemplo, tan pronto como tratamos de encontrar una traducción literal de las fórmulas en que intervienen tales variables.

Tampoco es fácil, ciertamente, encontrar en el lenguaje ordinario traducciones estrictamente equivalentes de las fórmulas con variables ligadas individuales, pero dicha dificultad se ve usualmente superada mediante el adecuado empleo de una serie de pronombres. Así $(\exists x)[FxGx]$ podría ser traducida como si se tratara de una abreviatura del modismo, más o menos aproximado a una oración normal en castellano, *Hay algo tal que ello F y ello G* *. Pero cuando se aplican cuantificadores a variables funcionales, la gramática del simbolismo se aleja tanto de la del lenguaje ordinario que ya no es posible ofrecer una traducción literal, pieza por pieza, de las fórmulas en cuestión. ¿Cómo habríamos de leer, por ejemplo, $(\exists f)[fX.fY]$? Al construir una fórmula de este género, los lógicos tratan en ocasiones de verbalizarla por medio del modismo, sólo remotamente análogo a una oración normal en castellano. *Hay alguna f tal que X f e Y f* *. Este mejunje de fórmula simbólica y fragmento del lenguaje ordinario es evidentemente inelegante, pero aparte de ello es insatisfactorio porque deja en la oscuridad el papel desempeñado por la variable *f*. Dicha letra parece destinada, en el interior de la fórmula, a indicar un lugar vacío que habría que rellenar mediante una expresión funcional tal como un verbo, pero en el prefijo aparece tratada como si fuera lo que los lógicos medievales llamarían un término general de segunda intención, equivalente acaso a «función». O —para decirlo inversamente—, tras de la cláusula «hay alguna» todo el mundo espera que aparezca un nombre común, pero la letra que ahí oficia como un nombre se ve forzada luego a ocupar el lugar correspondiente a un verbo. Y análogas dificultades surgirían a la hora de aplicar cuantificadores a variables proposicionales. En cada uno de estos casos, el origen de la dificultad parece radicar en la ausencia de construcciones castellanas que correspondan con alguna exactitud al uso de un cuantificador con una *expresión* variable cuya condición gramatical se asemeje a la de un verbo o una cláusula verbal. Si quisiéramos transcribir a un lenguaje natural lo que en el simbolismo de la lógica se formula como $(\exists f)[fX.fY]$, todo lo más aproximado que podríamos encontrar sería *Hay alguna característica ejemplificada por X y asimismo por Y*. La analogía entre la fórmula y esta última lectura de la misma es bastante estrecha, mas no se tratará de una traducción pieza por pieza de los símbolos lógicos a menos de alterar nuestras convenciones para el uso de esos símbolos, interpretando la *f* del interior de la fórmula como un signo que indica el hueco a rellenar por la *designación* de una función y asignando al orden de los signos de una expresión compleja de la forma *FX* el significado de que *F* es ejemplificada por *X*.

---

* En el original, *There is something such that it F's and it G's (T.)*
* En el original, *There is some f such that X f's and Y f's (T.)*

Frege no creía posible hablar de una función sin incurrir en una manifiesta impropiedad gramatical, por lo que no podía tratar a las variables funcionales como signos indicadores de lugares vacíos a rellenar por medio de designaciones completas. Según su concepción, una función era algo esencialmente incompleto; y consideraba inevitable que semejante peculiaridad se viese reflejada en la forma del axioma o axiomas cuantificacionales especialmente introducidos para la extensión del cálculo de funciones. Si se distingue cuidadosamente entre expresión y designación, podrá hablarse de funciones sin con ello dar pábulo a las perplejidades de Frege; pero la nueva interpretación del simbolismo lógico sugerida en el último párrafo no nos liberará de la necesidad de un axioma o regla especial a la hora de aplicar cuantificadores a variables funcionales. En el cálculo restringido de funciones contamos con reglas que gobiernan el razonamiento con expresiones de las formas $(x)Fx$ y $(\exists x)Fx$, donde Fx se considera abreviatura de cualquier expresión funcional que contenga a x; mas si adoptamos la convención de que FX represente la abreviatura de *F es ejemplificada por X*, nuestras reglas no nos permitirán ya operar con fórmulas que respondan a esquemas tales como $(x)[Gx \supset Hx]$ ni bastarán tampoco para explicar o justificar la aplicación de cuantificadores a aquellas variables que hayan de ocupar la posición de F. Pero la introducción de reglas de cuantificación por separado para los diferentes tipos de variables no resulta del todo satisfactoria, por lo que sería preferible detenernos a examinar la posibilidad de obtener alguna simplificación recurriendo a un nuevo simbolismo.

Un modo de escapar a la dificultad consistiría en dejar conservar a FX el sentido que Frege le asignara, pero introduciendo una nueva constante funcional η con el significado de «ejemplifica». Dado que nuestro nuevo símbolo es una suerte de verbo, los signos que aparezcan a ambos lados del mismo en el interior de una fórmula habrán de ser los dos designaciones, requiriéndose en cualquier caso que por lo menos el segundo de esos signos constituya la designación de una función. Como variante de FX tendríamos, así, $X\eta Y$, donde Y sería una abreviatura de $\S xFx$. En ciertos casos, el signo que precede a la constante η podría designar una serie ordenada de dos o más elementos, en tanto el signo que la sigue designaría una característica susceptible de ser ejemplificada, si de algún modo, por la serie en cuestión. Eso es lo que sucede cuandoquiera que transcribimos una proposición relacional en nuestra nueva notación. En lugar de $G(X,Y)$ tendríamos entonces $<X,Y>\eta Z$, donde Z sería una abreviatura de $\S xyG(x,y)$. Y todavía en otras fórmulas los signos que figuran a uno y otro lado de la constante η podrían constituir designaciones de funciones, como cuando se dice que una función ejemplifica alguna característica. Pero si una de esas designaciones, o las dos, se viesen reemplazadas por una variable, obtendríamos una expresión susceptible de constituirse en una matriz de enunciados generales. Así, matrices de las formas $x\eta Y$ y $X\eta y$ admitirían por igual su cuantificación de acuerdo con las reglas ordinarias de la teoría cuantificacional, y se podría escribir $(\exists z)[X\eta z.Y\eta z]$ para expresar la proposición de que hay una característica ejemplificada a la vez por las cosas que llamamos X e Y. Aparte de la simplificación que nos permite por lo que se refiere a la expresión de proposiciones generales acerca de funciones, la nueva notación reviste además el mérito notable de poner de mani-

fiesto que lo que frecuentemente se conoce bajo el nombre de cálculo ampliado de funciones proposicionales viene a identificarse con la teoría de la ejemplificación. De todo ello no se sigue, ciertamente, que hayamos de considerar a η como la única expresión funcional de nuestro lenguaje, lo que nos obligaría a servirnos de ella en la formulación de toda suerte de proposiciones. Pues, cuando deseemos adscribir un determinado atributo a la cosa que llamamos X, nada se ganaría con escribir $X\eta\S yFy$ en lugar de FX; y, en cualquier caso, la posibilidad de designar una función presupone invariablemente la posibilidad de expresarla. Pero el hecho de poder presentar el cálculo funcional ampliado por medio de un sistema construido a base de un nuevo signo irreductible a los de la teoría ordinaria de la cuantificación es importante, pues revela que dicho cálculo es en definitiva la teoría de la noción expresada por este último signo.

Al discutir problemas filosóficos en el contexto del lenguaje ordinario, Frege hablaba con frecuencia de la inclusión o subordinación de una cosa bajo un concepto; mas, por las razones que en su momento examinamos, se sentía insatisfecho de este modo de hablar y no trató jamás de desarrollar un cálculo de la ejemplificación como el que acabamos de sugerir. Sin embargo, el cálculo de la pertenencia a una clase —mediante el que trataba de soslayar las dificultades planteadas por la aplicación de cuantificadores a variables funcionales en su propia notación— se asemeja considerablemente al nuestro en cuanto a su estructura. Pues así como FX se podría traducir por $X\eta\S yFy$, cabría no menos traducirla por $X\varepsilon\hat{y}Fy$, donde ε sería una abreviatura de «es un miembro de». Y así como el hecho de que una cosa se relacione con otra de un determinado modo podría considerarse como la ejemplificación de una característica relacional por un par ordenado, de la misma manera cabría considerarlo como la pertenencia de ese par ordenado a una clase de pares ordenados. En rigor, la única diferencia importante entre ambos cálculos reside en la diferente condición de identidad que uno y otro establecen para sus peculiares tipos de entidades. Al introducir la notación en términos de clases de los *Grundgesetze*, Frege estipuló un axioma (su axioma V) cuya versión simbólica actualizada arrojaría la fórmula:

$$(\hat{x}Fx=\hat{y}Gy)\equiv(z)[Fz\equiv Gz].$$

En términos de clases, dicha formulación equivaldría a afirmar:

$$(X=Y)\equiv(w)[w\varepsilon X\equiv w\varepsilon Y].$$

Mas la proposición resultante no podría en cambio formularse en términos de características o atributos, de los que ni siquiera sería correcto afirmar:

$$(X=Y)\equiv\Box(w)[w\eta X\equiv w\eta Y],$$

pues mientras de la identidad de dos características se sigue que han de ser necesariamente ejemplificadas por las mismas cosas, la conversa no es por su parte verdadera. Todos los triángulos equiláteros son necesariamente triángulos equiángulos, pero el significado de «triángulo equilátero» no es idéntico al significado de «triángulo equiángulo».

No deja de ser históricamente interesante que el desarrollo de la lógica matemática, iniciado con los intentos leibnizianos de formular un cálculo *de continentibus et contentis*, alcanzara su culminación en la obra de Frege, Whitehead y Russell con una teoría de la pertenencia a una clase. Mas no

debemos conceder demasiada importancia a la semejanza entre ambas denominaciones. Leibniz no distinguió con claridad entre la relación de un miembro con una clase y la relación de una clase con una superclase de la cual forma parte, mas casi todo cuanto hubo de decir a este respecto únicamente resulta apropiado por referencia a la segunda relación. El álgebra booleana de clases, que acostumbramos a considerar como una realización del proyecto de Leibniz, constituye ciertamente una teoría de las relaciones entre clases cuyos miembros, si dichas clases los poseen, habrán de proceder en su totalidad de un común dominio de individuos llamado el universo del discurso. Se trata, en efecto, de un fragmento el cálculo restringido de funciones proposicionales. El cálculo de Frege, por su parte, no se ocupa tan sólo de relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento entre clases del mismo nivel, sino asimismo de la pertenencia de una clase a otra. Se trata, en pocas palabras, de la teoría cantoriana de conjuntos, presentada como una derivación del cálculo ampliado de funciones proposicionales. Aun si la aplicación de cuantificadores a variables funcionales no hubiese constituido para él un motivo de desazón, es probable que Frege deseara hablar de clases por las mismas razones que llevaron a Cantor a hablar de conjuntos. Pues para la ejecución de su programa es menester demostrar (*a*) la posibilidad de elaborar la aritmética dentro de la teoría de conjuntos y (*b*) la posibilidad de describir a la teoría de conjuntos como un apartado de la lógica. Del éxito o el fracaso de semejante tentativa se hablará en los próximos capítulos. Por el momento, sólo nos interesa detenernos en las posibles consecuencias de operar con clases o conjuntos más bien que con funciones.

Aunque Frege consideraba a los enunciados acerca de clases como adecuados sustitutos de enunciados acerca de funciones en determinados contextos, nunca creyó, no obstante, que cupiese identificar a unas con otras. De acuerdo con sus explicaciones, sólo nos sería dado sustituir enunciados acerca de funciones por enunciados acerca de clases cuando los primeros sean tales que resulten verdaderos para todas las funciones materialmente equivalentes a las allí consideradas. Whitehead y Russell compartieron dicho punto de vista en la primera edición de los *Principia Mathematica*. Pero en la introducción a la segunda edición de esta obra, Russell declararía que no creía ya necesario distinguir entre clases y funciones por juzgar que todas las funciones habrían de ser extensionales. Con otras palabras, acabó prestando su asentimiento a toda aserción de la forma

$$(x)[Fx \equiv Gx] \supset [H(F\hat{x}) = H(G\hat{x})].,$$

donde, de acuerdo con su convención, $F\hat{x}$ y $G\hat{x}$ serían designaciones de funciones [19]. Si lo que Russell quería decir con ello es que su simbolismo no cuenta con recursos para expresar funciones intensionales, sus afirmaciones son sin duda correctas, aunque más bien intrascendentes. Mas si lo que quería decir es que todas las funciones de funciones expresables en cualquier simbolismo que quepa imaginar son en última instancia extensionales, su tesis reviste extraordinario interés filosófico, pero lo menos que se puede decir de ella es que resulta sumamente controvertible. Es de aquí precisamente de donde arranca el debate en torno a la intensionalidad y se deriva la moderna acepción de las adjetivos «intensional» y «extensional» con todo su problematismo.

[19] *Principia Mathematica*, 2ª ed., vol. I, p. xxxix.

Muchos lógicos del pasado prefirieron hablar de clases con la esperanza de poder, de esta manera, ahorrarse las dificultades planteadas por los universales. Suponían, por ejemplo, que hasta el más reticente tendría que aceptar la entidad de una clase de objetos materiales, ya que, aunque sus miembros no se hallen apilados en un lugar del espacio como puedan estarlo las piedras de un montón, siempre cabrá la posibilidad de considerar a esa clase como si por su parte se tratara de un objeto material compuesto. Pero ni Russell ni sus seguidores se han hecho ilusiones acerca de este punto. Quine advierte, por ejemplo, que la clase de los estados de Norteamérica no es idéntica a la clase de los condados de Norteamérica, por más que el territorio comprendido en los primeros coincida con el territorio comprendido en los segundos [20]. Si el hablar de abstracciones entraña algún peligro, el recurso a una notación en términos de clases no nos permitirá escapar a él, ya que las clases a su vez no son sino abstracciones. Y tampoco podremos liberarnos por este medio de la necesidad de emplear otras expresiones funcionales que la constante ε en algún nivel de nuestro lenguaje. Pues toda designación de una clase habrá de ser o bien un signo de la forma $\hat{x}Fx$ o bien un signo cuyo significado y referencia se hallen determinados por recurso a un signo o signos de aquel género. En ocasiones, ciertamente, cabría indicar una clase mediante la enumeración de sus miembros, esto es, construyendo un signo de la misma que responda a la forma $\hat{x}(x=Y \vee x=Z \vee \ldots)$, pero es evidente que no todas las clases podrían ser representadas de este modo. Pues, si cupiera hacerlo así, todos los enunciados de pertenencia verdaderos serían a la postre tautológicos. En la actualidad, los lógicos que prefieren hablar de clases más bien que de funciones basan su preferencia en el propósito de rehuir los problemas de la intensionalidad, llegando a veces a reconocer que las clases de que hablan son tan *universales* como lo puedan ser las funciones a las que han de reemplazar.

A este respecto es interesante señalar que los lógicos que coinciden en preferir la notación en términos de clases pudieran inclusive discrepar entre sí en no menor medida de lo que los filósofos del pasado discrepaban acerca de los universales. Según Quine, los antiguos rótulos del realismo, el conceptualismo y el nominalismo volverían a encontrar aplicación en el contexto de la moderna fundamentación de la matemática [21]. Por «realismo» entiende al parecer la buena disposición a admitir la existencia de clases y de clases de clases cuandoquiera que nuestro simbolismo sugiera la posibilidad de hacerlo así; por «conceptualismo» entiende el programa de admitir únicamente la existencia de clases cuando estemos en situación de determinar algún procedimiento que permita su construcción; y por «nominalismo», finalmente, entiende el intento de prescindir enteramente de la admisión de la existencia de clases. En la práctica, se supone que estas tres actitudes se traducen en una mayor o menor inclinación a conceder la aplicabilidad de cuantificadores a variables de clases. Aunque, a decir verdad, es realmente dudoso que la resurrección de esas viejas etiquetas pueda servir a ningún fin de provecho en este punto, especialmente si el realismo se identifica erróneamente —como sucede con frecuencia— con el platonismo. Ahora bien, el hecho de que Quine y otros autores condesciendan a hablar en tales términos revela al menos claramente que no creen

20 *Mathematical Logic*, § 22.
21 *From a Logical Point of View*, pp. 127-9.

factible desembarazarse de toda suerte de problemas en torno a los universales por el simple expediente de recurrir a hablar de clases. Y en este punto, ciertamente, hemos de darles la razón.

Cuando en el así llamado cálculo funcional de orden superior se aplican cuantificadores a variables funcionales, se corre el riesgo de pasar por alto la esencial novedad del sistema resultante por el hecho de no haber sido introducido ningún símbolo de nuevo cuño. Pero si el sistema es presentado expresamente como una teoría de la ejemplificación o de la pertenencia, el riesgo será ahora el de pasar por alto el hecho de haber sido asumidas diferentes categorías de entidades básicas o fundamentales como posibles valores de las variables de nuestra lógica general o teoría de la cuantificación subyacente. Hao Wang ha escrito a este respecto:

«El contraste entre teorías de la cuantificación entitativamente homogéneas o unicategoriales (*one-sorted*) y entitativamente heterogéneas o pluricategoriales (*many-sorted*) es aún más radical que el existente entre cálculos de predicados de primer orden y de orden superior *. Mientras que los cálculos de predicados de orden superior y las teorías formuladas en su interior constituyen todos ellos sistemas pluricategoriales, hay teorías pluricategoriales —como la geometría que se ocupa de puntos, líneas y planos— que no se hallan formuladas mediante cálculos de predicados de orden superior. Y en tanto que las teorías pluricategoriales de la cuantificación tratan a todos los cálculos a la par, los cálculos de predicados de orden superior colocan en un pedestal a la relación de pertenencia. En rigor, un cálculo de predicados de *n*-ésimo orden no es sino una teoría *n*-categorial que contiene un único axioma (el axioma de comprehensión) encargado de asegurar que toda fórmula significativa del sistema defina un conjunto» [22].

Una teoría es pluricategorial si posee diferentes géneros de variables, cada uno de ellos restringido a un campo diferente de objetos como posibles valores de las mismas. Las diferencias de género entre las variables pueden venir indicadas tipográficamente, pero ello no es esencial, corriendo la indicación frecuentemente a cargo del contexto. Así, si en una versión de la geometría plana nos encontramos con la frase *x yace sobre y*, sabremos bien que las letras *x* e *y* representan lugares vacíos a rellenar, respectivamente, por designaciones de puntos y de líneas. Pero si la teoría es realmente pluricategorial, habremos de asumir que las reglas de cuantificación se repiten o reiteran para cada uno de dichos géneros de variables por separado. Naturalmente, las reglas en cuestión habrán de revestir la misma forma en todos esos casos; pero, de cualquier modo, el requisito de su repetición o reiteración pudiera resultar enojoso, por lo que cabría preguntarse si no es posible conseguir todos los objetivos que la teoría se propone valiéndonos para ello de una lógica general unicategorial cuyas reglas de cuantificación se hallen formuladas de una vez por todas.

---

* La traducción de *one-sorted* y *many-sorted theories* por "teorías unicategoriales (o entitativamente homogéneas)" y "teorías pluricategoriales (o entitativamente heterogéneas") alude al hecho diferencial de que unas y otras envuelven, respectivamente, una o más de una categoría de objetos fundamentales (como, pongamos por caso en la teoría de los tipos, individuos, clases de individuos, etc.). Cf. sobre este punto Hao Wang, *A Survey of Mathematical Logic*, Amsterdam, 1963, pp. 322 y ss. *(N. del T.)*

22 "On Denumerabie Bases of Formal Systems" en Th. Skolem y otros, *Mathematical Interpretation of Formal Systems* (1955), p. 76. El término "pluricategorial" (many-sorted) fue introducido por A. Schmidt, "Uber deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen", *Mathematische Annalen*, CXV (1938), pp. 485-506.

La respuesta parece ser que nos es dado transcribir toda teoría pluricategorial a un lenguaje unicategorial de base si permitimos que nuestras variables tomen por campo de valores la suma de todas las categorías de la teoría considerada, reintroduciendo luego la distinción de categorías mediante un cierto número de predicados categoriales (como, por ejemplo, «es un número natural», «es un punto», «es una línea») gracias a los cuales podamos formular las condiciones exigibles para todos y cada uno de los teoremas del sistema. Así, en lugar de decir

$$x(y+z)=xy+xz,$$

donde habría que sobreentender que las variables sólo tienen por campo de valores la categoría de los números naturales, vendríamos a decir

$$\textit{Si } x, y, z \textit{ son números naturales, } x(y+z)=xy+xz.$$

Esta uniformación (*standardization*), como a veces se la llama, es un procedimiento que acostumbramos a seguir sin vacilar en el lenguaje ordinario y que tampoco en nuestro caso parece hallarse expuesto a objeciones fundamentales. E incluso es interesante constatar que, en muchos casos por lo menos, la transcripción de una teoría pluricategorial a un lenguaje unicategorial de base puede llevarse a cabo sin necesidad de añadir nuevos predicados categoriales. En tales casos, la oportuna distinción de categorías podría efectuarse formulando las condiciones categoriales pertinentes por recurso a los símbolos ya disponibles en el lenguaje de base uniformado [23].

De entre las teorías pluricategoriales, aquella que se ocupa de la pertenencia —esto es, la teoría de conjuntos— reviste especial importancia, como parecen reconocer los matemáticos al servirse del adjetivo «elemental» para calificar a aquellas ramas de su investigación que no la presuponen. Pero no es en modo alguno obvio que se trate de la única teoría requerida para dar cima a una presentación completa de la ciencia. En ocasiones, Russell y otros filósofos inspirados en su obra dan la impresión de hablar como si sólo pudiese haber una categoría básica de individuos, aparte de la cual sólo cabrían diversas categorías de conjuntos. No es inimaginable que tal tesis sea correcta, y por lo pronto constituye una interesante muestra de especulación filosófica que acaso un día dé pie a un detallado programa de unificación de la ciencia. Pero sería un error creer que su corrección se halle garantizada por consideraciones de orden lógico. En contextos diferentes es posible considerar como individuos a entidades correspondientes a categorías asimismo diferentes, de suerte que las letras llamadas por los lógicos variables individuales indicarán lugares vacíos susceptibles de ser rellenados por cualesquiera nombres o designaciones que completen sus fórmulas sin merma de su significatividad. Si la metafísica se ocupa —como Aristóteles pensaba— de cuestionar la naturaleza de las entidades básicas o fundamentales, sus problemas no podrán ser resueltos mediante puras consideraciones lógico-formales; y ello no tanto porque la lógica formal no tenga nada que ver con la estructura del universo, cuanto más bien porque se ocupa de esquemas o formas recurrentes a diversos niveles.

---

[23] Hao Wang, "Logic of Many-sorted Theories", *Journal of Symbolic Logic*, XVII (1952), pp. 105-16.

5. Necesidad y lenguaje.

Aunque Frege tenía mucho que decir sobre los principios de la sintaxis y se veía a sí mismo como el artífice de un nuevo lenguaje especialmente adecuado para propósitos científicos, nunca consideró a la lógica —a diferencia de muchos de sus predecesores— como una *ars sermocinalis*, estando por otra parte lejos de compartir la concepción de Hobbes y Berkeley según la cual la necesidad lógica es algo impuesto por las reglas humanas para el uso de las palabras. Por el contrario, al hablar de la reducibilidad de la aritmética a la lógica insistió con vigor en que no se trataba de convertir a la primera en una rama de la psicología o la filología. La lógica era para él la más general de todas las ciencias que versan acerca de la realidad —la *doctrina formarum* de que había hablado Leibniz—, y su única conexión con la gramática obedecía al hecho de ocuparse de aquellas estructuras básicas que todo lenguaje natural ha de poder reproducir. Esta fue asimismo la doctrina sostenida por Whitehead y Russell cuando escribieron sus *Principia Mathematica*. Pero, con posterioridad, la teoría convencionalista de la necesidad sería adoptada por no pocos filósofos, llegándose en ocasiones a considerar a la lógica como si esta última se identificara con la semántica, esto es, con el estudio de aquellas reglas o hábitos lingüísticos que otorgan a las palabras su significación. Este viraje parece datar de la publicación del *Tractatus Logico-Philosophicus* de Ludwig Wittgenstein en 1921, aunque es casi seguro que su autor no trató en un primer momento de defender nada parecido.

En los años anteriores a 1914, en que estudiaba en Cambridge con Russell, Wittgenstein le hizo observar que las verdades de la lógica no podían ser satisfactoriamente definidas como el conjunto de todas las verdades expresables mediante un cierto vocabulario sino que era posible distinguirlas de las restantes verdades por lo que dio en llamar su carácter específicamente tautológico, entendiendo por tautología no la simple repetición de lo mismo sino más bien la vacuidad de esas verdades. En una obra escrita mientras cumplía condena de cárcel por sus actividades pacifistas, Russell se referiría como sigue a dicha sugerencia:

«Podríamos tomar el axioma de infinitud como un ejemplo de proposición susceptible de ser enunciada en términos lógicos pero cuya verdad no cabría garantizar por medio de la lógica. Toda proposición lógica detenta una característica que acostumbra a expresarse diciendo de esa proposición que es analítica o que su negación comporta una contradicción. Pero este modo de hablar es insatisfactorio. La ley de no-contradicción no es sino una más en el conjunto de las proposiciones lógicas y no le corresponde una especial preeminencia; y, en cuanto a la prueba de que la negación de una proposición comporta una contradicción, dicha prueba parece requerir de otros principios deductivos además del de no-contradicción. No obstante, la característica de las proposiciones lógicas que andamos buscando es aquella que entrevieron y trataron de definir quienes han afirmado que consiste en su deducibilidad a partir de la ley de no-contradicción. Y esta característica, a la que por el momento podríamos dar el nombre de tautología, no es evidentemente detentada por la aserción de que el número de los individuos del universo es *n*, cualquier número que *n* pueda ser... Las proposiciones lógicas son tales que resultan susceptibles de ser conocidas *a priori*, sin necesidad de escrutar el mundo real... Esta última no es una característica de las proposiciones lógicas en sí mismas consideradas, sino más bien de nuestro modo de conocerlas. Mas no carece de relevan-

cia por lo que se refiere al problema de cuál pueda ser la naturaleza de esas proposiciones, ya que hay algunos tipos de proposiciones cuyo conocimiento sería difícilmente imaginable sin recurso a la experiencia. Y está claro que también la definición de 'lógica' se ha de buscar a través de una nueva definición de la vieja noción de proposición 'analítica'. Aunque no podamos seguirnos dando por satisfechos con la definición de las proposiciones lógicas como aquellas que se siguen de la ley de no-contradicción, podemos y debemos continuar admitiendo que se trata de una clase de proposiciones enteramente diferentes de las que nos es dado conocer por vía empírica. Todas ellas detentan esa característica que convinimos en llamar, hace un momento, 'tautología'. Dicha característica, en combinación con el hecho de poder expresar exhaustivamente las proposiciones en cuestión en términos de variables y constantes lógicas (donde por constante lógica se entiende aquello que en una proposición permanece inalterado al cambiar *todos* sus elementos constitutivos), arrojará la definición de la lógica o la matemática pura. Mas por ahora no sé cómo definir con exactitud tautología. (La importancia de la 'tautología' para una definición de la matemática me la hizo ver mi antiguo discípulo Ludwig Wittgenstein, que trabajaba a la sazón sobre el problema. Pero ignoro si ha conseguido resolverlo, y ni siquiera sé en estos momentos si vive o ha muerto)» [24].

Aunque sostenía que las verdades de la lógica eran vacuas en un cierto sentido, Wittgenstein no pensaba que careciesen de importancia y estaba lejos de creer, en esta fase de la evolución de su pensamiento, que constituyeran creaciones humanas arbitrarias. En uno de los pasajes de su *Tractatus* que mayor relación guarda con este punto, Wittgenstein escribiría:

«Las oraciones (*Sätze*) lógicas describen la armazón del mundo o, mejor, la presentan. No 'tratan' de nada; presuponen que los nombres poseen referencia y las oraciones atómicas (*Elementarsätze*) sentido; y ésta es su conexión con el mundo. Es claro que el hecho de que ciertas combinaciones de símbolos —que revisten esencialmente un carácter determinado— sean tautologías ha de manifestar algo sobre el mundo. Y aquí radica el punto decisivo. Decíamos que en los símbolos de los que nos servimos hay parte de arbitrario y parte que no lo es. En el dominio de la lógica sólo se expresa esto último: pero eso quiere decir que, en el dominio de la lógica, no somos *nosotros* quienes expresamos por medio de los signos lo que deseamos expresar, sino que es la naturaleza de los signos esencialmente necesarios la que habla por sí misma. Esto es, tan pronto como conocemos la sintaxis lógica de cualquier lenguaje de signos, todas las tesis (*Sätze*) de la lógica están ya dadas» [25].

El carácter tautológico de las aserciones lógicas se suponía susceptible de determinación por el método de las tablas de verdad, careciendo de verdadera importancia a este respecto la imposibilidad de presentar las aserciones universales y existenciales mediante tablas de una complejidad finita. El hincapié de Wittgenstein en sus definiciones tabulares de las funciones de verdad obedecía, naturalmente, a su convicción de que la lógica no se ocupa de ninguna clase específica de cosas o de relaciones que puedan darse en el mundo sino únicamente de la naturaleza de eso que tal vez cabría llamar la complejidad lógica. En un lugar escribe por ejemplo:

«Una operación de verdad es el modo como una función de verdad resulta de las oraciones atómicas... Toda oración es el resultado de operaciones de verdad con oraciones atómicas... Todas las funciones de verdad son resultado de la sucesiva aplicación de un número finito de operaciones de verdad a oraciones atómicas. Que-

24 *Introduction to Mathematical Logic* (1919), pp. 202-5.
25 *Tractatus Logico-Philosophicus*, 6. 124. Para la traducción de éste y otros textos del *Tractatus* nos hemos apartado en ocasiones de la versión inglesa de Ogden y Ramsey.

da, así, claro que no hay cosas tales como 'objetos lógicos' o 'constantes lógicas' (en el sentido de Frege y Russell)» [26].

Pero Wittgenstein no se contentó con afirmar que las verdades lógicas eran tautologías. Mantuvo asimismo que las tautologías de la lógica constituyen las únicas verdades necesarias y agotan el dominio del conocimiento *a priori*:

«De la existencia o inexistencia de un estado de cosas (*Sachverhalt*, esto es, un hecho atómico posible) no podemos inferir la existencia o inexistencia de otro. Los estados de cosas son independientes los unos de los otros» [27].

«La investigación lógica significa la investigación de *toda regularidad*. Y fuera de la lógica todo es accidental... No hay necesidad de que una cosa haya de acontecer por el hecho de haber acontecido otra. No hay más necesidad que la *necesidad lógica*. A la base de toda la moderna concepción del mundo se encuentra la ilusión de que las llamadas leyes de la naturaleza sean explicaciones de los fenómenos naturales» [28].

El resultado de todos estos asertos es una filosofía semejante a la de Hume, por lo que no es sorprendente que, en la docena de años que siguieron a la publicación del *Tractatus*, los positivistas lógicos del círculo de Viena, encabezados por Moritz Schlick, trataran de combinar la caracterización wittgensteiniana de la lógica con la tradición humeana heredada por ellos de Ernst Mach. Pero existe una importante diferencia entre ambos sistemas filosóficos. Mientras que Hume trataba de fundamentar sus conclusiones en el análisis psicológico, Wittgenstein se limitó por regla general a formular pronunciamientos oraculares sin otra apoyatura argumental que la que cupiera extraer de la consideración del simbolismo de los *Principia Mathematica*. La explicación de semejante proceder parece radicar en que asumía sin cuestionarla la suficiencia de dicho simbolismo como aparato sintáctico de un supuesto lenguaje ideal. Nosotros ya hemos visto que se negaba a reconocer la posibilidad de un lenguaje irreductiblemente intensional que permitiera la designación de proposiciones en contextos tales como «Fulano cree que la tierra es plana». Cuando habla de la lógica como un conjunto de tautologías y tacha de superfluas las reglas de inferencia que Frege, Whitehead y Russell creían necesario añadir a sus proposiciones primitivas [29], su actitud parece obedecer también al hecho de que las reglas de inferencia que han de permitirnos pasar de una fórmula a otra en los *Principia Mathematica* no admiten ellas mismas su formulación dentro del simbolismo especial de dicha obra. El modo como un lenguaje nos suministra lo que Wittgenstein llama a veces «la lógica del mundo» [30] podría, en su opinión, ser mostrado, mas nunca dicho en tal lenguaje. Si se supone que esta tesis ha de tener aplicación a todos los lenguajes naturales, no hay otro remedio que considerarla incorrecta. Pues, como el propio Wittgenstein admite al final del *Tractatus*, su verdad comportaría la carencia de sentido de la propia declaración por medio de la cual ha sido formulada [31]. Mas lo que sí es correcto es afirmar que el simbolismo especial de los *Principia Mathematica* no permite la traducción de todo el texto no simbólico de la obra.

---

26 Ibid., 5.3-5.4.
27 Ibid., 2.061-2.062.
28 Ibid., 6.3-6.371.
29 Ibid., 5.132 y 6.126.
30 Ibid., 6.22.
31 Ibid., 6.54.

Aunque Wittgenstein pensaba que el mundo consta de hechos atómicos independientes que podrían ser pictóricamente reproducidos por oraciones atómicas (en aquel sentido del término «pintura» —*picture* *— en que cabría decir que el *hecho* de que una indicación horaria aparezca a continuación de la mención de un vuelo aéreo en el tablero de salidas de un aeropuerto constituye una pintura del *hecho* de que el avión en cuestión sale a esa hora) [32], nunca facilitó ejemplos concretos ni explicitó qué clase de hechos tenía *in mente*. Algunos de sus seguidores, deseosos de poner su obra en conexión con la de Hume por las razones antes apuntadas, se precipitaron a extraer la conclusión de que los hechos atómicos habrían de consistir en datos de los sentidos o complejos sensibles. Esto es también lo que supuso Russell en la serie de conferencias pronunciadas en 1918 bajo el título de *The Philosophy of Logical Atomism* [33] y en buen número de obras posteriores. Pero el propio Wittgenstein no se comprometió jamás con semejante interpretación de su pensamiento, juzgando al parecer que la cuestión sólo podría ser empíricamente resuelta y no valía la pena, por lo tanto, abordarla en su libro:

«Es claro que tenemos un concepto de oración atómica independientemente de su específica forma lógica. Mas cuando nos es dado construir símbolos de acuerdo con un sistema, es este último sistema lo que importa a efectos lógicos y no los símbolos en particular... Si sobre bases puramente lógicas sabemos que ha de haber oraciones atómicas, lo tendrá que saber así quienquiera que entienda las oraciones en su forma no analizada... Es la *aplicación* de la lógica la que ha de decidir qué oraciones atómicas hay. Lo que depende de su aplicación no puede ser anticipado por la lógica... Si no me es posible precisar *a priori* esas oraciones atómicas, el intento de efectuar tal precisión tendrá que conducir a un obvio sinsentido» [34].

A este nivel del curso de sus ideas, es patente que Wittgenstein establecía una rígida distinción entre la sintaxis y el vocabulario de la ciencia, concibiendo a la primera como algo conocido *a priori* a través de un estudio de la lógica como el llevado a cabo en los *Principia Mathematica* y al segundo como algo que hemos de aprender a través de una serie de experiencias particulares. Sin duda no le falta razón al esforzarse por defender la pureza formal de la lógica, pero en su negativa a detenerse en el problema de la aplicación de esta última hay algo de chocante. Y es esta negativa la que le lleva a su curiosa doctrina de que no hay necesidad más allá del dominio de la lógica.

Como Frege, Wittgenstein introduce la negación por medio de una definición veritativo-funcional, esto es, estableciendo que $\sim P$ es verdadera si, y sólo si, P es falsa, y a veces da la sensación de considerar suficiente la afirmación de que P es falsa si el estado de cosas por ella reproducido o pintado no tiene lugar [35]. Pero en una ocasión advierte:

«El enunciado que niega (*der verneinende Sätz*) determina *otro* lugar lógico que el del enunciado negado. El enunciado que niega determina un lugar lógico con ayuda del lugar lógico del enunciado negado, describiendo a aquél como estando fuera de este último» [36].

---

* Nuestra traducción de *picture* por "pintura" sigue la de Alfredo Deaño en su trabajo «La evolución de la filosofía de Wittgenstein», *Man and World*, 3 (1970), p p. 83-101 (*N. del T.*).

32 Ibid., I, 2.1, 2.14.
33 *Logic and Knowledge*, ed. R. C. March, pp. 178-281.
34 *Tractatus*, 5.555-5.5571.
35 Ibid., 2.06, 4.1.
36 Ibid., 4.0641.

Tomada al pie de la letra, esta advertencia implica que la posibilidad de usar significativamente una partícula negativa depende la objetiva incompatibilidad de diversos estados de cosas concebibles. Pues la otreidad o exclusión mutua de que habla Wittgenstein aquí se halla presupuesta por la construcción de enunciados negativos y ha de ser, por consiguiente, una relación independiente de nuestro uso del signo de negación, por más que en otra parte dé a entender que no hay lugar a semejante incompatibilidad. Es posible que haya sido su vago empleo del adjetivo «lógico» lo que impidiera a Wittgenstein apreciar esta inconsistencia de su propio sistema. Cuando nos dice que no hay más necesidad que la de la lógica, parece entender por «lógica» la teoría de nuestro uso de los signos; pero cuando habla de la lógica del mundo y, en particular, de posiciones en el espacio lógico, parece estarse refiriendo a algo que sería más apropiado rotular como metafísica. Si hay, como sus palabras parecen sugerir, un sistema de alternativas desde el que someter a afirmación o negación cada uno de los hechos contingentes objeto de enunciación, la estructura de dicho sistema habrá, en efecto, de encerrar dentro de sí todos y cada uno de los principios de imposibilidad y necesidad que quepa formular alguna vez; mas la investigación de un sistema semejante no es asunto de esa ciencia formal de ámbito restringido a la que Frege llamó lógica.

Al parecer, Wittgenstein se hubo de ver más de una vez turbado por las dudas acerca de su doctrina de la necesidad lógica. Hacia el final de su *Tractatus*, por ejemplo, escribiría este párrafo de desusada longitud para su estilo:

> «Así como sólo hay una necesidad *lógica*, de la misma manera sólo hay una imposibilidad *lógica*. Que dos colores, por ejemplo, concurran simultáneamente en un punto del campo visual es imposible, esto es, lógicamente imposible, ya que tal posibilidad se halla excluida por la estructura lógica del color. Veamos cómo se presenta esta contradicción en el dominio de la física. Se trata más o menos de lo siguiente: una partícula no puede tener al mismo tiempo dos velocidades, esto es, no puede estar en dos lugares a la vez, esto es, partículas que ocupen simultánamente diferentes lugares no pueden ser idénticas. (Es claro que el producto lógico de dos oraciones atómicas no puede ser ni una tautología ni una contradicción. La aserción de que un punto del campo visual se halla ocupado al mismo tiempo por dos colores diferentes es una contradicción.)» [37].

Los críticos repararon pronto en la insuficiencia de este intento de presentar la incompatibilidad de los dos colores como un caso de contradicción lógica (esto es, formal) y el propio Wittgenstein habría de escribir en 1929, refiriéndose a este ejemplo: «Las proposiciones atómicas, aunque no puedan contradecirse mutuamente, se pueden excluir las unas a las otras» [38]. La admisión de esta particularidad es fatal para la doctrina de su primera obra, mas Wittgenstein se hallaba aún tan influido por su modo de proceder en ella que trataría de presentar este cambio como una reforma de la *lógica* más bien que como un abandono de su tesis de que no cabe otra imposibilidad que la imposibilidad lógica.

Basta reflexionar un poco sobre la cuestión para caer en la cuenta de que ningún enunciado puede adscribir una característica a una cosa a menos

---

37 Ibid., 6.375-6.3751.

38 "Some Remarks on Logical Form", *Aristotelian Society, Supplementary Volume*, IX (1929), pp. 162-71, especialmente p. 168.

de excluir por eso mismo otra característica. El propio Spinoza, que creía que sólo había una única substancia —Dios o la Naturaleza— y se sentía inclinado por lo tanto a difuminar los contornos de las cosas, llegó a afirmar que toda determinación es negación [39]; y es muy posible que ningún filósofo haya pensado nunca en una especificación compatible con toda otra especificación. Mas no faltan filósofos que escriban como si la oposición de contrariedad entre predicados no fuese para ellos sino algo instituido por los seres humanos al margen de toda consideración de la naturaleza de las cosas. Así, P. F. Strawson se ha pronunciado como sigue: «Es... nuestra propia actividad de construcción del lenguaje al hacer uso del mismo, nuestra determinación de los límites de la aplicación de las palabras, la que hace posible la inconsistencia» [40]. Es cierto, desde luego, que la inconsistencia de las palabras viene establecida por los hábitos humanos que presiden su uso; mas nuestra determinación de los límites de la aplicación de un término general no consiste en la selección de todas las cosas particulares a las que luego hayamos de aplicarlo. Más bien se trata de la selección de las específicas variedades de características que podrían detentar aquellas cosas a las que ha de aplicarse nuestro término, variedades que habrán de resultar incompatibles en un sentido no-lingüístico. Cuando una definición se concibe como una determinación o fijación de límites (de acuerdo con el sentido originario del vocablo), el espacio dentro del cual opera la definición no ha de tener por puntos individuos sino universales perfectamente especificados y mutuamente excluyentes.

Por más que Wittgenstein presentara a la lógica formal en su *Tractatus* haciendo gala de un erróneo y antinatural desprecio por el problema de su aplicación, mantenía allí lo que cabría llamar una concepción absolutista de las verdades lógicas. Esto es, hablaba como si sólo hubiera y pudiera haber un único sistema de lógica, consistente, a saber, en una versión simplificada del presentado en los *Principia Mathematica*. Pero el énfasis con que Wittgenstein realzó la importancia de las convenciones simbólicas condujo pronto a algunos de los que cabría llamar sus seguidores a mirar con simpatía la propuesta de lógicas alternativas como las sugeridas por Post, Lukasiewicvz y Heyting. Carnap escribiría, así, en 1934:

> «*En lógica no hay principios morales.* Cualquiera se halla en libertad de elaborar su propia lógica, esto es, su propia forma de lenguaje, como le plazca. Todo lo que se exige de él es que, si desea someterla a discusión, exponga sus métodos con claridad y nos ofrezca reglas sintácticas en lugar de argumentos filosóficos. La actitud tolerante que se sugiere aquí no es otra, por lo que se refiere a los cálculos matemáticos especiales en litigio, que la tácitamente compartida por la mayoría de los matemáticos» [41].

En la medida en que ha servido para estimular la investigación de sistemas formales alternativos, ayudando así a arrojar luz sobre los sistemas generalmente aceptados de la lógica formal bivalente, esta actitud convencionalista no ha dejado de surtir efectos saludables. Para quienes conciban a la lógica como un cálculo sin interpretar se tratará, incluso, de la actitud a adoptar más apropiada. Mas si la lógica se supone conectada, como

---

39 *Ep.* 50.
40 *Introduction to Logical Theory*, p. 9.
41 *The Logical Syntax of Language* (Trad. inglesa de la obra alemana del mismo título, 1937), § 17.

Carnap deja entender, con el lenguaje —esto es, si sus fórmulas se han de interpretar como leyes acerca de la negación, la conjunción, la universalidad y demás—, el convencionalismo se revela una pobre filosofía de la lógica, puesto que presupone justamente la concepción de esta última que proclama rechazar. Cuando, según Carnap nos insta, procedemos a explicitar una serie de reglas sintácticas o convenciones, no tenemos otro remedio que servirnos de algún lenguaje en el que formularlas; y nuestra confianza en tal lenguaje comporta inevitablemente la aceptación de algunos principios lógicos que no se hallan exclusivamente establecidos por convención. Así, en orden a formular una regla cualquiera de nuestro nuevo simbolismo tendremos que acudir a algún recurso que nos permita expresar la universalidad, necesitando asimismo echar frecuentemente mano de algún otro que facilite la expresión de la dependencia condicional. Junto con ellos, también habremos de dar por presupuestos los principios lógicos adecuados al caso. Y, para concluir, no calificaremos a nuestro nuevo sistema de lógico en el sentido usual de este adjetivo a menos de que aquél reproduzca algunos de los principios ya reconocidos [42]. Como réplica al aserto de Carnap de que en lógica no hay principios morales, podríamos, pues, decir (I) que la lógica en sentido estricto se halla integrada esencialmente por una serie de leyes destinadas a restringir las posibles combinaciones entre proposiciones y (II) que tales leyes no pueden ser introducidas mediante simples convenciones, sin que éstas se hallen respaldadas por algún conocimiento de aquellas restricciones lógicas, más de lo que cabría introducir por convención leyes morales sin una cierta idea de obligaciones morales. La teoría convencionalista de la lógica se asemeja curiosamente a la teoría contractual de la justicia que Platón pone en boca de Glaucón en el libro segundo de la *República*.

A lo largo de los años transcurridos desde la primera aparición de su *Tractatus*, la concepción de la lógica sustentada por Wittgenstein en esa obra cobró extraordinaria difusión e influencia entre los filósofos de talante positivista o antimetafísico, La doctrina del maestro se vería, en el curso de ese proceso, sujeta a inevitables modificaciones en un buen número de aspectos, debido en parte a los esfuerzos de sus admiradores por sistematizar sus expresiones oraculares y a la circulación de notas y resúmenes de su ulterior enseñanza oral, pero también —y en no menor medida— al celo simplificador de personas más interesadas en atacar a la metafísica que en la elucidación de la teoría de la deducción. El resultado de todo ello fue una nueva versión del convencionalismo hobbesiano para la que, no sólo los teoremas aritméticos de que Frege se ocupara, sino todas las verdades cognoscibles *a priori* se considerarían analíticas o lógicamente necesarias y, por ende, tautológicamente verdaderas por definición, esto es, subproductos —carentes de contenido informativo— de la actividad humana de elaboración de reglas para el uso de los símbolos. Para ser exactos, quienes sostienen que los enunciados de verdades necesarias nada nos dicen sobre el mundo conceden a veces que las fórmulas tautológicas podrían servirnos para suministrar instrucciones acerca de reglas lingüísticas, como cuando

42 Este argumento contra el convencionalismo ha sido presentado con cogente detalle por W. V. Quine en su trabajo "Truth by Convention", incluido en los *Philosophical Essays for A. N. Whitehead* de 1936 y reproducido en *Readings in Philosophical Analysis* (ed. Feigl y Sellars), 1949, pp. 250-73.

un adulto, por ejemplo, dice a un niño: «Un oculista es un médico de ojos», tratando de este modo de enseñarle a usar el término comparativamente técnico «oculista». Se sostiene a menudo, de esa suerte, que la formulación de una tautología será informativa si, y sólo si, se la considera como la abreviatura de una afirmación sobre el lenguaje, a saber, una afirmación en el sentido de que las reglas del lenguaje en que aquélla ha sido formulada son tales que la hacen tautológica.

Por simplista que sea una doctrina filosófica, nunca cabría explicar tan vasta popularidad como la alcanzada por la nuestra a menos que esta última encierre una innegable dosis de verdad y, muy concretamente, de una verdad que sea oportuno resaltar. Es fácil ver de qué verdad se trata en este caso. Cualquier cosa que podamos conocer *a priori* habrá de ser una verdad de segundo orden acerca de relaciones entre proposiciones o un truísmo derivado de una tal verdad, procediendo dicho conocimiento en uno y otro caso de nuestra reflexión sobre el significado de las palabras u otros símbolos. De un animal como un perro cabría quizá decir que es capaz de conocer un hecho contingente como el de que hay un par de ovejas en un prado, pero sería absurdo concederle capacidad de conocer una verdad aritmética tan simple como la proposición de que $2+2=4$. Y la razón de ello difícilmente podría ser que los animales inferiores al hombre carezcan de esa especialísima intuición que, según Kant, nos capacita para el conocimiento de las verdades aritméticas. Muchas erróneas caracterizaciones del conocimiento *a priori* han tomado su inspiración de la noción platónica de contemplación ($\theta\epsilon\omega\rho\acute{\iota}\alpha$), concebida como una especie de visión intelectual que habría de permitir a nuestra alma la captación de hechos relativos a objetos suprasensibles. Y, si hemos de liberarnos del influjo de semejante concepción, es sin duda importante que no perdamos de vista la conexión del conocimiento *a priori* con nuestro uso de los símbolos. Pero el simplista convencionalismo de nuestro siglo ha dado lugar a otros resultados que en modo alguno cabría ya considerar beneficiosos. En especial, tal convencionalismo ha conducido a arruinar dos valiosas distinciones.

En primer lugar, quienes adoptan ese punto de vista presuponen que los términos «analítico», *a priori* y «necesario» —procedentes respectivamente de la lógica, la teoría del conocimiento y la metafísica— son coextensos. Sin duda toda proposición analíticamente verdadera puede ser conocida *a priori* y toda proposición susceptible de conocimiento *a priori* es necesaria. Mas las conversas no se siguen. Si «analítico» se entiende en el sentido de Frege, podría muy bien haber verdades conocidas *a priori* que no sean analíticas por no seguirse de las leyes de la lógica formal ni aun en el caso de que admitamos definiciones explícitas como nuevas reglas de transformación. Un ejemplo a menudo discutido es el de la proposición de que nada puede ser completamente rojo y verde al mismo tiempo. Otro lo es la proposición de que la relación de precedencia temporal es transitiva pero irreflexiva. Más aún, el conocimiento de que un conjunto dado de características y relaciones perceptibles constituya un modelo capaz de satisfacer una geometría abstracta tendría también que ser *a priori* y su enunciado no sería analítico. No es posible mostrar del mismo modo que haya verdades necesarias (esto es, verdades frente a las que no quepan alternativas) que *no puedan* ser conocidas *a priori*, pues toda muestra que ofrezcamos de una verdad de dicho género será obviamente un caso de

conocimiento *a priori*. Mas por lo menos no es inconcebible que las haya. Nosotros admitimos comúnmente que hay verdades matemáticas que de hecho se desconocen, y no parece absurdo sugerir que pueda haber verdades necesarias acerca de cualidades o relaciones no percibidas que a nadie sería dado conocer por carecer —como Locke diría— de las ideas requeridas al efecto.

La situación es aún peor cuando, según sucede a veces, se supone que los tres términos «analítico», *a priori* y «necesario» no sólo son coextensos sino también sinónimos, de suerte que uno cualquiera de ellos podría oficiar como contradictorio de los tres términos correspondientes «sintético», «empírico» y «contingente». Tomemos como ejemplo la *definición* que A. J. Ayer nos ofrece de las proposiciones (enunciados para él) analíticas y sintéticas: «Una proposición es analítica cuando su validez depende exclusivamente de las definiciones de los símbolos que contiene, siendo sintética cuando su validez se halla determinada por hechos de experiencia» [43]. Es evidente que tamaña confusión torna completamente absurda la noción kantiana de verdad sintética *a priori*, por más que esa noción haya sido aceptada con posterioridad por matemáticos de la talla de Frege, Poincaré, Brouwer y Hilbert. Se ha llegado inclusive a sugerir que la expresión «sintético *a priori*» vendría a equivaler al manifiesto engendro «contingente necesario» [44]. Y la cosa no acaba ahí. La tesis fregeana de que las verdades aritméticas son analíticas resultaría ahora indiscernible de la trivialidad según la cual tales verdades son conocidas *a priori*. Y hasta el aserto positivista de que todas las verdades *a priori* son analíticas acabaría por convertirse en una insulsa tautología. Mas ya que los positivistas no se comportan en modo alguno como si esa importante pieza de doctrina se redujese a una tautología, hay que pensar que algunos de ellos incurren al respecto en un error de corte semejante al que en ética se conoce bajo el nombre de falacia naturalista, a saber, el error de identificar en su teoría palabras que se usan de ordinario con sentidos diferentes pasando luego a servirse de las mismas como si no se hubiera efectuado dicha identificación.

En segundo lugar, el moderno convencionalismo confunde reglas lógicas y lingüísticas de un modo que conduce a serios equívocos. Nosotros ya hemos visto un ejemplo de semejante confusión a propósito de Carnap, pero debemos ahora profundizar un poco más en tal tendencia. Cuando los filósofos afirman que las verdades necesarias se hallan establecidas todas ellas por convención lingüística parecen tener *in mente*, en última instancia, la noción de que —según dijera Wittgenstein— el mundo se compone de hechos independientes entre sí y contingentes, de suerte que lo que los hombres llaman verdades necesarias no serían más que proyecciones o reflejos de las reglas por ellos mismos adoptadas para hablar y escribir. Tan poderoso es el influjo de esta visión simplista del problema que los convencionalistas han llegado a lamentar en ocasiones la vigencia del uso de una única palabra —el término «verdad»— para aludir por igual a las verdades contingentes que a las necesarias. En su opinión sería preferible mantener claramente distinguidas una y otra noción, hablando, en vez de esos dos tipos de verdades, de hechos y convenciones.

43 *Language, Truth, and Logic* (1936), p. 103.
44 P. F. Strawson, *Introduction to Logical Theory*, p. 263.

Si se les objetara que la ecuación de «necesaria» y «convencional» resulta un tanto paradójica, replicarían que la aplicación del adjetivo «necesaria» a una verdad no expresa más que la resolución por parte del que habla de mantener en pie un cierto patrón verbal bajo cualesquiera circunstancias. Es cierto que no hay —concederían— alternativas posibles frente a una verdad necesaria *en el lenguaje del que habla*, mas sólo porque este último ha impuesto semejante limitación a su lenguaje. Ya que sostienen asimismo, de nuevo según Wittgenstein dijera, que no hay otra necesidad que la necesidad lógica, se ven naturalmente forzados a concluir que los enunciados lógicos son enunciados lingüísticos de un cierto tipo, a saber, enunciados relativos a la inconsistencia lingüística (u otras propiedades definibles por referencia a esta última) que cabría traducir sin residuo de un lenguaje a otro [45]. La alusión a la posibilidad de traducción de un lenguaje a otro trata aquí de anticiparse a la objeción de que la lógica no se concibe comúnmente como algo confinado a un lenguaje en particular. Según P. F. Strawson:

> «Lo que importa retener a este respecto es que, una vez trazadas las fronteras de la aplicabilidad de las palabras dentro de un lenguaje dado y conectadas luego esas palabras con las de otro lenguaje por medio de un serie de reglas de traducción, no hay ya necesidad de volver a trazar tales fronteras por lo que se refiere al segundo lenguaje. Dichas fronteras se hallan trazadas de una vez por todas. Y esta es la razón (o, por lo menos, parte de ella) por la que los enunciados lógicos formulados en un lenguaje dado no versan solamente acerca de este último» [46].

Si ello quiere decir que las reglas lógicas son reglas para todos los lenguajes posibles, equivaldrá en efecto a la admisión de que no son convencionales ni por lo tanto son lingüísticas en ninguna acepción acostumbrada de este último vocablo, sino se trata más bien de requisitos que han de ser satisfechos a la hora de elaborar lo que ordinariamente se conoce como reglas lingüísticas. En ocasiones, sin embargo, los filósofos fieles a esta orientación gustan de hablar de la lógica del lenguaje ordinario e incluso del «comportamiento lógico» de tales o cuales palabras, normalmente inglesas, como si estuvieran cultivando alguna suerte de filología *a priori*. Así se ha concluido por ejemplo, *como si se tratara del resultado de una pesquisa lógica*, que la atención es un concepto polimorfo por el hecho de que el verbo inglés «*attend*» puede aplicarse a numerosas actividades diferentes. No cabe duda de que el verbo inglés «*attend*» admite muchos usos diferentes, mas si la lógica ha de ser una ciencia *a priori* no podrá reivindicar para sí semejante descubrimiento, puesto que la existencia de esos diversos usos no es más que un accidente histórico. En alemán, que no es un idioma sensiblemente más pobre que el inglés, no hay ninguna palabra que reúna la misma variedad de aplicaciones que el verbo inglés «*attend*».

Nosotros ya hemos visto que la incompatibilidad de los términos generales presupone la incompatibilidad de las características correspondientes a esos términos. De aquí se sigue de inmediato que la necesidad no puede reducirse a un simple producto de reglas y hábitos lingüísticos. Es ciertamente un accidente histórico que los sonidos «rojo», «amarillo», «verde» y «azul» se usen como se usan por los hispanohablantes en el curso de la comunicación, de la misma manera que es un truísmo el que cualquier

---

45 Ibid. p. 11.
46 Ibid. p. 12.

lenguaje en que podamos encontrar versiones exactas de esas cuatro palabras castellanas habrá de contener otros tantos sonidos gobernados por reglas semejantes a las que en castellano gobiernan «rojo», «amarillo», «verde» y «azul». Pero el que haya una gama de matices cromáticos susceptibles de distinción tal y como los distinguimos al hacer uso de nuestros cuatro términos no es, en rigor, ni un accidente histórico ni un truismo (por lo menos en el sentido peyorativo del vocablo, que lo haría sinónimo de perogrullada). Quienquiera que acepte el convencionalismo se condena a ignorar esta importante salvedad, obligándose de este modo a adherir en la práctica a aquella tesis que sostiene que los términos generales son simplemente nombres con múltiples denotaciones. John Stuart Mill denunció este error en la obra de Hobbes, componiendo su propia teoría de la connotación con el fin de tratar de remediarlo; mas, como sucede con frecuencia en la historia de la filosofía, el error ha reaparecido bajo un nuevo ropaje. En lugar de decir: «El mundo se compone de individuos; los universales pertenecen al lenguaje», los modernos convencionalistas proclamarán ahora: «El mundo se compone de hechos; la necesidad pertenece al lenguaje».

Si nuestra argumentación es correcta, la primera herejía se halla implícita en la segunda. Pero, aparte de ello, es interesante reparar en que la última herejía se expone a ser directamente refutada por una consideración del mismo estilo de la que comúnmente se admite como fatal para la primigenia. Así como los individuos resultan esencialmente correlativos de los universales y son por consiguiente inconcebibles por sí mismos, de la misma manera los hechos considerados contingentes por hallarse incluidos en un campo de posibles alternativas resultan esencialmente correlativos de las leyes de necesidad e imposibilidad que determinan tales alternativas y son en consecuencia inconcebibles sin estas últimas. Este argumento presupone una noción de posibilidad ignorada por los convencionalistas, pero incluso desde los propios presupuestos del convencionalismo cabría argüir que, si es la convención la que hace necesarias a las proposiciones necesarias, habrá de ser también la convención la que haga contingentes —esto es, no-necesarias— a las proposiciones contingentes. El consecuente de este condicional es absolutamente inaceptable para los convencionalistas, a menos de que éstos lo interpreten como una versión de la tesis trivialmente verdadera de que la convención es la encargada de determinar qué patrones verbales han de expresar proposiciones contingentes, en cuyo caso habría que interpretar el antecedente en términos igualmente inofensivos. Pues si no se reduce a una trivialidad, el consecuente ha de querer decir que los hechos de que el mundo se compone no son ni necesarios ni contingentes en sí mismos. Veremos más adelante cómo algunos filósofos han defendido este punto de vista, mas no se consideran convencionalistas y han sido atacados por quienes aceptan dicho título.

Las ideas de Wittgenstein han ejercido mayor influjo entre los filósofos que entre los lógicos matemáticos. Tarski, por ejemplo, confesaba en 1936: «El concepto de *tautología* (esto es, de enunciado que 'nada dice acerca de la realidad')... me resulta personalmente un tanto vago... pero ha revestido una importancia fundamental en las disquisiciones filosóficas de L. Wittgenstein y todo el círculo de Viena» [47]. Por esas fechas acababa Gödel

[47] "On the Concept of Logical Consequence", originariamente publicado en polaco, *Przeglad Filozoficzny*, XXXIX (1936), pp. 58-68, y reproducido en inglés en *Logic, Semantics, Metamathematics* (1956), pp. 409-20, esp. pp. 419-20.

de demostrar, por medio de una prueba a la que en su momento tendremos ocasión de referirnos, que la noción ordinaria de consecuencia no coincide con la de derivabilidad formal. A la vista de este descubrimiento, Tarski escribiría:

«En toda teoría deductiva (dejando a un lado algunas de naturaleza particularmente elemental), y por más que complementemos las reglas ordinarias de inferencia mediante nuevas reglas de índole puramente estructural, es posible construir oraciones que se sigan, en el sentido usual del término, de los teoremas de la misma, pero que sin embargo no haya modo de probar dentro de esta última sobre la base de las reglas de inferencia aceptadas. En orden a obtener el apropiado concepto de consecuencia, esencialmente afín al comúnmente vigente, habremos de acudir a métodos muy diferentes y aplicar muy distinto aparato conceptual al definirlo» [48].

El procedimiento que propone a continuación para llegar a esa definición coincide en lo fundamental con el de Bolzano, aunque no conocía este apartado de su obra cuando por vez primera se ocupó de la cuestión.

El propio Tarski ha resumido en estos términos su caracterización de la relación de consecuencia:

«Sea *L* una clase cualquiera de oraciones. Reemplazamos ahora todas las constantes extralógicas que intervienen en las oraciones pertenecientes a *L* por otras tantas variables correlativas, cuidando de que las constantes de la misma familia sean reemplazadas por variables de la misma familia y las de distinta familia por variables de familia asimismo distinta. De este modo obtendremos una clase *L'* de funciones oracionales. Una secuencia arbitraria de objetos que satisfaga toda función oracional de la clase *L'* se dirá un *modelo* o *realización de la clase L de oraciones* (en el sentido en que usualmente se habla de modelos de un sistema axiomático de una teoría deductiva). Si, en particular, la clase *L* constase de una única oración *X*, llamaríamos también al modelo de la clase *L modelo de la oración X*. Sobre la base de todos estos conceptos podríamos, finalmente, definir como sigue el de consecuencia lógica:

La oración X se sigue lógicamente *de las oraciones de la clase K si, y sólo si, todo modelo de la clase K es asimismo un modelo de la oración X*» [49].

Más adelante añade:

«Podemos convenir en llamar *contradictoria* a una clase de oraciones si no posee ningún modelo. De modo análogo, se podrá decir de una clase de oraciones que es *analítica* si toda secuencia de objetos constituye un modelo de la misma. Ambos conceptos pudieran referirse no sólo a clases de oraciones sino asimismo a oraciones aisladamente consideradas... E igualmente podemos demostrar... que las oraciones analíticas son aquellas que se siguen de toda clase de oraciones (y, en particular, de la clase vacía), siendo contradictorias aquellas otras de las que toda oración se sigue» [50].

Como el mismo Tarski insiste, su ensayo es un intento de desentrañar las implicaciones de la vieja doctrina según la cual la relación de consecuencia lógica es una relación formal entre enunciados, esto es, una relación establecida entre estos últimos en virtud de su forma. Pero su tratamiento de aquella doctrina presenta algunos rasgos bastante curiosos que merecen nuestra atención.

---

48 Ibid. pp. 412-13.
49 Ibid. pp. 416-17.
50 Ibid., pp. 417-18.

En primer lugar, la explicación tarskiana de la noción de consecuencia lógica hace referencia a la de forma lógica en cuanto expresada por medio de constantes lógicas y no toma en cuenta para nada el papel comúnmente atribuido a este respecto a las definiciones. Así, «Sócrates era varón» sería para él una consecuencia de la pareja de oraciones «Sócrates era padre» y «Todo padre es varón», mas no de la primera oración por separado; y la segunda de estas dos últimas oraciones —a saber, «Todo padre es varón»—, que Kant no habría dudado en calificar de «analítica», no admitiría tal calificativo en la clasificación de Tarski, toda vez que el esquema «Todo —— es ...» no es satisfecho por todo par de objetos. La razón de este sorprendente resultado es, a lo que parece, el empeño de Tarski por llevar a cabo su análisis sin referencia alguna a reglas de transformación, lo que únicamente le permite dar entrada a definiciones cuando éstas se presentan bajo la forma de enunciados universales verdaderos.

En segundo lugar, y aunque Tarski considera a la relación de consecuencia como una relación establecida entre oraciones, lo que le lleva a tratar de explicarla por referencia a formas de oraciones (lo que llama funciones oracionales), su caracterización no es enteramente sintáctica, esto es, no se ocupa exclusivamente de relaciones entre signos, sino envuelve asimismo la noción de satisfacción. De acuerdo con la terminología de su ensayo sobre el concepto de verdad, al que aludíamos en una anterior sección, se trata de un concepto fundamental de la semántica, esto es, de aquella ciencia que se ocupa de las relaciones entre los signos y las cosas y viceversa. Nosotros decimos que Juan y Pedro satisfacen la condición «*x* e *y* son hermanos» si, y sólo si, Juan y Pedro son de hecho hermanos. Ahora bien, como vemos, la definición tarskiana de consecuencia lógica envuelve referencia a lo que de hecho acaece en el mundo. Para considerar tan sólo el ejemplo más sencillo posible, lo específicamente peculiar de una oración analítica (oración que se sigue de cualquier clase de oraciones) será, en su teoría, que todos los enunciados que revistan su forma sean de hecho enunciados verdaderos. No cabe duda de que toda oración analítica ha de detentar esta última característica, mas los filósofos pudieran sorprenderse de verla tratada como la característica definitoria más bien que como una propiedad derivada de la analiticidad.

En tercer lugar, y por más que Tarski convierte a la forma lógica en la noción central de su caracterización de la de consecuencia, se declara —como hizo Bolzano antes que él— incapaz de definirla con precisión, viéndose así obligado a concluir:

«A la base de toda nuestra construcción se halla la división de los términos del lenguaje examinado en lógicos y extralógicos. Tal división no es ciertamente una división arbitraria... Si, por ejemplo, hubiéramos de incluir entre los signos extralógicos el signo de implicación o el cuantificador universal, nuestra definición del concepto de consecuencia conduciría a resultados en flagrante contradicción con la práctica establecida. Pero, por otra parte, no sé de fundamento alguno que permita trazar una tajante divisoria entre ambos grupos de términos. No parece imposible incluir entre los términos lógicos algunos de los usualmente considerados como extralógicos sin que de ello se desprendan consecuencias que atenten contra la práctica ordinaria. Y, en el caso límite de semejante posibilidad, todos los términos de nuestro lenguaje podrían considerarse como lógicos. El concepto de consecuencia *formal* vendría a coincidir, en dicho caso, con el de consecuencia *material*» [51].

[51] *Logic, Semantics, Metamathematics* (1956), pp. 418-19.

Por nuestra parte añadiríamos que, en este caso extremo, el concepto de lo analítico coincidiría sin más con el de lo verdadero.

Acaso nuestras tres dificultades se hallen conectadas entre sí. Suponiendo que la identificación de los signos lógicos no plantease ningún problema, la condición que Tarski sienta para el establecimiento de una relación de consecuencia resulta suficiente en la medida en que no impone la admisión de ningún caso de consecuencia lógica obviamente anormal. Pero, incluso a este nivel de nuestra reflexión, no parece tratarse de una condición necesaria, puesto que excluye aquellos casos de consecuencia que descansan en una conexión entre definiciones. No obstante, si se entiende por definición, según es lo usual, la estipulación de que una serie de expresiones hayan de interpretarse como consecuencias de otras, tal exclusión no debe sorprendernos. Pues, en orden a definir la relación de consecuencia de modo que abarque las conexiones por definición, sería menester, entre otras cosas, decir que una oración es consecuencia de otra si contamos con una estipulación o regla de lenguaje que prescriba que cualquier oración de la forma ejemplificada por la primera ha de considerarse consecuencia de una oración correlativa de la forma ejemplificada por la segunda. Este requisito no sería más circular que el requisito legal de que, a los efectos de una cierta disposición administrativa, hubieran de considerarse locales comerciales cualesquiera establecimientos que pertenezcan a la clase de los establecimientos para los que el Ministerio competente haya expedido el oportuno certificado que los acredite como locales comerciales. Pero, en cualquier caso, diferiría notablemente de la caracterización tarskiana de la relación de consecuencia, que sólo toma en cuenta la satisfacción de funciones oracionales por objetos. Cuando a continuación pasamos a considerar las dudas de Tarski acerca de la posibilidad de trazar una clara divisoria entre signos lógicos y extralógicos, así como las conclusiones que según él se seguirían de admitir la imposibilidad de semejante divisoria, se nos hace patente que el origen de todas las dificultades radica en el supuesto de que la vigencia de nuestra relación depende sólo de la verdad de una proposición universal. Pues así como muchos filósofos que profesan seguir a Hume han afirmado que la necesidad de que un efecto siga a su causa no es sino la inclusión de esta particular secuencia en una asociación natural de carácter constante, de la misma manera afirma Tarski que la necesidad de que una consecuencia se siga —en el sentido lógico ahora del verbo «seguir(se de)»— de las premisas no es sino la inclusión de esta particular secuencia en un hecho universal relativo a la satisfacción de ciertas funciones oracionales. Si, de acuerdo con sus propias sugerencias, ampliásemos el campo de las funciones oracionales consideradas hasta incluir entre los factores constantes de nuestras oraciones no sólo las constantes lógicas tradicionales, sino todos los términos generales de generalidad irrestricta —tales como «hombre», «hierro», «fuego», etc.—, veríamos que la definición tarskiana de consecuencia no solamente cubre la consecuencia lógica sino asimismo toda otra consecuencia en virtud de leyes naturales. Para decirlo en dos palabras, su definición equivale a una generalización de la teoría de la necesidad natural como constancia. Pero este resultado no podría complacer en ningún caso a los seguidores de Hume, puesto que envuelve el rechazo de su tesis de una diferencia de género entre necesidad lógica y natural.

En defensa de la definición de Tarski cabría quizá argüir que, mientras

por lo que se refiere a una función oracional como *Si p, entonces no-no-p* podemos conocer *a priori* que es satisfecha por cualquier secuencia de objetos, por lo que se refiere en cambio a una función oracional como *Si x ha ingerido arsénico, entonces x morirá* sólo cabe conjeturar esa universal satisfacción sobre una base empírica. Esto es muy cierto, desde luego, mas nada hay en la caracterización tarskiana de la cuestión que dé razón de semejante diferencia y el propio Tarski tampoco alude a ella. Y no sería apropiado fundamentar la distinción entre diversos géneros de consecuencias en una distinción entre casos que admiten y casos que no admiten la posibilidad de un conocimiento *a priori*. Por el contrario, es esta última distinción epistemológica la que habría de basarse en una explicación de las diferencias existentes entre dichos dos casos; y eso es lo que, hasta el presente, se viene echando en falta.

Hemos visto, en resumen, que el convencionalismo envuelve una actitud nominalista y que, tomado al pie de la letra, desemboca en la tesis de que el mundo se compone de hechos que no son en sí mismos ni necesarios ni contingentes. Hemos visto asimismo que la caracterización de la noción de consecuencia por parte de Tarski excluye la posibilidad de que una oración se siga de otra en virtud de una definición explícita, y que su intento de definir la relación de consecuencia por referencia a la noción de universalidad acaba por borrar la distinción entre las leyes de la lógica y las de la naturaleza. Todas estas conclusiones han de resultar indeseables para la mayor parte de los lógicos, y aquí hemos dado por sentado que tampoco parecían desearlas los autores de las teorías en cuestión. Pero hay al menos un filósofo, W. V. Quine, que las acepta sin reservas.

Su punto de vista quedaría inmejorablemente compendiado por sus propias palabras en los párrafos que siguen:

«Lo que deseo ahora sugerir es que hablar de una componente lingüística y una componente factual en la verdad de cualquier enunciado particular es un sinsentido que da lugar a muchos otros sinsentidos. Tomada en su conjunto, la ciencia presenta esa doble dependencia respecto del lenguaje y respecto de los hechos; pero esta dualidad no puede perseguirse significativamente hasta los enunciados de la ciencia tomados uno por uno... La totalidad de lo que llamamos nuestro conocimiento o nuestras creencias, desde las más casuales cuestiones de la geografía y la historia hasta las más profundas leyes de la física atómica o incluso de la matemática o la lógica puras, es una fábrica construida por el hombre y que no está en contacto con la experiencia más que a lo largo de sus lados. O, con un otro símil, el todo de la ciencia es como un campo de fuerza cuyas condiciones-límite da la experiencia. Un conflicto con la experiencia en la periferia da lugar a reajustes en el interior del campo... Pero el campo total está tan escasamente determinado por sus condiciones-límite —por la experiencia— que hay mucho margen de elección en cuanto a los enunciados que deben recibir valores nuevos a la luz de cada una de las experiencias contrarias... Todo enunciado puede concebirse como verdadero en cualquier caso siempre que hagamos reajustes suficientemente drásticos en otras zonas del sistema. Incluso un enunciado situado muy cerca de la periferia puede sostenerse como tal en contra de una recalcitrante experiencia apelando a la posibilidad de estar sufriendo alucinaciones o reajustando algunos enunciados de entre las llamadas leyes lógicas. A la inversa, y por la misma razón, no hay enunciado alguno inmune a la revisión. Hasta una revisión de la ley lógica de tercio excluso se ha propuesto como un expediente para simplificar la mecánica cuántica; ¿y qué diferencia hay en principio entre un cambio así y el cambio por el que Kepler sustituyó a Ptolomeo, o Einstein a Newton, o Darwin a Aristóteles?... Desde este punto

de vista, las cuestiones ontológicas van de par con las científico-naturales. Considérese la cuestión de si deben admitirse las clases como entidades. Se trata, como he indicado en otros lugares, de la cuestión de si deben cuantificarse variables que toman clases como valores. Carnap ha sostenido que ésta no es una cuestión factual, sino de elección de la forma lingüística conveniente, del esquema o estructura conceptual conveniente para la ciencia. Puedo estar de acuerdo con esa opinión, siempre que se conceda lo mismo respecto de todas las hipótesis científicas en general. Carnap ha reconocido que sólo puede sostener una diversidad de criterios para las cuestiones ontológicas por un lado y para las hipótesis científicas por otro asumiendo una distinción absoluta entre lo analítico y lo sintético; y no es necesario repetir que ésta es una distinción que yo rechazo» [52].

El de Quine es un intento gratamente intrépido de presentar una visión unitaria de la empresa científica, especialmente impresionante en los tiempos que corren, en que muchos filósofos profesionales hablan como si cualquier clase de interés por una filosofía de carácter sinóptico constituyese un síntoma de enfermedad mental. Pero, como los idealistas absolutos cuyo estilo de pensar parece querer adaptar al empirismo, Quine se muestra demasiado tolerante con las paradojas y excesivamente despectivo hacia el sentido común. Como reseñábamos en una sección anterior, no sólo rechaza toda la teoría de la modalidad sino asimismo las nociones de proposición, atributo y relación. Junto con ellas se desembaraza incluso de la noción de significado, a causa de su vinculación tradicional con la admisión de enunciados analíticos. Tamaña liquidación no parece entrañar para él el menor sacrificio, sino que la acomete como si se tratara de barrer una peligrosa basura. Es posible, no obstante, que este modo de proceder parezca a muchos otros semejante a la conducta de un capitán que, temeroso de que su buque se vaya a pique, tratase de aligerarlo de peso arrojando la bitácora por la borda. Sin duda Quine tiene razón al declararse insatisfecho con la sugerencia de que es posible hacer verdadero a un enunciado exclusivamente a base de reglas lingüísticas. Pues, en efecto, resulta un tanto absurdo hablar de fabricar verdades. El doctor Zamenhof inventó las reglas de una nueva lengua en la que pueden construirse infinitas oraciones de nuevo cuño tales como *Ĉiu patro estas viro*, mas —a menos de haberse dejado pervertir por una pésima filosofía— ni los más entusiastas admiradores de su obra pretenderán que fabricó una colección infinita de nuevas verdades. Pero sería erróneo suponer que, por el hecho de que ningún enunciado deba exclusivamente su verdad a una serie de reglas lingüísticas, todo enunciado ha de relacionarse con la experiencia de la misma manera. Suponer tal es aceptar la tesis básica del convencionalismo, según la cual el mundo consta de hechos mas se halla desprovisto de necesidades. Y, miradas las cosas con menos sofisticación, habrá que conceder que la diferencia existente entre las aserciones de que $2+2=4$ y de que el Everest es más alto que el Mont Blanc no es una simple diferencia de grado sino más bien se trata de una diferencia específica. La geografía y la matemática pura son ambas apartados de una única gran fábrica levantada por el género humano, mas no se trata de apartados de la misma especie.

El hecho más interesante en apoyo de la tesis de Quine es el de que muchos enunciados de universalidad irrestricta parezcan oscilar en nuestra

---

52 "Two Dogmas of Empiricism", originariamente publicado en *The Philosophical Review* (1951) y reproducido con algunas modificaciones en *From a Logical Point of View*, pp. 20-46, esp. 42-43 y 45-46.

teoría del conocimiento entre la categoría de los enunciados empíricos y la categoría de los enunciados *a priori*. Sólo en tiempos comparativamente recientes se descubrió por vía empírica que el hierro puede ser magnetizado; y, sin embargo, si se le preguntara a un físico moderno si le es dado imaginar la posibilidad de abandonar aquella generalización, lo más probable es que se sintiese turbado y replicara que se inclina a considerarla como algo empíricamente incuestionable. F. Waismann, que con independencia de Quine ha aventurado una concepción de la ciencia un tanto semejante a la suya [53], ha examinado numerosos casos de este género, de entre los que algunos de los más interesantes se hallan extraídos del habla ordinaria y precientífica. ¿Es el enunciado «Vemos con nuestros ojos» una generalización empírica o se trata, más bien, de una verdad que nos es dado descubrir reflexionando sobre el significado de las palabras «ver» y «ojo»? Es imposible responder a esta cuestión sin tomar una decisión en lo tocante a un aspecto de nuestra práctica lingüística sobre el que hasta el momento permanecíamos indecisos. Por lo común, hacemos uso de los términos generales dejándonos guiar por ciertas analogías, más o menos como los jueces zanjan pleitos subsumiendo los casos en litigio bajo la ley establecida; mas cuando se nos pide decidir acerca de la aplicabilidad de una palabra en una situación con la que no nos hallamos familiarizados de antemano, no tenemos otro remedio —como los jueces que carecen de un precedente que les guíe— que ponernos a legislar. Los filósofos, con su asepsia característica, se han resistido con frecuencia a reconocer estos hechos, abordando la consideración de los lenguajes naturales como si se tratara de sistemas de reglas y definiciones más bien que de conjuntos de hábitos y costumbres. Pero el caso es que, estando nosotros constituidos como lo estamos, no es accidental que nuestros lenguajes se hayan desarrollado del modo como lo han hecho. No es un defecto de la lengua castellana el que no hayamos decidido si la palabra «ojo» significa propiamente nuestro órgano de la visión o más bien un objeto de una cierta configuración y una determinada composición química que acaso nada tenga que ver con la visión. En la medida en la que sólo tropecemos con hechos como los de costumbre, podremos describirlos satisfactoriamente sin tener que elegir entre una u otra de ambas alternativas. Nuestra palabra «ojo» no carece por cierto de significado, pero ese significado no se halla tan exhaustivamente determinado como lo podría estar, lo que deja la puerta abierta a la posibilidad de ulterior legislación si así lo exige o lo sugiere el desarrollo de la ciencia. Otro ejemplo del mismo estilo de la complejidad de nuestra práctica lingüística ordinaria lo constituye el enunciado «Los gurriatos son pollos de gorrión». Nadie duda de que le es dado identificar sin dificultad un gurriato por su simple apariencia, pese a lo cual todos nos sentiríamos inclinados a decir que el ser un pollo de gorrión se halla incluido en el significado del término «gurriato». Si se nos presentase un día una cría de pájaro en todo semejante a un gurriato pero cupiese demostrar que no se trata de un pollo de gorrión, se haría precisa una decisión que no habíamos creído necesario tomar hasta el presente.

Un curioso ejemplo de especificación adicional del significado en los últimos siglos lo tendría un lector moderno que estudiase con atención el

53 "Analytic-Synthetic", *Analysis*, X (1949), pp. 25-40; XI (1950-51), pp. 25-38, 49-61, 115-24; XIII (1953), pp. 73-89.

argumento mediante el que Santo Tomás de Aquino trataba de demostrar la tesis de que, tras la resurrección de la carne, no se hará uso de alimentos (*quod in resurgentibus non erit usus ciborum*) [54]. En primer lugar, el santo afirma que, con el término de la vida corruptible, no habrá ya necesidad de ingerir alimentos con el fin de reponer la materia perdida en el curso de la corrupción. A continuación apunta que la alimentación será innecesaria tras la resurrección a los efectos del crecimiento corporal, puesto que cada cual ha de resucitar con el tamaño adecuado (*in debita quantitate*). A lo que añade, movido quizá por la consideración de su propio físico, que la suposición de que los cuerpos resurrectos coman atentaría contra la buena ordenación divina de las cosas, pues una persona que comiese sin pérdida ninguna de materia a causa de la corrupción se desarrollaría hasta alcanzar un tamaño desproporcionado (*perveniet ad immoderatam quantitatem*); y, si dicha persona continuase comiendo a todo lo largo de su vida eviterna, habría que suponer que se desarrollaría hasta el infinito (*opportet dicere quod corpus hominis resurgentis in infinitum augeatur*). Pero esto, concluye, es imposible. Nos encontramos, pues, aquí ante un argumento que procede, hasta donde es posible, con ciertos visos de rigor científico. Pero, considerada seriamente en el contexto de la ciencia moderna, la tesis del santo resulta absurda. Pues, en el supuesto de que tenga sentido hablar de un cuerpo resurrecto tal y como él lo hace, también tendrá sentido preguntarnos qué habría de suceder en el transcurso de los movimientos voluntarios de ese cuerpo. Es obvio que tendrían que darse contracciones musculares. Pero estas últimas comportarían alguna oxidación de hidratos de carbono, con el consiguiente desgaste de tejido muscular, a menos que ese desgaste se viese compensado con la ingestión de alimentos, cosa que Santo Tomás rehúsa conceder. Y, hablando en términos más generales, un cuerpo resucitado como el descrito por Santo Tomás sería un *perpetuum mobile* que habría de funcionar contrariando las leyes de la termodinámica. A esto tal vez cupiese replicar resueltamente que los cuerpos resucitados no se hallarían sujetos a las leyes de la naturaleza que los hombres consideran aplicables a los cuerpos corruptibles. Pero, al llegar aquí, la mayoría de nosotros nos negaríamos a seguir considerando a dichas leyes naturales como meras generalizaciones empíricas susceptibles de ser abandonadas sin abandonar asimismo la noción de cuerpo orgánico. En nuestra ciencia, y por lo tanto en los niveles más evolucionados de nuestro lenguaje, unas y otra se hallan ligadas entre sí por la teoría del metabolismo; y si alguien sostuviera la posibilidad de un organismo viviente sin procesos metabólicos, tenderíamos a pensar que está juntando palabras sin el menor sentido.

La caracterización humeana de las leyes naturales, tenida hasta hace poco como la expresión más consumada de la ortodoxia empirista, surgió de una teoría imaginarista del significado. Hume apuntó acertadamente que siempre nos es dado imaginar la contradictoria de una supuesta ley de la naturaleza, concluyendo de ahí que ninguna ley natural podría ser una ley objetivamente necesaria. Ulteriores exponentes de su doctrina, que conciben a los significados como invariablemente determinados por una serie de convenciones iniciales, han destacado el hecho de que la negación de una supuesta ley de la naturaleza nunca constituirá una formal contradicción, ni será reducible a una tal contradicción a menos que se dé por presupuesta

[54] *Summa contra Gentiles*, IV, 83.

la propia ley en cuestión. Pero ninguno de ambos argumentos logra probar lo que parece exigirse de ellos. Es cierto, desde luego, que podemos imaginar en el estricto sentido del vocablo (esto es, podemos representárnoslo mediante el ojo de la mente) que los hombres vivan indefinidamente sin ingerir alimentos. Pero ello resulta irrelevante para la cuestión que nos ocupa, que nada tiene que ver con nuestra capacidad de imaginación. Asimismo es cierto que, antes de los últimos avances de la fisiología, nada había de lingüísticamente defectuoso en la oración «Un hombre puede vivir por siempre sin ingerir alimento» y que, incluso ahora, cabría otorgar algún sentido a semejante afirmación si decidiéramos concentrar nuestra atención en los contextos en que originariamente aprendimos a hacer uso de los vocablos que la integran. Pero de nuevo ello resulta irrelevante, ya que, para poder otorgar sentido a una afirmación, basta con que este último no se halle excluido por alguna regla bien acreditada de nuestra práctica lingüística.

Dos son los factores que en cualquier época contribuyen a fijar los significados de las palabras, a saber, (I) sus relaciones con los rasgos perceptibles de ciertas situaciones que evocan su uso y (II) sus relaciones con otras palabras en el seno de nuestro lenguaje. Los filósofos insertos en la tradición empirista han prestado a veces atención exclusiva a las relaciones del primer género; pero hay muchas palabras que carecen de tales relaciones y, por lo que hace a todas ellas (incluido, por ejemplo, nuestro vocabulario cromático), las relaciones del segundo género revisten por lo menos importancia pareja. Ya antes del desarrollo de la ciencia, nuestro lenguaje constituía una estructura compleja que sólo contactaba con la experiencia en determinados puntos; mas, con el desarrollo de la ciencia, las conexiones internas de esa trama fueron haciéndose más y más complicadas, llegando a aparecer nuevos vocablos, tales como «electrón» o «gen», muy alejados de la experiencia aunque no necesariamente desconectados de toda realidad. La misión de esta urdimbre de la estructura interna de un lenguaje no es otra que facilitar su mejor acoplamiento al mundo extralingüístico. Y, en la medida en que nos sea permitido construir libremente oraciones como «Un hombre puede vivir por siempre sin comer», el ropaje lingüístico mediante el que tratamos de revestir al mundo presentará un huelgo intolerable, que —como buenos sastres— habremos de corregir. La condición de posibilidad de esos reajustes, que sólo desde hace unos pocos siglos emprendemos deliberada y sistemáticamente, viene suministrada por el método de la ciencia empírica, y una clara idea de las peculiaridades del mismo contribuiría a disipar los graves malentendidos suscitados en relación con el problema de la necesidad y el lenguaje a que hemos estado refiriéndonos.

Quine va demasiado lejos cuando trata de abolir la distinción entre verdades contingentes y verdades necesarias. Por una parte, los enunciados históricos y geográficos no podrán por menos de seguir siendo siempre contingentes, ya que no tendría objeto recurrir a la legislación lingüística con el fin de excluir las posibles alternativas a los mismos; mientras, por otra parte, enunciados tales como «Nada es completamente rojo y verde al mismo tiempo» habrán de ser de entrada necesariamente verdaderos, ya que se hallan garantizados por las reglas que de entrada admitimos y seguimos al tratar de distinguir unos de otros los diversos colores. Pero no siempre es fácil determinar el estatuto de las proposiciones que, caracterizadas por su universalidad sin restricciones, formulamos en las ciencias

empíricas. En la medida en que estemos dispuestos a admitir la posibilidad de refutar a una de ellas, nos estará vedado pretender un conocimiento *a priori* de su necesidad. Pero si la aceptamos sin reservas, nuestra aceptación avalará la pretensión de un conocimiento *a priori* de esa suerte. Lo que se impone en este punto es distinguir entre diversos grados de profundidad del conocimiento en cuestión. Si simplemente decidiéramos considerar al hierro como un metal magnético por definición, excluiríamos la posibilidad de aplicar nunca la palabra «hierro» a un metal no-magnético, mas no por ello incrementaríamos nuestra comprensión de las conexiones que tienen lugar en el mundo físico; y, si únicamente introdujéramos esa ulterior especificación del significado de la palabra «hierro» con el fin de distinguir al hierro de algún otro metal con el que en caso contrario lo pudiésemos confundir, acabaríamos por inutilizar el enunciado «El hierro es un metal magnético» para todo propósito inferencial. Si pudiendo, en cambio, identificar satisfactoriamente al hierro sin necesidad de someter a contraste su posesión de aquella propiedad, lográsemos deducir esto último de una teoría de la constitución del hierro que no sólo incluyera un cierto número de otras generalizaciones sobre el hierro sino que fuera a su vez parte de una teoría más vasta acerca de la materia en general, estaríamos autorizados a presumir de haber logrado un considerable incremento de nuestra comprensión. En uno y otro caso, sin embargo, podríamos decir que nuestra generalización irrestricta habría quedado transformada, gracias a un desarrollo de nuestro lenguaje, en un truísmo garantizado mediante la admisión de un principio de necesariedad o principio encargado de sentar la vigencia de una conexión necesaria. La lógica, tal como se trató de presentarla en la sección relativa a la lógica modal, es la teoría de semejante conexión necesaria —no la teoría de todas y cada una de las diversas conexiones que de hecho se den entre tales o cuales universales, sino la teoría de este tipo de conexión en general—, por lo que habrá de corresponderle una posición única y privilegiada dentro del cuadro de la ciencia en su conjunto.

Quine reconoce que la lógica ocupa un lugar especial entre las ciencias, pero insiste en que también la lógica se halla sujeta a revisión:

> «La nueva atribución de valores a algunos enunciados implica la re-valorización de otros en razón de sus interconexiones lógicas; y las leyes lógicas son simplemente unos determinados enunciados del sistema, determinados elementos del campo. Una vez redistribuidos valores entre algunos enunciados, hay que redistribuir también los de otros que pueden ser enunciados lógicamente conectados con los primeros o incluso enunciados de conexiones lógicas» [55].

Se trata aquí de un desafortunado intento de medir a todos los enunciados del sistema de la ciencia por un mismo rasero. Pues los principios sin los cuales sería imposible concebir ese sistema, tal y como Quine lo describe, pueden hacer valer un indiscutible derecho a ser objeto de consideración por separado. En la medida en que se hallan presupuestos por el mismo concepto de sistema, merecerán siquiera el título de absolutamente *a priori*, cualquier cosa que sea lo que podamos decir de los contenidos de un sistema en particular en un instante dado.

Si se desea ofrecer una correcta caracterización de la ciencia es esencial admitir que, al distinguir entre el mundo y aquellos productos del

[55] *From a Logical Point of View*, p. 42.

lenguaje que son obra del hombre, las conexiones necesarias han de pertenecer al mundo no menos que los hechos contingentes. Por desgracia, el influjo de la teoría convencionalista de la necesidad derivada de la filosofía de Wittgenstein ha sido tan poderoso que hasta el mismo K. R. Popper (en general poco propicio a los influjos de esa procedencia) ha llegado a escribir:

«Considero —en disconformidad con Kneale— que 'necesario' es una mera palabra: un marbete útil para distinguir la universalidad de las leyes de la universalidad 'accidental'. Desde luego, cualquier otro marbete valdría lo mismo, pues apenas hay relación alguna con la necesidad lógica; y estoy fundamentalmente de acuerdo con la paráfrasis wittgensteiniana de Hume: 'No existe necesidad alguna de que ocurra una cosa por haber ocurrido otra. No hay más necesidad que la necesidad lógica'» [56].

Pero en otro lugar ha escrito sin embargo:

«Cabe decir que un enunciado es naturalmente —o físicamente— necesario si, y sólo si, es deducible de (la clausura de) una función de enunciados que se satisfaga en todos los mundos que, a lo más, difieran del nuestro en lo que respecta a las condiciones iniciales» [57].

Esta última definición parece querer decir que una ley natural es una ley que rige para todos los mundos *posibles* que contengan ejemplificaciones de los mismos atributos y relaciones ejemplificados en el mundo real y sólo de ellos. Pero Popper compara su definición a la definición tarskiana de verdad analítica, dejando de apreciar que —cuando hablamos de verdad en todos los mundos posibles tales que reproduzcan los mismos rasgos recurrentes del nuestro— estamos introduciendo algo radicalmente nuevo, a saber, justamente lo que precisa el defensor de la necesidad objetiva. Ninguna clase de necesidad, ni lógica ni natural, podría ser reducida —como parece creer Popper— a mera universalidad, puesto que no es inconcebible que incluso una proposición de irrestricta universalidad sea contingentemente verdadera. Nada cabe objetar, por el contrario, a una definición de la necesidad como verdad en todos los mundos posibles, ya que la peculiaridad de la noción a definir se halla aquí preservada por el adjetivo modal «posible». Es claro, en efecto, que la universalidad con que algo rige incluso para mundos distintos de nuestro mundo real no podría ser meramente contingente.

Lo que nosotros proponemos, no obstante, no es la definición de la noción de necesidad en esos términos, sino más bien el reconocimiento de la más adecuada noción de envolvimiento como una noción fundamental para la descripción de la naturaleza y hasta para la explicación del funcionamiento del lenguaje ordinario. Si le incumbe efectivamente un cometido semejante, la teoría de la misma deberá ocupar —según antes decíamos— un lugar único y privilegiado entre las ciencias. En los dos capítulaes que restan del libro tendremos ocasión de volver a considerar la relación de este teoría con el conjunto de las investigaciones propiamente calificadas de matemáticas, en la esperanza de que el resultado de nuestro examen contribuya a arrojar nueva luz acerca de su importancia.

---

56 *The Logic of Scientific Discovery* (1959), p. 438.
57 Ibid. p. 433.

XI. LA FILOSOFIA DE LA MATEMATICA DESPUES DE FREGE

1. LAS PARADOJAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS.

Ya en 1895 había detectado Cantor una antinomia en su teoría de los conjuntos. Se trataba de la paradoja dada a conocer dos años más tarde por Burali-Forti y relativa a los números ordinales transfinitos, en los que no nos detuvimos al pasar revista al sistema de Cantor. Pocos años después, en 1899, Cantor descubriría la paradoja, más simple y más fundamental, que lleva su propio nombre. Supongamos que S sea el conjunto de todos los conjuntos. En virtud del teorema cantoriano de los conjuntos-potencia, $\overline{\overline{\mathscr{P}S}} > \overline{\overline{S}}$. Mas ya que $\mathscr{P}S$ es un conjunto de conjuntos (a saber, el conjunto de todos los subconjuntos de S), habrá de ser a su vez parte del conjunto de todos los conjuntos, esto es, de S. De donde se sigue que $\overline{\overline{\mathscr{P}S}} \leqslant \overline{\overline{S}}$, lo que contradice el resultado que acabábamos de obtener.

Está claro que hay algo que no marcha en el modo, que podríamos llamar ingenuo, como Cantor asume la existencia de conjuntos, mas la conciencia de la dificultad no se generalizó hasta 1903. En ese año publicaría Frege el segundo volumen de sus *Grundgesetze*, con un Postscripto (fechado en octubre de 1902) que comenzaba así:

«Nada más descorazonador podría acontecerle a un autor científico que ver resquebrajarse uno de los pilares de su edificio tras haber dado la tarea por concluida.

Esta es la situación en que me ha colocado una carta del Sr. Bertrand Russell, recibida cuando la impresión de este volumen tocaba ya a su fin. Se trata de una cuestión relativa a mi Axioma (V). Por lo que a mí respecta, nunca me he ocultado a mí mismo que está lejos de resultar tan evidente como los restantes axiomas y como, en rigor, cabría exigir a una ley lógica. Y así es como he cuidado de llamar la atención sobre este punto débil en el Prefacio al volumen I (pág. VII). En realidad, habría prescindido gustosamente de ese pilar si supiese de un modo de sustituirlo por algún otro. Pero lo cierto es que todavía ahora no sé cómo podría la aritmética ser científicamente fundamentada, cómo podrían los números ser aprehendidos como objetos lógicos sometidos a nuestra consideración, a menos que se nos permita —siquiera sea a título condicional— pasar de un concepto a su extensión. ¿Nos será invariablemente dado hablar de la extensión de un concepto, esto es, de una clase? Y, de no ser así, ¿cómo sabremos cuándo nos hallamos ante un caso excepcional? ¿Cabrá siempre inferir del hecho de que un concepto coincida en extensión con otro concepto que cualquier objeto incluido bajo el primero se ha de incluir también bajo el segundo? Estas son las preguntas que plantea la comunicación del Sr. Russell.

Solatium miseris, socios habuisse dolorum. También a mí me queda ese consuelo, si así puede llamársele; pues quienquiera que haya hecho uso en sus demostraciones de extensiones de conceptos, clases o conjuntos se hallará en la misma situación que yo. Lo que aquí está en cuestión no es precisamente mi modo particular de fundamentar la aritmética, sino la misma posibilidad de que esta última tenga algún fundamento lógico.

Pero vayamos ya con la dificultad. El S. Russell ha descubierto una contradicción que podría formularse en los términos que siguen.

A nadie se le ocurriría afirmar de la clase de los hombres que dicha clase sea *un hombre*. Tenemos aquí, pues, una clase que no se pertenece a sí misma. En lí-

neas generales, digo que algo pertenece a una clase cuando se incluye bajo el concepto cuya extensión es esa clase. Fijémonos ahora en el concepto: *clase que no se pertenece a sí misma.* La extensión de este concepto (si cabe hablar de su extensión) será, según lo dicho, la clase de las clases que no se pertenecen a sí mismas. Llamémosla, para abreviar, la clase K. Y preguntémonos ahora si la clase K se pertenece a sí misma. Supongamos, en primer lugar, que lo hace así. Si algo pertenece a una clase, ha de hallarse incluido bajo el concepto cuya extensión es esa clase. De modo que, si nuestra clase se pertenece a sí misma, se tratará de una clase que no se pertenece a sí misma. Nuestra primera suposición conduce, pues, a una contradicción. Supongamos a continuación, en segundo lugar, que nuestra clase K no se pertenece a sí misma; en ese caso, se hallará incluida bajo el concepto cuya extensión es ella misma y, por lo tanto, se tratará de una clase que se pertenece a sí misma. De nuevo aquí nos vemos abocados a una contradicción.»

Russell presentó ese mismo año, con la publicación de sus *Principles of Mathematics,* su propia versión de la contradicción; y, dos años más tarde, J. Richard informaba de una nueva paradoja, especialmente interesante por remedar en un cierto sentido el procedimiento diagonal de Cantor [1]. Consideremos, en primer término, todas las fracciones decimales que pueden definirse mediante un número finito de palabras. Aunque dichas fracciones constituyen un conjunto infinito, podrán ser ordenadas de manera que haya una primera, una segunda, etcétera. Pues, en efecto, nos es dado distribuirlas en grupos de acuerdo con el número de palabras usadas para definirlas, disponiéndolas a continuación dentro de dichos grupos según el orden alfabético de sus definiciones. Pero, una vez así dispuestas, será posible definir un decimal diciendo que su *n*-ésima cifra es la que inmediatamente sigue en la sucesión ordinaria de las cifras a la *n*-ésima cifra del *n*-ésimo decimal de la serie (ó 0, si la *n*-ésima cifra del *n*-ésimo decimal es 9). Es obvio que este nuevo decimal no se identifica con ninguno de los decimales de la serie, pese a lo cual habrá de ser incluido en esta última, ya que lo hemos definido ciertamente mediante un número finito de palabras.

En un intento de escapar a esta insatisfactoria situación revelada por Russell, Frege consideró en primer lugar la sugerencia de que pudiera haber conceptos a los que no correspondiese clase alguna. Si el concepto de clase que no es miembro de sí misma fuera uno de ellos, la paradoja de Russell se desvanecería por sí sola, ya que tampoco habría en tal caso ninguna clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. Pero Frege no conseguía reconciliarse con esta revolucionaria novedad, por lo que —en lugar de seguir dicho camino— trató de soslayar la contradicción a través de una modificación de su quinto axioma, que desde siempre había suscitado sus recelos. Lo que propuso entonces fue que dos conceptos se dijeran en posesión de la misma extensión si, y sólo si, todo objeto incluido bajo el primero *que no sea él mismo la extensión de este concepto* se incluye igualmente bajo el segundo y viceversa. En un apéndice a sus *Principles of Mathematics,* Russell recomendaría considerar atentamente esta segunda sugerencia; mas, por su parte, no recurrió a ella en sus restantes trabajos, presumiblemente porque un examen más detenido de la cuestión le había dejado insatisfecho acerca de sus auténticas posi-

[1] "Les Principes de mathématiques et le problème des ensembles", *Revue générale des sciences,* XVI (1905), p. 541, reproducido en *Acta Mathematica,* XXX (1906), p. 265.

bilidades. En efecto, lógicos posteriores han logrado hacer ver que aquella modificación no es suficiente para librar de inconsistencias al sistema de Frege [2].

Tras de una insistente reflexión sobre el particular, Russell llegó a la conclusión de que era preferible la primera de las sugerencias de Frege. Hay —pensaba— algunas funciones proposicionales que no determinan genuinas clases, consistiendo el problema para el lógico en suministrar reglas por medio de las cuales pudieran distinguirse esas funciones *no-predicativas*, como dio en denominarlas, de las restantes funciones proposicionales. Las contradicciones parecían resultar del hecho de haber sido admitidas por los lógicos, con imprudente desenfado, clases que luego habrían de resultar curiosamente *autorreproductoras*. Quizá cupiera excluir tales monstruosidades imponiendo ciertas limitaciones a nuestro uso de la notación en términos de clases, pero Russell se inclinaba a pensar que el problema nunca podría quedar completamente resuelto hasta haber eliminado de la teoría lógica a todas las clases, tal y como habían sido eliminados los infinitésimos de la teoría del cálculo diferencial. De ahí que considerara importante averiguar hasta qué punto podría la matemática ser presentada sin recurso a las clases [3].

Si la aceptación del simbolismo lógico de Frege hubiese sido general, la eliminación de toda referencia a las clases habría constituido una efectiva terapéutica para las paradojas que atribulaban a los matemáticos. Pues su distinción de niveles o grados de funciones hacía imposible en su lenguaje simbólico la reproducción, a propósito de las funciones, de paradojas análogas a las contradicciones descubiertas por Cantor y Russell a propósito de las clases. El fallo de su sistema se debió, en realidad, a la indulgencia con que Frege se permitió hablar de clases —sin la oportuna distinción de grados o niveles— con el fin de rehuir las complicaciones de su propia teoría de las funciones proposicionales. Se trata de un detalle muy importante sobre el que luego habremos de volver; pero por el momento bastará con advertir que, cuando Russell formuló su propuesta de una teoría lógica sin clases (*«no classes» theory*), había ya descubierto una nueva paradoja que mostraba que la referencia a las clases no era la única causa de la dificultad. En lugar de la clase que se supone habría de contener a todas las clases que no son miembros de sí mismas, consideremos la propiedad de ser una propiedad que no se ejemplifica a sí misma. Si dicha propiedad se ejemplifica a sí misma, no podrá entonces ejemplificarse a sí misma; y si no se ejemplifica a sí misma, habrá entonces de ejemplificarse a sí misma. Es claro que la dificultad reviste aquí la misma índole que en la paradoja originaria y, sin embargo, no se ha hablado de clases para nada.

Cuando Russell dio a conocer su sugerencia de que pudiera haber funciones proposicionales no-predicativas, Henri Poincaré se hallaba embarcado en una revisión hostil de los intentos de Peano y su escuela por explicar el razonamiento matemático a base de los métodos de la lógica simbólica [4]. Poincaré, que concebía a la inducción matemática como la

---

2 W. V. Quine, "On Frege's Way Out", *Mind*, LXIV (1955), pp. 145-59.

3 "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", *Proceedings of the London Mathematical Society*, IV (1906), pp. 29-53.

4 "Les Mathématiques et la Logique", *Revue de métaphysique et de morale*, XIII (1905), pp. 815-35; XIV (1906), pp. 17-34 y 294-317. Con algunas modificaciones, estos trabajos fueron luego reproducidos en *Science et Méthode*.

fuente de toda perfección en este último dominio, sostenía que aquélla habría de descansar en la intuición de la posibilidad de una infinita recurrencia, esto es, en algo últimamente irreductible a una regulación formal. Habiendo divisado en Russell un nuevo contrincante, compuso prestamente un nuevo artículo destinado a mostrar que las paradojas resultaban de una errónea concepción de la matemática. Tras aceptar la distinción de Russell entre funciones proposicionales predicativas y no-predicativas, añadía que la verdadera explicación de dicha diferencia había que buscarla en la breve nota publicada por Richard un año antes. Richard, que informaba allí de su paradoja, pasaba luego a sostener que en realidad no había una auténtica contradicción, puesto que el conjunto de los decimales definibles mediante un número finito de palabras no se podía decir con propiedad que contuviera ningún decimal exclusivamente definible por referencia a la totalidad de ese conjunto. Generalizando tal conclusión, escribiría Poincaré: «Ainsi les définitions qui doivent être regardées comme non-predicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux». En la literatura posterior, la expresión «no-predicativa» (o «impredicativa») se ha usado con frecuencia como si hubiera quedado *definida* mediante aquella observación, esto es, como si «definición no-predicativa» equivaliese a «definición que pretende la identificación de un objeto incluido bajo un concepto por medio de una referencia a la totalidad de los posibles objetos incluidos bajo dicho concepto» [5]. Mas del contexto se desprende claramente que Poincaré trataba sólo de *explicar* por qué algunas expresiones con apariencia de definiciones están, en rigor, lejos de definir cosa alguna. Y asimismo se evidencia que el círculo vicioso que hacía surgir las paradojas de la teoría de conjuntos tenía para él carácter específicamente matemático, dependiendo en su opinión del intento de tratar a un conjunto infinito como un todo completo. Pues a continuación advierte expresamente: «Il n'y a point d'infini actuel. Les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction».

En una réplica publicada el mismo año, Russell aceptaba que todas las paradojas tenían su origen en círculos viciosos, estableciendo como principio para la evitación de tales círculos el de que «lo que presupone el todo de una colección no debe formar parte de la colección». Pero añadía que Poincaré no había sabido apreciar debidamente las dificultades que entraña la aplicación de tal principio, equivocándose además al localizar la raíz de la dificultad en la doctrina cantoriana del infinito. Por lo que a Russell se refiere, se hallaba persuadido de que las contradicciones de la teoría de conjuntos habían de ser índole lógica más bien que matemática (en algún sentido en que cupiera discernir entre una y otra), dada la estrecha semejanza de sus rasgos fundamentales con los de la antigua paradoja de Epiménides o del Mentiroso; y, a este respecto, juzgaba interesante reseñar que el círculo vicioso envuelto en esta última había sido ya diagnosticado nada menos que en la Edad Media, de acuerdo con el artículo sobre los *Insolubilia* del *Dictionary of Philosophy and Psychology* de Baldwin [6].

---

5 Cf., por ejemplo, A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, p. 248.

6 "Les Paradoxes de la logique", *Revue de métaphysique et de morale*, XIV (1906), pp. 627-50. El artículo sobre los *Insolubilia* del *Dictionary* de Baldwin se debía a C. S. Peirce.

Estas discusiones promovieron una renovación del interés por toda suerte de paradojas lógicas, mereciendo en 1910 la paradoja del Mentiroso de Eubúlides los honores de todo un tratado como el de A. Rüstow *Der Lügner, Theorie, Geschichte und Auflösung.* Entre las nuevas paradojas ingeniadas por estos años, o muy poco después, las de Berry y Grelling son quizá las más conocidas. La paradoja de Berry se refiere a *el menor de los números enteros no susceptibles de ser nombrados con menos de treinta y tres sílabas.* Aunque resulta obvio que cualquier nombre de este número habría de contener treinta y tres sílabas por lo menos, las palabras impresas en cursiva equivalen a un nombre del mismo y, sin embargo, únicamente arrojan treinta y dos sílabas *. La paradoja de Grelling tiene que ver con la aplicación de un término de nuevo cuño. Algunos adjetivos, tales como «corto» y «castellano», se aplican a sí mismos; mientras que otros, tales como «largo» y «alemán», no lo hacen así. Llamemos *heterológicos* a los del segundo grupo y preguntémonos si el término «heterológico» es a su vez heterológico. Si lo es, no se aplicará —por definición— a sí mismo, con lo que no podría ser heterológico. Pero si no lo es, se aplicará a sí mismo —de nuevo por definición— y habría de ser, por ende, heterológico. Ya que estos sofismas guardan un innegable parecido con las contradicciones descubiertas por Cantor y Russell, pero no tienen nada que ver con la teoría del infinito, su aparición contribuyó en cierta medida a reforzar la posición del segundo frente a Poincaré.

Russell había llegado en sus *Principles of Mathematics,* publicados en 1903, a formular independientemente una concepción de la matemática afín a la de Frege; y aunque veía en las paradojas un factor de perturbación, continuaba confiando —al igual que Frege— en la posibilidad de una satisfactoria demostración de la fundamental identidad entre aritmética y lógica. Esta fue la razón de la importancia que el propio Russell concedía a su tesis de que las paradojas se originan de una presentación defectuosa de la lógica. En efecto, no le habría bastado con resolver las contradicciones de la teoría de conjuntos a base de reflexionar sobre las peculiaridades específicas de los agregados de carácter infinito, ni tan siquiera hubiera sido suficiente tratar de prevenirlas mediante una legislación *ad hoc* del uso de los símbolos. Pues, de haber adoptado una de esas dos vías, se habría vedado a sí mismo la posibilidad de afirmar que la aritmética es idéntica a la lógica pura y no habría tenido la menor garantía contra el surgimiento de nuevas contradicciones. La única solución satisfactoria del problema tenía que consistir en la eliminación de las paradojas mediante una reforma de la lógica que, una vez propuesta, se acreditara por sí sola como una necesidad inexcusable; y esto es, como veremos, lo que Russell trató de conseguir con su Teoría de los Tipos Lógicos. Pero en 1908, año en que diera a conocer su primera versión de esta teoría, aparecieron asimismo sendos trabajos de otros dos autores que sugerían nuevos modos de hacer frente a la crisis, presentando doctrinas igualmente novedosas acerca de las conexiones entre la matemática y la lógica. En las secciones que siguen de este capítulo habremos de considerar esas tres propuestas así como sus mutuas relaciones.

---

* En el original, *the least integer not nameable in fewer than nineteen syllabes* (el menor entero no susceptible de ser nombrado con menos de diecinueve sílabas en inglés), expresión que —como se ve— consta de dieciocho sílabas. *(N. del T.)*

2. La teoría russelliana de los tipos lógicos.

En su trabajo de 1908 titulado «Mathematical Logic as based on the Theory of Types» [7] y de nuevo, dos años más tarde, en el segundo capítulo de la introducción a la primera edición de los *Principia Mathematica*, Russell presentó su teoría de los tipos lógicos como una consecuencia de su principio de evitación del círculo vicioso, considerándola por tanto como un recurso necesario para la resolución de las paradojas, pero recomendándola asimismo por su acuerdo con el sentido común y su intrínseca verosimilitud. En lo que sigue vamos a examinar en primer término la argumentación por medio de la cual fue introducida y la forma que hubo de cobrar en su versión más evolucionada.

Para Russell, la razón de que una función proposicional presuponga la totalidad de sus valores podría enunciarse en estos términos:

«Cuando hablamos de 'ϕx', donde x no se especifica, designamos un solo valor de la función, mas no un valor determinado. Podríamos expresar tal circunstancia diciendo que 'ϕx' *denota ambiguamente* ϕa, ϕb, ϕc, etc., donde ϕa, ϕb, ϕc, etc., serán los diversos valores de 'ϕx'... Se sigue de ello que 'ϕx' sólo tendrá un significado bien determinado (es decir, bien determinado salvo en la medida en que le es esencial la ambigüedad) si los objetos ϕa, ϕb, ϕc, etc., se hallan bien determinados... De donde se desprende que ninguna función podría incluir entre sus valores nada que presuponga esa función; pues, si lo hiciera así, no cabría considerar como determinados a los objetos ambiguamente denotados por la función en tanto que esta última no se halle a su vez determinada, cuando lo que sucede es que, a la inversa, una función no se hallará determinada —según acaba de decirse— en tanto no se hallen determinados sus valores. Este no es más que un caso particular, aunque acaso el más fundamental, del principio de evitación del círculo vicioso. Una función es aquello que denota ambiguamente un elemento de una cierta totalidad, a saber, la totalidad de los valores de la función; y de ahí que esta totalidad no pueda contener miembro alguno que envuelva la función, ya que, de hacerlo así, contendría un miembro que envuelve la totalidad, cosa que a ninguna totalidad le está permitida en virtud del principio de evitación del círculo vicioso» [8].

La fraseología del pasaje es desafortunada. Una función, no siendo un signo, nada podría denotar; y ni siquiera de una expresión funcional, que sí es efectivamente un signo, cabría en rigor decir que denotase los valores de la función, ya sea ambiguamente o sin ambigüedad. Pero la conclusión a que conduce el argumento es sumamente interesante:

«De aquí que no haya lugar a cosa alguna tal como el valor de $\phi\hat{x}$ para el argumento $\phi\hat{x}$ o cualquier otro que envuelva $\phi\hat{x}$. Esto es, el símbolo '$\phi(\phi\hat{x})$' no expresará una proposición, como lo haría '$\phi(a)$' si ϕa fuese un valor de $\phi\hat{x}$. '$\phi(\phi\hat{x})$' será, por el contrario, un símbolo que no expresa nada y del que, en consecuencia, cabría decir que carece de significado. Así pues, dada cualquier función $\phi\hat{x}$, habrá tanto argumentos para los que dicha función posea un valor cuanto argumentos para los que no lo posea» [9].

En su primer trabajo dedicado a la teoría, Russell decía que un tipo podría ser definido como un campo de significación, esto es, como la colec-

---

7 *American Journal of Mathematics*, XXX (1908), pp. 222-62, reproducido en *Logic and Knowledge*, pp. 59-102.
8 *Principia Mathematica*, vol. I, p. 39.
9 Ibid. p. 40.

ción de los argumentos para los que una cierta función proposicional posee valores; pero añadía también que las funciones proposicionales admiten ser clasificadas en una serie de tipos, de acuerdo con las entidades que hayan de corresponderles por valores. Ambas maneras de describir las cosas resultan equivalentes, pues las consideraciones de Russell requieren de nosotros la presuposición de una jerarquía de entidades. Así, si consideráramos a los hombres como nuestros individuos —o entidades del tipo 0— la sabiduría o el ser sabio (esto es, la función proposicional expresada por *x es sabio*) correspondería al tipo 1, ya que cabría aseverar significativamente tal propiedad de Sócrates o de Alcibíades, aunque por lo demás no siempre se tratara de una aserción verdadera; en cambio, la propiedad de ser una virtud cardinal habría de ser del tipo 2, ya que tendría sentido aseverarla de la sabiduría; y, en líneas generales, todo atributo será de un tipo superior al de las entidades de las que quepa aseverarlo o negarlo con sentido. Cierto es que el argumento extraído por Russell del principio de evitación del círculo vicioso no demuestra que un atributo haya de ser en cada caso del tipo *inmediatamente* superior al de las entidades de las que pueda ser aseverado o negado con sentido; pero esto es lo que asume en el curso de su teoría, y parece obligado hacerlo así si —como Russell se inclina obviamente a conceder— las entidades del mismo tipo han de ser universalmente intercambiables en el sentido de que lo que pueda ser significativamente aseverado o negado de una de ellas ha de poder ser significativamente aseverado o negado de las restantes.

En tanto que operemos solamente con funciones atributivas, podremos concebir a los diversos tipos como jerárquicamente dispuestos en un simple orden ascendente; pero tan pronto como consideremos asimismo funciones de carácter relacional, habremos de introducir una complejidad considerablemente mayor en aquella disposición jerárquica de tipos, que no cabría ya representar adecuadamente mediante el solo uso de números ordinales. Así, es posible que se dé una relación diádica entre entidades que sean ambas individuos, en cuyo caso quizá pueda decirse que dicha relación se halla al nivel de un atributo de individuos; pero, de cualquier modo, habría de distinguirse por su tipo de tales atributos, así como de las relaciones triádicas establecidas entre individuos. Y no menos posible es que haya relaciones, como la de ejemplificación, que se den entre entidades de tipos diferentes. Si seguimos sirviéndonos del numeral «0» para representar el tipo de los individuos, tal vez quepa decir que las funciones que únicamente admiten individuos por argumentos son de los tipos (0), (0,0), (0,0,0), etcétera, que un atributo de un atributo de un individuo es del tipo ((0)), que un atributo de una relación diádica entre individuos —como por ejemplo, la transitividad de la relación de ser un antepasado— es del tipo ((0,0)), que una relación entre entidades de distinto nivel —como la de ejemplificación antes citada— pudiera ser del tipo (0,(0)), y así sucesivamente. Es, no obstante, una regla general que ninguna función proposicional pueda tomar otros argumentos que los del apropiado tipo (o tipos) inferior(es), esto es, del tipo o tipos cuyo signo o signos en la notación que se acaba de explicar resultaría de cancelar los paréntesis externos del signo correspondiente al tipo de la función proposicional considerada [10].

[10] R. Carnap, *The Logical Syntax of Language*, § 27.

Esta teoría es suficiente para excluir la paradoja de la propiedad de ser una propiedad que no se ejemplifica a sí misma. Pues, suponiendo que la letra F designe la paradójica propiedad en cuestión, habría que introducirla mediante una definición tal como $F(g\hat{x}) =_{\text{def.}} \sim g(g\hat{x})$, en la que la combinación de signos del *definiens* resulta evidentemente inaceptable. En orden a excluir la paradoja de la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas, Russell cree necesario, sin embargo, echar mano también de su «teoría sin clases». Esta última constituye una denominación un tanto desafortunada, expuesta acaso a la objeción de que el programa de deshacerse de las paradojas acerca de las clases mediante la eliminación de estas últimas es tan extravagante como el proyecto de acabar con las enfermedades infantiles eliminando a los niños. Mas lo que se pretende es algo harto más razonable de lo que semejante modo de expresarse parece sugerir. Lo que Russell sostiene es que las designaciones de clases son símbolos incompletos, es decir, símbolos que no cabe definir aisladamente aunque puedan ser definidos en asociación con otros símbolos, dado que todos los complejos simbólicos en los que dichos símbolos intervengan significativamente podrían ser reemplazados por complejos equivalentes de los que aquéllos hayan sido hechos desaparecer. Así, cuandoquiera que tengamos una expresión de la forma $A \varepsilon \hat{x}(Fx)$, podremos reemplazarla por una expresión de la forma FA; y lo mismo cabrá hacer desaparecer a los signos de clases en casos más complicados que el de nuestro ejemplo, sin detrimento alguno de la significatividad de la expresión originaria. En ocasiones, Russell expresa ciertamente todo ello diciendo que las clases son ficciones que correspondería al análisis eliminar; pero tales afirmaciones se han de interpretar por referencia a lo que antes nos decía acerca de los símbolos incompletos, habiéndole sido sin duda sugerida aquella terminología por la jerga de los juristas cuando hablan de la ficticia personalidad de las corporaciones.

Ahora bien, cuando tratamos de traducir la paradoja de las clases en los términos requeridos por la «teoría sin clases», el resultado a que nos vemos abocados es —de acuerdo con las explicaciones de Russell— una combinación de símbolos prohibida por la teoría de los tipos, lo que evidencia que la paradoja surge de la incapacidad de la gramática ordinaria para satisfacer todas las exigencias de la lógica. En sus propias palabras:

«Una proposición acerca de una clase ha de ser siempre reducida a un enunciado relativo a una función que defina dicha clase, esto es, relativo a una función satisfecha por miembros de esa clase y por ningún otro argumento. Una clase es, así, un objeto que se deriva de una función y presupone a esta última, tal y como $(x).\phi x$, por ejemplo, presupone la función ϕ. De ahí que una clase, en virtud del principio de evitación del círculo vicioso, no pueda significativamente ser el argumento de su función definitoria. Es decir, si denotamos mediante '$\hat{z}(\phi z)$' la clase definida por $\phi\hat{z}$, el símbolo '$\phi\{\hat{z}(\phi z)\}$' habrá de resultar carente de sentido» [11].

Para la solución de otras paradojas, como las de Berry y el Mentiroso, es necesario dar un paso más, paso que en cualquier caso viene impuesto por el principio de evitación del círculo vicioso. Se trata de la teoría ramificada de los tipos o distinción de órdenes en el interior de estos últimos, cuya necesidad explica Russell como sigue:

11 *Principia Mathematica*, vol. I, pp. 62-63.

«Sea $f(\phi\hat{z},x)$ una función de dos variables $\phi\hat{z}$ y x. Si, conservando fijo a x por el momento, aseveramos esa función para todos los posibles valores ϕ, obtendremos una proposición $(\phi).f(\phi\hat{z},x)$. Haciendo ahora oficiar a x como variable, tendríamos una función de x; mas, ya que dicha función envuelve una totalidad de valores para $\phi\hat{z}$, no podrá a su vez ser —en virtud del principio de evitación del círculo vicioso— uno de los valores incluidos dentro de la totalidad. Se sigue, pues, que la totalidad de los valores $\phi\hat{z}$ que entra en juego en $(\phi).f(\phi\hat{z},x)$ no es la totalidad de las funciones en que x pudiera intervenir como argumento y que no hay ninguna totalidad cual la de todas las funciones de ese género» [12].

Para abreviar, comenzaremos por suponer que, en nuestra distinción de órdenes, nos las habemos con funciones que toman individuos por argumentos. Si una función así pudiera ser definida sin necesidad de aplicar cuantificadores a otras variables que variables individuales, cabría decir de ella que pertenece al primer orden. Considerando una vez más a los hombres como nuestros individuos, podrían servirnos de ejemplo de tales funciones de primer orden las expresadas por *Sócrates ama a x* y *Todo el mundo ama a x*. A continuación, y de acuerdo con Russell, «serán funciones de segundo orden aquellas que contengan variables que sean funciones de primer orden mas no contengan otras variables que (posiblemente) individuos» [13]. Estrictamente hablando, habrá de ser un signo funcional, y no una función, lo que contenga una variable, pero el sentido de la definición no ofrece grandes dudas. Así, *x posee todas las cualidades de primer orden que adornan a un gran general* expresará una función del primer tipo mas de segundo orden, ya que toma individuos por argumentos pero equivale en cuanto a su sentido a $(f)[(y)\ (y\ es\ un\ gran\ general \supset f!y) \supset f!x]$. Y, en líneas generales, si la variable de orden superior que interviene en la expresión de una función indica un lugar vacío a rellenar por signos del n-ésimo orden, la función así expresada será de $(n+1)$-ésimo orden. De acuerdo finalmente con la práctica de Russell en los *Principia Mathematica*, una función denotada por $F!x$ se dirá *predicativa* si, y sólo si, es la del orden más bajo compatible con su posesión del argumento o argumentos correspondientes [14]. Así pues, una función predicativa, en este nuevo sentido del vocablo, no envolverá totalidad alguna salvo la totalidad de sus posibles argumentos y cualesquiera otras que estos últimos presupongan.

La distinción de diversos órdenes de funciones ayuda a la resolución de paradojas como la de Berry permitiéndonos la fragmentación de las totalidades ilegítimas. Así, cabe decir que la palabra «nombre» es objeto de un empleo incorrecto en la paradoja de Berry, toda vez que no sólo abarca nombres propios en sentido ordinario —esto es, designaciones que no envuelven funciones—, sino asimismo descripciones que envuelven funciones de *todo* orden. Si deseáramos hablar con corrección de descripciones, habríamos de especificar el orden o los órdenes de las funciones envueltas en las mismas. Pero, en tal caso, la descripción que se refiere a descripciones que envuelvan funciones de orden n envolverá, por su parte, una función de orden $n+1$, con lo que dejará de aplicarse a sí misma. De

12 Ibid. pp. 48-49.
13 Ibid. p. 52.
14 Ibid. p. 53. Este sentido del término "predicativo" difiere obviamente del reseñado en nuestra última sección.

modo semejante, la paradoja del Mentiroso podría ser presentada como un intento de hacer uso de la descripción «lo que yo digo» sin atender a la necesidad de distinguir entre diversos órdenes de proposiciones. Todos estos resultados de la teoría ramificada de los tipos son muy satisfactorios, mas, por desgracia, la limitación del discurso a cuyo precio han sido obtenidos es excesivamente drástica. Quizá no importe demasiado que no deba decirse «Napoleón poseía todas las cualidades que adornan a un gran general» a menos de estar dispuestos a añadir que las cualidades en cuestión son las de primer orden o, por lo menos, las de una sucesión de órdenes finita. Pero sí es importante, en cambio, la aparente prohibición de formular ciertos teoremas matemáticos bien conocidos y, en particular, el teorema de que cualquier conjunto no-vacío de números reales con un límite superior ha de tener un límite superior mínimo.

Se recordará que, de acuerdo con la teoría de Eudoxo y Dedekind, un número real representa una sección o cortadura en el campo de los números reales o, más exactamente, el inferior de los dos conjuntos infinitos en los que cabe dividir la serie de los números racionales por medio de una cortadura. Se sigue de ello que un conjunto de números reales es un conjunto de conjuntos de números racionales. Ahora bien, si S es un conjunto no-vacío de números reales con un límite superior, el límite superior mínimo de S se supone que habrá de ser un número real que sea también la unión o suma lógica de todos los números reales contenidos en S, esto es, que tenga por miembros a todos aquellos números racionales que sean miembros de cualesquiera miembros de S. Nos encontramos aquí ante algo que se asemeja mucho a una violación de la teoría ramificada de los tipos. Pues el conjunto de los números racionales que constituye un número real, al ser infinito, no resulta especificable sino mediante la mención de una función proposicional satisfecha por todos sus miembros; y la expresión funcional llamada a especificar el límite superior mínimo de un conjunto infinito de números reales ha de envolver, como es obvio, alguna referencia a la totalidad de las funciones proposicionales que especifican números reales, *incluida la función por ella expresada*. Y si se estipula que el límite superior mínimo ha de pertenecer a un orden de números reales diferente del de los números de S, negando la posibilidad de una completa generalidad a los teoremos relativos a los números reales sin la oportuna restricción de su orden, el análisis matemático —tal y como de ordinario es entendido— acabaría tornándose imposible. ¿Cómo podía evitar Russell esta desagradable consecuencia, si es que era posible hacerlo así, al tiempo que continuaba sirviéndose de su teoría ramificada de los tipos en orden a excluir las paradojas?

Russell trató de retener lo mejor de ambos mundos introduciendo a estos efectos el Axioma de Reducibilidad. Se trata del supuesto de que, para toda función proposicional, hay alguna función predicativa (en el sentido de los *Principia Mathematica*) satisfecha por todos los mismos argumentos y no otros [15]; o, para expresarlo en términos simbólicos,

$$(f)(\exists g)(x)[fx \equiv g!x].$$

[15] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 56.

Si se admite dicho axioma, podrán ser superadas las dificultades planteadas por la diversidad de órdenes en el dominio de los números reales. Pues gracias a él cabrá decir que, aun si las funciones proposicionales que especifican números reales corresponden de hecho a órdenes distintos, a toda función proposicional de orden superior que especifique un número real le ha de corresponder una función predicativa que especifique el mismo número real por hallarse satisfecha por los mismos números racionales y no otros. Como vemos, seguimos sometidos en principio a la prohibición de formular generalizaciones acerca de la totalidad de las funciones independientemente de su orden; pero, en contextos como el nuestro, podemos confiar en que el recurso de hablar de todas las funciones predicativas nos permita decir cuanto necesitábamos decir. Otro ejemplo de las ventajas a extraer de nuestro axioma sería la posibilidad de definir la identidad (tal y como veíamos en el último capítulo) por exclusiva referencia a funciones predicativas. Y, al mismo tiempo, quedarían excluidas las paradojas de carácter más familiar, como la de Berry, por no caber su reformulación en términos de funciones predicativas. Así, si tratáramos de reconstruir la paradoja de Berry hablando solamente de números enteros susceptibles de denominación mediante nombres de primer orden (como, por ejemplo, nombres compuestos de sartas de numerales castellanos tales como «cinco dos nueve») tendríamos ocasión de comprobar que lo que ahora decimos no da lugar a contradicción alguna.

¿Hay alguna razón, aparte de razones de conveniencia, para aceptar el axioma de reducibilidad? Russell admite que es difícil considerarlo como una verdad lógica evidente, mas trata de explicarlo y hacerlo plausible resaltando su conexión con cuanto los lógicos han dicho acerca de las clases. En su artículo de 1908 sugería la posibilidad de rotularlo Axioma de las Clases; pero en la introducción a los *Principia Mathematica* escribiría, mostrándose más cauto:

«Si admitimos la existencia de clases, se hace posible probar el axioma de reducibilidad. Pues en tal caso, dada cualquier función $\phi\hat{z}$, cualquiera que sea su orden, habrá una clase α que conste de aquellos objetos justamente que satisfacen $\phi\hat{z}$. De aquí que 'ϕx' resulte equivalente a 'x pertenece a α'. Pero 'x pertenece a α' es un enunciado que no contiene variables aparentes, por lo que habrá de ser una función predicativa de x. De donde se desprende que, si asumimos la existencia de clases, el axioma de reducibilidad se torna innecesario... Sin embargo, tanto en razón de las contradicciones —que exigirían un tratamiento algo más complicado en el supuesto de las clases— cuanto porque parece siempre aconsejable introducir el menor número posible de presuposiciones obligadas en la demostración de nuestros teoremas, preferimos asumir el axioma de reducibilidad más bien que la existencia de clases» [16].

Cuando Russell nos dice que «x pertenece a α» es una función predicativa de x por no contener ninguna variable aparente, no parece distinguir adecuadamente entre lo que es una función y su correspondiente expresión funcional. Pero es difícil que tratara de sugerir que la introducción de la letra griega α como abreviatura de $\hat{z}(\phi z)$ baste para hacernos llegar todos los beneficios del axioma de reducibilidad, por lo que hay que pensar que concibe a α como una designación introducida sin la ayuda de ϕx o

[16] Ibid. p. 58.

cualquier otra expresión funcional del mismo género. No obstante, no está claro por qué, sin el supuesto del axioma de reducibilidad, había de creer posible ofrecer una nueva designación para la clase previamente designada por $\hat{z}(\phi z)$ a menos de admitir equivocadamente la posibilidad de aludir a toda clase mediante la enumeración de sus miembros.

Algunos párrafos más abajo, Russell propone esta otra línea de argumentación:

«El axioma de reducibilidad vendría a identificarse con la suposición de que cualquier combinación o disyunción de predicados (intensionalmente dados) resulta equivalente a un único predicado, esto es, con la suposición de que, si aseveramos que x posee todos los predicados que satisfacen la función $f(\phi!\hat{z})$, habrá algún predicado-resumen que corresponda a x cuandoquiera que nuestra aserción sea verdadera y no lo haga así cuandoquiera que esta última sea falsa; y otro tanto sucederá si aseveramos que x posee alguno, más bien que todos, de los predicados que satisfacen la función $f(\phi!\hat{z})$. Pues, al suponer tal, el orden de una función no-predicativa quedaría rebajado en una unidad; y así, al cabo de un número finito de pasos, habríamos logrado pasar de cualquier función no-predicativa a una función predicativa formalmente equivalente» [17].

Esta explicación equivale, en efecto, a sugerir que una expresión universalmente cuantificada se ha de considerar como la abreviatura de una conjunción, en tanto una expresión existencialmente cuantificada se considerará como la abreviatura de una disyunción; y ello por más que en ciertos casos sea imposible la exhaustiva explicitación de semejante conjunción o disyunción. Así, para continuar con nuestro ejemplo, «Napoleón poseía todas las cualidades que adornan a un gran general» podría interpretarse como una abreviatura de «Napoleón era hábil, diligente, capaz de inspirar confianza a sus hombres, presto a anticiparse a las decisiones del enemigo..., etcétera». Y, una vez aceptada esta caracterización de la cuestión, cabría proseguir afirmando que la distinción entre diversos órdenes de funciones no es —a diferencia de la jerarquía de los tipos— algo impuesto por la naturaleza de las cosas, sino más bien una complicación introducida por exigencias de nuestro lenguaje, cuya utilidad atañe únicamente a determinados problemas de índole lingüística. Esta fue, en efecto, la conclusión adelantada por F. P. Ramsey en su trabajo «The Foundations of Mathematics» de 1925 [18], aceptada por la mayor parte (si bien *no* todos) de quienes han tratado de seguir a este respecto la línea marcada por Frege, Whitehead y Russell. Como Ramsey apuntara, la teoría simple de los tipos resulta suficiente para la exclusión de aquellas paradojas que revisten especial importancia para el lógico y el matemático (el caso, por ejemplo, de las paradojas de Cantor y de Russell), en tanto que las ramificaciones de la teoría de los órdenes no son estrictamente necesarias desde el punto de vista de los objetivos perseguidos en los *Principia Mathematica*, dado que su único cometido es excluir las paradojas que afectan a nociones semánticas o lingüísticas, como las de nombrar y definir, que en ningún caso son de la incumbencia profesional del matemático.

---

17 Ibid., vol. I, p. 59. La expresión "intensionalmente dados", que aparece aquí entre paréntesis, lo hace en el texto original en una nota a pie de página.

18 *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, XXV (1926), pp. 338-84, reproducido en el volumen *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, pp. 1-161.

Tan pronto como se adopta la nueva óptica de Ramsey, el modo más natural de hacer frente a las paradojas semánticas parece que habría de consistir en echar mano de recursos semánticos; y el que mayor fortuna ha alcanzado entre estos últimos es la distinción de lenguaje y metalenguaje introducida por Tarski en su trabajo «The Concept of Truth in Formalized Languages» [19]. De acuerdo con ella, ningún lenguaje consistente podría albergar dentro de sí los medios destinados a permitirnos hablar acerca del significado o la verdad de sus propias expresiones, habiendo surgido paradojas —como, entre otras, las de Berry y el Mentiroso— del olvido de esa limitación. Si, por ejemplo, se habla de *el menor de los números enteros no susceptibles de ser nombrados con menos de treinta y tres sílabas*, habrá que suponer que se está hablando por referencia a los medios o las disponibilidades de uno o más lenguajes dados en particular. Y, una vez comprendido así, resulta claro que la precedente expresión en cursiva no se halla construida con los medios del lenguaje o lenguajes a que estamos refiriéndonos, sino que pertenece a un metalenguaje esencialmente más rico que estos últimos. Aclarado lo cual, la paradoja se desvanece. Por desgracia, la distinción entre aquellos niveles de lenguaje no siempre es fácil de apreciar cuando hacemos uso de un lenguaje natural como el castellano, que estamos acostumbrados a concebir como omnicomprensivo, concepción esta última de la que nacen todas nuestras dificultades. Si deseáramos evitar contradicciones, tendríamos que insistir en que lo que de ordinario se llama castellano no es, en rigor, sino una infinita sucesión de lenguajes, a saber, el castellano $_1$ —en el que nos es dado hablar de piedras, gatos u hombres y muchas otras cosas, mas no del castellano $_1$—, el castellano $_2$ —en el que nos es dado hablar de todo aquello de que podíamos hablar en el castellano $_1$, además de acerca del castellano $_1$—, el castellano $_3$ —en el que nos es dado hablar de todo aquello de que podíamos hablar en el castellano $_2$, además de acerca del castellano $_2$—, y así sucesivamente. Dentro de dicho esquema, el castellano $_{n+1}$ oficiaría como metalenguaje por relación al castellano $_n$.

Tarski recomienda su distinción como un recurso necesario para la resolución de la paradoja del Mentiroso, pero es interesante reparar en la posibilidad de derivarlo de la teoría simple de los tipos. Supongamos en primer término que tratamos de hacer uso de las palabras «designar» y «designación» sin referencia explícita ni implícita a un lenguaje en particular y procedemos, con su ayuda, a construir la fórmula:

«Designación» designa designación.

Tendríamos aquí una obvia violación de la teoría simple de los tipos, en la medida en la que en esa fórmula se toma a una determinada relación por uno de sus propios términos. Pero, en orden a evitarla, no bastaría con advertir que en el futuro se va a hablar siempre de designación-en-castellano. Pues, en efecto, toparíamos con la misma dificultad si procediéramos a construir esta otra fórmula:

«Designación en castellano» designa en castellano designación en castellano.

---

[19] *Logic, Semantics, Metamathematics*, pp. 152-278.

Mas la dificultad acabaría desvaneciéndose si, sobre la base de la estratificación explicada en el último párrafo, escribiéramos ahora:

> «Designación en castellano $_1$» designa en castellano $_2$ designación en castellano $_1$.

Pues nuestra última formulación permitiría apreciar con nitidez que la relación de que se habla es de un tipo superior al de sus términos. Y ésta es, al parecer, la única manera de escapar a la dificultad.

Si rechazamos la distinción de órdenes, nos veremos obligados asimismo a rechazar el principio de evitación del círculo vicioso del que aquélla se deriva. En realidad, hacerlo así sería más un alivio que una auténtica pérdida, dado que el principio resulta harto problemático y difícil de aplicar. ¿Por qué habría que decir con Russell, por ejemplo, que una función presupone sus valores? Mas si nos proponemos conservar la teoría simple de los tipos al tiempo que abandonamos el principio de evitación del círculo vicioso con que Russell la conectaba, habremos de considerar muy seriamente si la teoría simple posee la plausibilidad intrínseca que su autor le atribuía, esto es, si se trata de una teoría que merezca —a la vista de su contenido— ser retenida por sus propios méritos. En orden a posibilitar una decisión a este respecto, tratemos de desentrañar una vez más qué es lo que esa teoría encierra en su interior y cómo se relaciona con la teoría de las funciones proposicionales introducida por Frege.

La novedad más importante de la teoría de Russell es el entramado de reglas de significación por medio de las cuales se excluyen del dominio de las fórmulas bien formadas ciertas combinaciones de signos que de otro modo pasarían por oraciones gramaticalmente correctas y, en particular, todas aquellas combinaciones de la forma $F(Fx)$, o $F(\S xFx)$ en nuestra notación. En lugar de preguntarse si fórmulas como éstas expresan proposiciones verdaderas o falsas, lo que Russell afirma es que no expresan proposición alguna. En su caracterización de los distintos grados o niveles de funciones, Frege anticipó la distinción russelliana de los tipos; pero el hecho de que sus reglas para el uso de los signos funcionales hicieran imposible la construcción en su sistema de la paradoja de la propiedad de ser una propiedad que no se ejemplifica a sí misma parece obedecer, en última instancia, a un simple accidente. Pues, en efecto, para Frege cualquier *objeto* podría oficiar como argumento de cualquier función proposicional de primer grado, de suerte que lo peor que cabría afirmar del complejo «7 es más sabio que la luna» es que expresa una proposición falsa. Y, si Frege hubiera accedido a permitir que se hable de *funciones* por medio de designaciones carentes de lugares vacíos, también habría accedido, con toda probabilidad, a dispensarles un tratamiento similar. Pero Frege se hallaba convencido de que, cualquiera que sea el signo a que podamos recurrir para hablar de una función, habrá de contener un lugar vacío (indicado por Frege mediante una consonante minúscula griega, que no formaría propiamente parte de su lenguaje simbólico), lo que le llevaba a asumir que una función sólo podría intervenir como argumento de otra función si la expresión de la segunda —pongamos por caso $—\breve{\mathfrak{a}}—\phi(\mathfrak{a})$ — permite rellenar el lugar vacío de la expresión de la primera —pongamos por caso $\Phi(\beta)$—, dando lugar de esta manera a una expresión proposicional completa, como sería el caso de $—\breve{\mathfrak{a}}—\Phi(\mathfrak{a})$.

Así se desprende inequívocamente del modo como Frege se ocupa de las funciones de segundo grado en sus *Grundgesetze.*

Si los únicos signos funcionales fueran expresiones tales como «... es sabio», bastaría una serie de consideraciones extraídas de la gramática ordinaria para garantizarnos la verdad de la teoría de los tipos. Pues «... es sabio es sabio» no es ciertamente una oración en castellano, y nadie se inquietaría por el problema de si expresa una proposición verdadera o una proposición falsa. Cuando en nuestro simbolismo lógico escribimos la fórmula $F(Fx)$, tal vez podamos inclinarnos por un momento a suponer que le es dado expresar una proposición; pero, tan pronto como recordemos que la letra x representa un mero lugar vacío, caeremos en la cuenta de que no se trata de una expresión proposicional bien formada. Hasta aquí podemos declararnos de acuerdo con Frege. Y en esto se ha dicho, en ocasiones, que consiste la teoría toda de los tipos [20]. Pero en castellano ordinario contamos asimismo con nombres carentes de lugares vacíos —tales como «sabiduría»— para designar funciones. Y, como ya sabemos, cabría asimismo introducir signos de dicho género dentro del simbolismo de la lógica. Lo que importa ahora decidir es si un signo complejo de la forma $F(\S xFx)$ podría expresar una proposición, y ni la gramática académica ni la indagación de la práctica lingüística común permiten ofrecer una respuesta clara a dicho interrogante. Pues «La sabiduría es sabia» no es manifiestamente antigramatical; y aunque es cierto que nadie —salvo tal vez Platón— la aduciría como una muestra de enunciado verdadero, pudiera haber más de uno dispuesto a replicar «No es el caso que la sabiduría sea sabia», lo que entraña conceder alguna significatividad a «La sabiduría es sabia». ¿Cómo zanjar, si es que es posible hacerlo de algún modo, la cuestión?

No es infrecuente que una oración que contiene la designación de una función pueda ser reemplazada, sin detrimento alguno de su contenido significativo, por otra oración de diferente configuración en la que no interviene tal designación sino tan sólo una expresión de la función. Así, en lugar de «Sócrates poseía sabiduría» podríamos escribir «Sócrates era sabio», y en lugar de «El temor de Dios es el comienzo de la sabiduría» haríamos otro tanto con «Si un hombre teme a Dios, ya ha empezado a ser sabio». Si cupiera establecer de una vez para siempre que todas las oraciones significativas que contienen designaciones de funciones han de ser de algún modo reducibles a oraciones que no las contengan, podríamos olvidarnos de «La sabiduría es sabia» y complejos de palabras por el estilo calificándolos de no-significativos, puesto que es obvio que no hay modo de reducirlos en aquel sentido. Mas nadie ha demostrado que haya de ser siempre posible la eliminación de las designaciones de funciones del ámbito del discurso significativo, sin que para nuestros propósitos podamos contentarnos con citar multitud de ejemplos en los cuales haya sido posible eliminarlas con éxito, puesto que el adversario de la teoría de los tipos redargüiría que la cuestión que se debate no puede ser resuelta recurriendo a los métodos de la ciencia natural. Lo más lejos que cabría llegar mediante esta argumentación es a mostrar que los com-

[20] Este pudiera ser el sentido de las observaciones de Wittgenstein en su *Tractatus Logico-philosophicus*, 3, 332.

plejos verbales a los que la teoría de los tipos deniega significación son, desde luego, harto chocantes. Esta última consideración pudiera incitarnos a aceptar la teoría como un medio de escapar a nuestras perplejidades, pero es importante no olvidar que las ventajas ofrecidas por la teoría tienen un precio y que la teoría misma no se halla exenta por su parte de dificultades.

En primer lugar, la teoría introduce considerables complicaciones en nuestra presentación de la lógica, complicaciones que no serían menores en relación con lo que hayamos de decir acerca de los números. Pues, en efecto, no sólo habría que distinguir en cuanto a sus respectivos tipos entre números naturales, enteros con cualificación de signo, racionales, reales o complejos, sino que habría también que distinguir entre números naturales aplicables a conjuntos de tipos diferentes. Así, y de acuerdo con la elaboración de la teoría de Frege por parte de Russell, el número cuatro en cuanto número de las virtudes cardinales tendría que ser una entidad de diferente tipo que el número cuatro en cuanto número de los monarcas españoles llamados Carlos. Pues las virtudes son cualidades que podrían pertenecer a los hombres, y un conjunto de virtudes —determinado por una característica aplicable únicamente a tales cualidades— no se podría decir con propiedad que se halle a la par que un conjunto de hombres, determinado por una característica solamente aplicable a estos últimos. Es posible que, como Frege afirmara, la operación de contar pueda llevarse a cabo con cualesquiera clases de entidades concebibles, pero ahora parece que habría que manejar una aritmética diferente para cada uno de los tipos que cupiera distinguir: esto es, los numerales que intervienen en las dos igualdades 2 *hombres*+2 *hombres*=4 *hombres* y 2 *virtudes*+2 *virtudes*=4 *virtudes* no podrían ya significar los mismos números. Russell trata de paliar este inconveniente diciendo que hace un uso *sistemáticamente ambiguo* de los símbolos de la lógica y la matemática. Según él, hay en rigor diferentes tipos de números naturales (y, por ende, diferentes tipos de números racionales, etc.), pero en el desarrollo de la aritmética podemos pasar por alto esta complicación, dado que nuestras fórmulas resultan aplicables sin la menor alteración a cualquier tipo con que podamos tropezarnos en el dominio de la matemática aplicada o incluso en aquellas ramas de la matemática pura en las cuales se opera, por así decirlo, con los números en sí mismos.

En segundo lugar, la teoría de los tipos excluye la posibilidad de definir una infinidad de números naturales a la manera sugerida por Frege. Si se dice que 0 es el conjunto de todos los conjuntos equivalentes en el sentido técnico de Cantor al conjunto de las cosas no idénticas a sí mismas y 1 es el conjunto de todos los conjuntos equivalentes al conjunto $\{0\}$ en este mismo sentido, sería erróneo decir que 2 sea el conjunto de todos los conjuntos equivalentes al conjunto cuyos miembros son 0 y 1. Pues, de acuerdo con las dos primeras definiciones, 1 será de un tipo superior a 0, con lo que no podría haber ningún conjunto del que ambos sean miembros. Frege no introdujo distinciones de niveles o grados al ocuparse de las entidades que llamaba objetos. Pero, si Russell está en lo cierto, su definición de 2 sería tan curiosa como la misma idea de que Sócrates y la sabiduría puedan poseer alguna propiedad en común, obligando por consiguiente a renunciar al procedimiento fregeano para asegurar

la infinitud de la serie de los números naturales. Para la matemática, no obstante, es esencial que la sucesión de los números naturales no tenga fin, lo que empuja a Russell por su parte a introducir un especial Axioma de Infinitud, de acuerdo con el cual ha de haber algún tipo —presumiblemente el de los individuos, que constituye el peldaño más bajo de la jerarquía— en que concurran una infinidad de elementos. Sin recurso a este axioma —advierte Russell— nos encontraríamos inermes ante la desastrosa posibilidad de que aquella sucesión numérica se interrumpa en un punto culminante, como lo podría ser el número de miembros del conjunto de magnitud más vasta admisible.

Hay algo de profundamente insatisfactorio en el axioma de infinitud. El axioma no merece la consideración de verdad lógica en ninguna acepción medianamente razonable del vocablo, de suerte que su introducción a título de proposición primitiva de la aritmética equivale en efecto al abandono del proyecto fregeano de presentar a esta última como una prolongación de la lógica. Y no basta con alegar, como en ocasiones hace Russell, que cabría tratarla como un postulado o una hipótesis más bien que como un axioma en el viejo sentido de este término. Pues lo que, por ejemplo, precisamos aseverar es que la serie $1/2+1/2^2+1/2^3+\ldots$ converge a 1 como su límite, y no que lo haría así si diese la casualidad de que hubiera infinitos individuos en el mundo. Pero incluso si abandonamos toda esperanza de consumar el programa fregeano y reconocemos sin ambages que la matemática requiere del axioma de Russell a título de premisa extralógica, ¿cómo cabría justificar nuestra aceptación del mismo? ¿De qué individuos habla Russell y cómo se podría determinar si hay una infinidad de ellos? Russell afirma referirse a aquellas cosas, cualquiera que sea su naturaleza, que resultan susceptibles de ser denominadas mediante nombres lógicamente propios y únicamente pueden oficiar como sujetos en el seno de una proposición. Pero admite que es difícil ofrecer una muestra de tales cosas y llega a sugerir que hasta pudiera no haberlas, si todo cuanto reviste la apariencia de un individuo resultase en realidad ser una clase o un complejo de algún género. En cuanto a la segunda pregunta, de respuesta asaz incierta, observa animosamente que, si hubiera algún modo de comprobarlo, el axioma de infinitud tendría evidentemente que acreditarse como cierto respecto de los tipos que existen en el mundo; pero añade que no pretende estar al cabo de la calle de que sea esto lo que ocurre y concluye declarando que no sabe de ningún modo de averiguar si el axioma es verdadero o falso [21].

Aparte estas dificultades que incluso la teoría simple de los tipos plantea a quienes tratan de seguir a Frege en su programa logicista, nos encontramos con la dificultad —aún más fundamental— de que parece imposible formular la teoría sin violar de algún modo sus propios requisitos, dado que términos como «función», «entidad» y «tipo» han de permanecer en ella invariablemente libres de restricciones en cuanto a su tipo. Cuando decimos, por ejemplo, que ninguna función puede ser significativamente aseverada de todas las entidades sin distinción de tipo, nuestro propio enunciado envolverá la ilimitada generalidad cuya imposibilidad proclama. Y algo ha de haber también que no funciona en la definición usual de tipo,

[21] *Introduction to Mathematical Philosophy*, p. 143.

de acuerdo con la cual dos entidades serían del mismo tipo si una función proposicional significativamente afirmada o negada de la una pudiera también serlo de la otra. Pues cuando tratamos de aplicar esa definición a un caso particular, diciendo, por ejemplo, que Platón es del mismo tipo que Sócrates, pero que la sabiduría no lo es, nos encontramos envueltos en una contradicción. De lo que acaba de decirse se sigue, en efecto, que Platón no es del mismo tipo que la sabiduría, pese a lo cual se sigue también de ello que hay al menos una función que puede con verdad ser afirmada de Platón y negada de la sabiduría, a saber, la de ser del mismo tipo que Sócrates.

Críticas de este estilo han impulsado a Russell a admitir que debiera haber distinguido entre tipos de *símbolos* más bien que entre tipos de entidades [22]. Los vocablos «Platón» y «sabiduría», nos dice ahora, pertenecen a tipos diferentes porque no son intercambiables sin detrimento de su significación. Pues mientras que «Platón era más joven que Sócrates» hace sentido, «La sabiduría era más joven que Sócrates» carece de él. Cuando, en cambio, construimos denominaciones de dichos vocablos imprimiendo a estos últimos entre comillas, nuestros nuevos signos pertenecerán al mismo tipo por admitir su mutuo intercambio sin detrimento de su significación. Así, si reemplazamos «Platón» por «sabiduría» en la oración «'Platón' es del mismo tipo que 'Sócrates'», el resultado seguirá siendo significativo por más que la proposición que esa oración expresa sea falsa.

Si se hace de ella un uso escrupuloso, esta nueva versión de la teoría de los tipos vendría a reunir todas las ventajas de la originaria e incluso cabría considerarla como una mejora de esta última, no sólo por salvarnos de nuevas paradojas sino también por permitirnos confiar en una mejor compresión de la situación. Pero sería erróneo suponer que el mero hecho de hablar de palabras en vez de cosas vaya a darnos vía libre para escapar de toda suerte de enredos metafísicos, autorizándonos a basar todas nuestras distinciones en simples consideraciones gramaticales. En particular, sería equivocado imaginar que las diferencias de tipos sean siempre asunto de la sintaxis de acuerdo con la acepción usual de dicho término gramatical. Es cierto que entre «Platón» y «... es sabio» se da una diferencia de orden sintáctico, puesto que la primera constituye una designación y la segunda una expresión funcional; pero tal diferencia no concurre entre «Platón» y «sabiduría», y está muy lejos de ser obvio que todas las aserciones significativas resulten traducibles a un lenguaje simplificado que no contenga más que designaciones de un solo tipo dado.

Con vistas a la resolución de las paradojas que atormentaban a matemáticos y lógicos a comienzo de siglo, la distinción de tipos que importa es la que existe entre palabras como «Platón» y palabras como «sabiduría», de las que se podría decir que representan características y relaciones de Platón. Mas, bajo el influjo de Russell, los filósofos se han acostumbrado a hablar de distinciones de tipos o categoriales en sus intentos por resolver problemas de muy diversa índole. Así se ha sugerido, por ejemplo, que, al hablar de interacción entre la mente y el cuerpo, se está incurriendo en una manifiesta confusión de categorías [23]. Si tales extensiones de la teoría de

---

22 Véanse la crítica de Max Black y la réplica de Russell en *The Philosophy of Bertrand Russell*, ed. P. A. Schilpp, pp. 235 y 691.

23 G. Ryle, *The Concept of Mind*.

los tipos son o no son justificables es algo a decidir en cada caso a través de un examen detallado de los modos como hablamos y pensamos cuando lo hacemos con propiedad. Pero, en líneas generales, habremos de adoptar un par de precauciones.

En primer lugar, no deberemos suponer que los términos del lenguaje ordinario sean mutuamente intercambiables *salva significatione* en todos los contextos ni tampoco que no lo sean en ninguno. Aun cuando no podamos sustituir «Platón» por «(la) sabiduría» en la oración «Platón era sabio» sin dar lugar a un sinsentido, nos es dado llevar a cabo dicha sustitución en la oración «Sócrates amaba a Platón» sin suscitar por ello el menor sentimiento de sorpresa. En consecuencia habremos de contentarnos con decir que la diferencia de tipo entre ambos vocablos viene indicada simplemente por su no-intercambiabilidad en *algún* contexto, lo que acaso arroje serias dudas sobre la posibilidad de declarar del mismo tipo a ningún par de palabras.

En segundo lugar, cuando abandonamos el dominio de la lógica y la matemática pura para centrarnos en la investigación de los pensamientos expresados en el lenguaje ordinario, no siempre está claro dónde haya de trazarse la línea divisoria entre la falta de sentido y la imposibilidad científica. Consideremos, por ejemplo, la lista de complejos de signos que sigue a continuación:

1. El cura cree en el pecado original.
2. El nene cree en el pecado original.
3. El gato cree en el pecado original.
4. La silla cree en el pecado original.
5. El alquiler cree en el pecado original.

Es obvio que el primero de estos cinco complejos puede ser proferido con el propósito de formular un enunciado. Y parece razonable decir que el último de ellos constituye un sinsentido. Pero ¿qué hay de los intermedios? Todos nosotros hemos oído hablar de niños precoces. ¿Y no podría haber algún niño tan precoz que el cura se sintiera obligado a instruirle en la doctrina del pecado original cuando aquél se halle todavía en su más tierna infancia? En cuyo caso, y puesto que hay algunos gatos más inteligentes que otros, ¿no podría tal vez el gato de la casa, tras escuchar un día y otro las disertaciones del cura, llegar a creer en el pecado original? ¿Y por qué no podría, finalmente, llegar la silla en que se sienta el cura a convertirse también en creyente bajo el efecto momentáneo del encantamiento de un mago? ¿No hace al menos todo esto alguna suerte de sentido? ¿Habremos de decir, en consecuencia, que la divisoria discurre entre el cuarto y el quinto ejemplos de la lista? ¿Más qué clase de conclusión sería ésta? Supongamos que alguien nos informa de que en las consejas y leyendas coptas se acostumbra a decir que los verdaderos creyentes se transforman en alquileres y que los niños coptos no encuentran ininteligibles estos relatos. ¿Admitiremos en tal caso que cualquier sarta de palabras que resulte permisible de acuerdo con la sintaxis habitual podría comunicar algún sentido para alguien? ¿O replicaremos más bien, dogmáticamente, que las leyendas y consejas coptas nos traen sin cuidado porque sabemos *a priori* que es menester trazar una línea divisoria entre el cuarto y el quinto de los ejemplos precedentes? Lo que

parece en cualquier caso estar en claro es que, en contextos como los que acabamos de considerar, la teoría de los tipos está lejos de ofrecernos la posibilidad de detectar mediante una sencilla regla sinsentidos que, de no ser por ella, hubieran de escapar a nuestra noticia. Por el contrario, los defensores de la teoría en tales contextos habrán de conceder la imposibilidad de descubrir una sola diferencia de tipo a menos que el correspondiente sinsentido resulte previamente detectable sin ayuda de la teoría.

Si el único partido que tratáramos de extraer de la misma fuera purgar de antinomias a la teoría de conjuntos, podríamos servirnos de la teoría russelliana de los tipos ahorrándonos algunas de sus dificultades por recurso a la técnica de la uniformación reseñada en el último capítulo. Es decir, podríamos presentar la teoría pluricategorial de los conjuntos valiéndonos de variables que tengan por alcance un universo unitario del discurso (esto es, un universo del discurso que contenga entidades correspondientes a todos los tipos), siempre que a estos efectos (I) cualifiquemos nuestros teoremas mediante condiciones que permitan la distinción entre entidades de acuerdo con sus tipos y (II) introduzcamos el nuevo esquema axiomático

$$(x)(y)\{x \in y \supset [T_n(x) \equiv T_{n+1}(y)]\},$$

donde los signos T han de considerarse predicados categoriales o de tipo, a su vez definibles en términos de pertenencia [24].

3. El intuicionismo de Brouwer.

En su controversia con Russell a comienzos de siglo, Poincaré había sugerido que las paradojas de la teoría de conjuntos se debían al fundamental error de asumir la existencia de agregados infinitos en acto. Poincaré no explicó con detalle por qué dicha asunción había de dar lugar a contradicciones. Pero no le faltaba razón al suponer que, si los matemáticos se abstuvieran de hablar del infinito a la manera de Cantor, no tendrían ocasión ni necesidad de enfrentarse a los característicos rompecabezas cantorianos. Y podría tal vez haber argüido que era ocioso perder tiempo en la discusión pormenorizada de asunciones cuyo absurdo resultaba fácilmente detectable sin que para ello fuese menester tropezar con las paradojas. Semejante actitud habría contado con el apoyo de no pocos matemáticos ilustres. Gauss afirmó ya, a comienzos del siglo diecinueve, que en matemáticas no había lugar a hablar de un infinito actual [25]; y, más recientemente, Kronecker capitanearía una campaña contra el programa cantoriano. Mas ninguno de ellos había llegado a extraer todas las consecuencias de la negativa a admitir otro infinito que el infinito potencial de una sucesión susceptible de prolongarse *ad libitum*. Y no fue sino con la obra de L. E. J. Brouwer, ya en nuestro propio siglo, cuando se explicitaron dichas consecuencias, siquiera en la medida en que podían interesar a la generalidad de los matemáticos.

[24] W. V. Quine, "Unification of Universes in Set-Theory", *Journal of Symbolic Logic*, XXI (1956), pp. 267-79. Cf. Hao Wang, "Logic of Many-Sorted Theories", *Journal of Symbolic Logic*, XVII (1952), pp. 105-16.

[25] *Werke*, vol. VIII, p. 216.

Como Kant y Poincaré, Brouwer sostiene que los teoremas matemáticos constituyen verdades sintéticas *a priori*. En su disertación inaugural de 1912 en la Universidad de Amsterdam reconoce que el desarrollo de la geometría no-euclidiana había desacreditado la concepción kantiana del espacio, pero —en oposición a Frege, Whitehead y Russell— sostiene que la aritmética, y con ella toda la matemática, se ha de derivar de la intuición del tiempo. Con sus propias palabras, «el neointuicionismo considera la disgregación de los instantes de la vida en fragmentos cualitativamente diversos, únicamente susceptibles de re-unión en tanto permanecen separados en el tiempo, como el fenómeno fundamental del intelecto humano». A partir de semejante «intuición de la simple multi-unidad» obtenemos en primer término la noción de la serie de los números ordinales y tras ella la del continuo lineal, esto es, la noción «del intervalo inagotable por la inter-posición de nuevas unidades, que por lo tanto nunca puede ser pensado como una mera colección de unidades». En la medida en la que presupone la continuidad, la misma geometría resulta dependiente de aquella intuición. No hay otros conjuntos que los conjuntos numerables y, por lo tanto, no hay otros cardinales transfinitos que $\aleph_0$, el cardinal de aquel conjunto cuyos miembros resulten coordinables con la sucesión de los números naturales. En particular, no cabe atribuir ningún significado a expresiones por el estilo de «el conjunto de todos los números reales comprendidos entre 0 y 1» [26].

Lo que Brouwer afirma de la intuición en este manifiesto resulta un tanto oscuro y el resto de sus trabajos tampoco arrojan demasiada luz sobre la cuestión, por interesantes que puedan parecernos desde un punto de vista filosófico; pero el autor no deja lugar a dudas acerca de su repudio de todo cuanto se halle conectado con la noción de un infinito actual, completo o extensional, incluida la misma libertad de hablar del conjunto de los números reales comprendidos en un intervalo. En su opinión, hasta la propia serie de los números naturales ha de ser concebida como una multiplicidad abierta, siempre en continuo crecimiento y nunca acabada de consumar, de cuya inabarcable magnitud sólo cabría hacerse idea a través de la comprensión de la ley que preside su construcción.

En ocasiones, Brouwer y sus discípulos sostienen que la intuición de la que hablan no es sino la clara aprehensión por parte de la mente de lo que ella misma ha construido, asegurando con frecuencia que toda prueba matemáticamente satisfactoria ha de ser de carácter constructivo. Es difícil averiguar qué es lo que «construcción» y «constructivo» quieren decir en tal contexto, pero el hecho de que rechacen a menudo la dependencia del pensamiento matemático respecto de cualquier clase de lenguaje en particular y expresen sobre todo una marcada desconfianza hacia las técnicas de formalización, de las que tantos otros matemáticos esperan alcanzar seguridad, parece sugerir que las pruebas constructivas consisten para ellos en la ejecución de algún experimento en la imaginación. A. Heyting, una de las figuras rectoras de la escuela, ha llegado a escribir:

«La matemática intuicionista se compone... de una serie de construcciones mentales; un teorema matemático expresa en ella un hecho puramente empírico, a sa-

26 "Intuitionism and Formalism", Disertación Inaugural en la Universidad de Amsterdam, 1912, traducida y publicada en *The Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. XX (1913), pp. 81-96.

ber, el buen éxito de una determinada construcción. Así, '2+2=3+1' se ha de leer como una abreviatura del enunciado 'He efectuado las construcciones mentales indicadas por "2+2" y "3+1", comprobando que ambas conducen al mismo resultado'» [27].

Mas su intención difícilmente podría ser la reducción de la matemática a autobiografía psicológica. Pues Heyting concedería evidentemente que los teoremas demostrados por él a base de reflexionar sobre su propia capacidad de construcción mental podrían ser asimismo demostrados por quienquiera que sea lo suficientemente inteligente para ello, no resultando apropiado pretender que cada hombre posea su propia matemática (a menos que esta frase aluda simplemente al repertorio de teoremas personalmente descubiertos y verificados por ese hombre). Y es de presumir que los modernos intuicionistas coincidirán con Kant en declarar objetivos a los teoremas matemáticos en el sentido de ser válidos para todos los seres dotados de inteligencia. Si ello es así, quizá cupiera reemplazar en determinados contextos la expresión simbólica de un teorema por el enunciado de que algo es *susceptible de prueba*, mas lo que no cabría hacer sería tratarla a modo de registro del hecho empírico de que ese algo haya sido *probado* por quien se sirve de ella. Sin duda podríamos aducir la transcripción de la expresión simbólica en cuestión como el testimonio de un resultado mentalmente obtenido por el que la transcribe, pero ello no es razón suficiente para decir que la expresión signifique algo acerca de este último.

En la práctica, la exigencia más importante del programa constructivista es la de no admitir en matemáticas enunciado ninguno existencial que no haya podido ser demostrado por medio de la producción de un ejemplo. Quien deje de observar tal precaución sólo podrá culparse a sí mismo, según Brouwer, si incurre en una paradoja, pues se limitará a hablar sin el menor respaldo de carácter intuitivo. Hay que admitir, empero, que el propio Brouwer se ha visto abocado a algunas conclusiones sorprendentes en su intento de aplicar rigurosamente aquel programa. Ya en 1908 dio a conocer un trabajo sobre la falta de fiabilidad de los principios de la lógica [28], publicando a partir de 1918 un cierto número de ellos contra el uso del principio de tercio excluso en el dominio de la matemática. Lo que sostiene en esos trabajos es que la matemática, derivando directamente de la intuición como lo hace, no presupone un sistema de lógica, sino más bien es una fuente de principios lógicos, dado que estos últimos sólo podrían ser enunciados en toda su generalidad una vez que su validez haya quedado establecida por la intuición correspondiente. No hay, ni podría haberlo, un lenguaje capaz de asegurar a la matemática contra todo riesgo, esto es, un lenguaje capaz de conjurar toda posibilidad de error, por lo que es un empeño vano confiar en la exhaustiva formalización de la matemática. Es lo que incontestablemente subraya, en su opinión, la historia del principio de tercio excluso. Los hombres, en su vida cotidiana, se ocupan comúnmente de conjuntos finitos, y la intuición revela que las reglas de su lógica ordinaria resultan apropiadas en orden a razonar con esa clase de conjuntos. Pero las tales reglas se han visto erigidas en reglas absolutas, siendo así

27 *Intuitionism, An Introduction*, p. 8.

28 "De onbetrouwbaarheid der logische principes", Tijdschrift voor wijsbegeerte, II (1908), p. 152, reproducido en *Wiskunde, Waarheid, Werkelijkkeid*. No hemos tenido acceso a este trabajo.

aplicadas al razonamiento con conjuntos infinitos sin contar con la garantía de la intuición. En este nuevo contexto, el principio de identidad, el principio de no-contradicción y el principio del silogismo continúan en rigor siendo apropiados, pero no ocurre así con el principio de tercio excluso ni el principio asociado de eliminación de la doble negación [29].

Consideremos un enunciado existencial $(\exists x)[Fx.\sim Gx]$ y el enunciado universal $(x)\sim[Fx.\sim Gx]$ que de ordinario se interpreta como su contradictorio. Si el conjunto denotado por $\hat{x}Fx$ fuera finito, sería en principio posible pasar revista a todos sus miembros, decidiendo así en favor de uno u otro de los dos enunciados. La tarea tal vez resulte técnicamente impracticable en un caso concreto, pero al menos tendríamos una clara idea del método que habría de permitirnos decidir a cuál de esas alternativas le corresponde la verdad. Mas si el conjunto denotado por $\hat{x}Fx$ fuese numerablemente infinito, la situación sería muy diferente. La enumeración sistemática seguiría bastando para probar el enunciado existencial, ya que habría de llevarnos a dar con un ejemplo favorable —si hubiera tal ejemplo— en un número finito de pasos. Pero el procedimiento no sería ya efectivo para probar el enunciado universal, pues resulta insensato a estos efectos ponerse a enumerar uno tras otro los miembros todos del conjunto infinito. Así, quienquiera que lograse demostrar la conjetura de Goldbach según la cual todo número par mayor que dos puede representarse como la suma de dos primos habría de hacerlo así determinando que corresponde a la naturaleza de un múltiplo de dos revestir dicha propiedad. Ahora bien, Brouwer y la mayor parte de los intuicionistas están dispuestos a conceder que un modo de probar un enunciado universal de dicho género consistiría en demostrar, si ello es posible, que el opuesto enunciado existencial envuelve una contradicción y ha de ser por lo tanto rechazado, esto es, están dispuestos a admitir la tesis lógica

$$\sim(\exists x)[Fx.\sim Gx]\supset(x)\sim[Fx.\sim Gx];$$

mas no admiten, en cambio, la tesis

$$\sim(x)\sim[Fx.\sim Gx]\supset(\exists x)[Fx.\sim Gx],$$

por considerar que, aun si lográramos refutar el enunciado universal demostrando que envuelve una contradicción, no por ello estaríamos más cerca de haber descubierto una cosa llamada A de la que quepa aseverar $FA.\sim GA$ ni habría tampoco nada, por lo tanto, que nos autorizara a aseverar la proposición existencial opuesta a aquél. En pocas palabras, el razonamiento envuelto en la segunda tesis no sería constructivo, de suerte que quien extraiga de él a título de conclusión la correspondiente proposición existencial correrá un riesgo intelectual comparable al riesgo físico corrido por un hombre que deambula en la más absoluta oscuridad. Pero el rechazo de la segunda tesis comporta ciertamente el abandono del principio de tercio excluso y el principio asociado de eliminación de la doble negación.

Este último corolario es lo bastante sorprendente como para hacernos sospechar que la filosofía intuicionista de la matemática incurre en un error, cuya flagrancia se halla quizás enmascarada por el hecho de que

[29] Cf. especialmente "Mathematik, Wissenschaft und Sprache", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XXXVI (1929), pp. 153-64.

Brouwer identifica el abandono de esos principios lógicos con el rechazo de la suposición de que todo problema matemático es resoluble [30]. Pues ciertamente hay que admitir que los problemas relativos a conjuntos infinitos no pueden todos ellos ser resueltos por medio de una regla mecánica de procedimiento como la que infaliblemente conduce a la resolución de los problemas relativos a conjuntos finitos. Aunque podamos decir algo acerca de la forma genérica que habría de adoptar, si se lograra dar con ella, una demostración de la conjetura de Goldbach, el caso es que somos incapaces de ofrecer instrucciones efectivas para el hallazgo de tal demostración. Pero ¿qué es lo que lleva a Brouwer a suponer que la aserción sin reservas del principio de tercio excluso haya de equivaler a la pretensión de contar con un método universal para la resolución de los problemas matemáticos? Una razón acaso sea que su programa constructivista le obliga a sostener la impropiedad de la aserción de un enunciado disyuntivo a menos de poder aseverar uno de sus disyuntos. Pues, de acuerdo con esta severa interpretación de la disyunción, una persona que escribiese $p \vee \sim p$, usando la letra p como una variable libre, daría a entender que se halla en situación de afirmar o negar toda proposición que pudiese ser sometida a su consideración. Es probable, no obstante, que Brouwer se dejara influir asimismo por la idea de que, en la matemática intuicionista, no cabe establecer ninguna diferencia entre $\sim(\exists x)[Fx.\sim Gx]$ y $\Delta\sim(\exists x)[Fx.\sim Gx]$, donde Δ representa una abreviatura de «es demostrable que». Nosotros ya hemos apuntado que los intuicionistas conciben a un teorema como el enunciado de que algo es susceptible de prueba; y es fácilmente comprensible que quien se instale —como Brouwer lo hace— en la exigencia de pruebas constructivas ponga especial empeño en resaltar que en la matemática no hay lugar para la universalidad meramente accidental. Heyting ha afirmado, así, que «en la matemática intuicionista sólo tiene cabida la falsedad *de jure*: la introducción de una mera falsedad *de facto* entraría en conflicto con el principio de constructividad» [31], de donde es fácil derivar la tesis que se acaba de mencionar.

Cualquiera que sea el significado preciso de sus declaraciones de carácter filosófico, de lo que no hay duda es de que, para Brouwer, entrañan importantes consecuencias en el dominio de la matemática. Pues, por lo pronto, los métodos que Brouwer califica de no-constructivos son por desgracia harto comunes en la teoría de los números reales. Ciertamente es difícil imaginar cómo cabría presentar una parte sustanciosa del análisis clásico sin recurrir a dichos métodos. En la teoría de Dedekind un número real se considera un conjunto actualmente infinito de números racionales, y hasta los teoremas más sencillos son demostrados dentro de ella sobre la base de admitir la vigencia del principio de tercio excluso por relación a esos conjuntos. Cuando, por ejemplo, se desea probar que, para cualesquiera dos números reales x e y, ha de darse una u otra de estas tres posibilidades: $x>y$, $x=y$ o $x<y$, es menester comenzar por aseverar que en x hay o no hay —sin que quepa un término medio— un número racional que no pertenece a y. Brouwer y sus seguidores rechazarían todo esto, obligándose así a reconstruir la matemática de acuerdo con patrones más estrictos

30 "Intuitionistiche Betrachtungen über den Formalismus", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phy.-Math. Klasse*, 1928, pp. 48-52.
31 *Intuitionism, An Introduction*, p. 18.

de demostración. La sutileza y el ingenio derrochados en esa empresa proporcionan un considerable placer estético a algunos matemáticos, pero está claro que el edificio por ellos levantado ha de resultar inevitablemente más complicado que el edificio clásico al que pretende reemplazar.

Para el estudio de la lógica intuicionista, que es lo que especialmente nos concierne, el más importante de los desarrollos de la escuela ha sido la formulación por parte de Heyting de su cálculo lógico de 1930 [32]. Ya que uno de los dogmas del intuicionismo es la denegación de carácter definitivo a cualquier sistema formal, Heyting no trata en ningún caso de sugerir que el razonamiento matemático haya de confinarse invariablemente a argumentaciones que respondan a los esquemas recogidos en el suyo; mas su sistema fue aceptado por Brouwer como un correcto compendio de los principios lógicos usados por la matemática intuicionista contemporánea, y merece por ello ser atentamente considerado. Sus reglas de deducción son las de los *Principia Mathematica*, pero presenta dos rasgos distintivos. En primer lugar, los diversos signos lógicos (conjuntivo, disyuntivo, condicional, negativo, universal y existencial) se toman todos ellos como primitivos e indefinidos [33]; y, en segundo lugar, se abandonan los diferentes repertorios axiomáticos propuestos por Frege y demás autores para el cálculo proposicional en favor de la siguiente colección de once axiomas:

1. $p \supset (p.p)$
2. $(p.q) \supset (q.p)$
3. $(p \supset q) \supset [(p.r) \supset (q.r)]$
4. $[(p \supset q).(q \supset r)] \supset (p \supset r)$
5. $q \supset (p \supset q)$
6. $[p.(p \supset q)] \supset q$
7. $p \supset (p \vee q)$
8. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
9. $[(p \supset r).(q \supset r)] \supset [(p \vee q) \supset r]$
10. $\neg p \supset (p \supset q)$
11. $[(p \supset q).(p \supset \neg q)] \supset \neg p$

Se apreciará que en las dos últimas fórmulas aparece el nuevo signo $\neg$ donde cabría haber esperado el signo habitual $\sim$ de la negación. Pero, aparte de ello, cada uno de los axiomas de Heyting se asemeja por su apariencia a una tesis de la lógica clásica, permitiendo —en combinación con las reglas de sustitución y separación— la derivación de buen número de modos de razonamiento reconocidos por aquella última. De esos axiomas, sin embargo, no es posible derivar ninguno de los dos principios rechazados por Brouwer, a saber, los principios expresables por medio de las fórmulas $p \vee \neg p$ y $\neg \neg p \supset p$. Más aún, el sistema presenta la peculiaridad de no admitir proposición alguna disyuntiva a menos de que una de sus disyuntas resulte por separado susceptible de prueba. Un sistema equivalente de reglas de «inferencia natural» podría ser obtenido omitiendo la regla (6b) de la versión del sistema de reglas gentzeniano ofrecido en una de nuestras anteriores secciones.

¿Qué habremos de decir del cálculo de Heyting? Este acostumbra a presentarse como si se tratara de una formalización de aquella parte de la

---

32 "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys. math. Klasse*, 1930, pp. 42-56. Cf. asimismo *Intuitionism*, c. VII.

33 J. C. C. McKinsey ha demostrado que ninguno de ellos puede ser definido por referencia a los restantes sin alteración del sistema; cf. "Proof of the Independence of the Primitive Symbols of Heyting's Calculus of Propositions", *Journal of Symbolic Logic*, IV (1939), pp. 155-8.

lógica clásica a la que nada tiene Brouwer que objetar. Y, en alguna medida, eso es precisamente lo que aspira a constituir. Pero, por otro lado, no es posible abandonar los principios de la lógica clásica al tiempo que se otorga a los correspondientes signos lógicos sus sentidos habituales, puesto que el sentido de un signo lógico viene siempre determinado por las fórmulas lógicas en las que dicho signo ha sido introducido. Y los intuicionistas no se contentan con ignorar la fórmula $p \vee \neg p$, sino que expresamente afirman que no hay lugar para ella en su cálculo proposicional. Parece, pues, que, si el signo $\vee$ hubiera de retener su sentido usual en la lógica intuicionista, $\neg$ tendría que significar algo diferente de $\sim$. En la exposición de su teoría, Brouwer frecuentemente escribe «es absurdo» donde cabría haber esperado que escribiera «no es el caso»; y, como ya hemos visto, Heyting advierte que la negación que entra en juego en la matemática intuicionista no es meramente la *de facto*. No es sorprendente, por lo tanto, que muchos críticos hayan supuesto que el llamado signo de negación del cálculo intuicionista constituye en rigor un signo de imposibilidad, concluyendo de ahí que lo que se rechaza no es, propiamente hablando, el principio de tercio excluso, sino la tesis evidentemente inaceptable de que toda proposición habrá de ser o verdadera o imposible [34]. Pero ésta no alcanza a ser una caracterización suficiente de la cuestión, pues la última de las fórmulas de Heyting arriba enumeradas no podría constituir una verdad lógica si se interpretara a $\neg$ en el sentido de «es imposible que» en tanto que los demás signos retienen sus sentidos usuales. La situación es en rigor más compleja que todo eso, como K. Gödel ha hecho ver en dos trabajos de 1932 [35].

Si se interpreta el cálculo de Heyting como un apartado de la lógica clásica, nos encontraríamos en la paradójica situación de que es posible demostrar que ese apartado contiene en un cierto sentido a la totalidad en que se incluye. Pues, aunque Heyting afirma que sus signos han de tomarse como primitivos e indefinidos, nada hay que nos impida introducir un nuevo signo de disyunción —pongamos por caso, $\oplus$— y un nuevo signo de implicación —pongamos por caso, $\rightarrow$ —, definidos por medio de las equivalencias:

$$P \oplus Q = \neg(\neg P.\neg Q)$$
$$P \rightarrow Q = \neg(P.\neg Q)$$

A partir de las cuales, conjuntamente tomadas con los axiomas y reglas de inferencia ofrecidas por Heyting, sería posible obtener ahora todas las tesis de la lógica clásica de proposiciones, incluido el principio de tercio excluso en la formulación $p \oplus \neg p$ y el principio de eliminación de la doble negación en la formulación $\neg\neg p \rightarrow p$. Pues las dos fórmulas que se acaban de mencionar son simplemente abreviaturas de $\neg(\neg p.\neg\neg p)$ y $\neg(\neg\neg p.\neg p)$, que podrían ambas ser probadas en el sistema de Heyting. Se observará, no obstante, que los nuevos signos $\oplus$ y $\rightarrow$ no han de identificarse con los signos intuicionistas $\vee$ y $\supset$, y que la fórmula

34 Cf., por ejemplo, W. Kneale, "Are all Necessary Truths True by Convention?", *Aristotelian Society Proceedings*, sup. vol. XXI (1947), pp. 118-33.

35 "Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie" y "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft IV (1932), pp. 34-38 y 39-40.

$\neg\neg p \rightarrow p$ no puede ser usada en el cálculo intuicionista para la eliminación de la doble negación, ya que la regla de separación correspondiente al *modus ponens* para dicho cálculo se refiere a $\supset$ y no a $\rightarrow$.

Mediante una extensión de este mismo procedimiento se ha podido demostrar que las versiones clásicas del cálculo funcional restringido y la aritmética elemental pueden ser ambas reconstruidas en el interior de los correspondientes sistemas intuicionistas, habiéndose conjeturado que es posible hacer otro tanto con el análisis clásico [36]. Semejante reproducción de los cálculos clásicos dentro de los intuicionistas equivale a una prueba relativa de la consistencia de los primeros, tal y como el modelado de una geometría no-euclidiana dentro de la geometría euclidiana contribuye a probar que la primera no podría ser inconsistente a menos que la segunda lo sea también. Si la matemática intuicionista se halla libre de contradicción, también habrán de estarlo aquellos apartados de la matemática clásica que quepa traducir a apartados de la matemática intuicionista.

En el primero de los dos trabajos arriba mencionados, Gödel llega a la conclusión de que las restricciones impuestas por Brouwer a las demostraciones en el dominio del análisis y la teoría de conjuntos no se deben —contra lo que afirmara el propio Brouwer— al abandono del principio de tercio excluso, sino más bien al rechazo de las definiciones impredicativas (esto es, aquellas definiciones que encierran un círculo vicioso del tipo que apuntara Poincaré). Esté o no en lo cierto en este punto, lo que incontestablemente ha demostrado es que, en su interpretación más simple, el cálculo de Heyting incluye la totalidad de la lógica clásica, así como que no cabe decir con propiedad que los intuicionistas que aceptan dicha interpretación hayan abandonado el principio de tercio excluso, como no sea en el sentido de no servirse de él para sus propios razonamientos matemáticos.

Se podría, sin embargo, replicar que las fórmulas intuicionistas revisten en todo caso un significado diferente que las fórmulas clásicas de análoga factura y, como ya hemos visto, hay razones para creer que eso es lo que sucede con las fórmulas lógicas de Heyting. Pero de nuevo en este punto tiene Gödel una interesante sugerencia que hacer [37]. Partiendo de las propias indicaciones de los intuicionistas, supone —en el segundo de los trabajos arriba mencionados— que los cuatro signos del cálculo proposicional de Heyting difieren por su sentido de los signos del cálculo clásico, mas que las expresiones que los contienen podrían considerarse como abreviaturas de expresiones más complejas, de acuerdo con el siguiente esquema en el que Δ reviste el sentido de «es demostrable que» mientras el resto de los signos a los que acompaña son los clásicos:

Expresión de Heyting	*Expansión en términos clásicos*
$\neg P$	$\Delta \sim \Delta P$
$P.Q$	$\Delta P.\Delta Q$
$P \vee Q$	$\Delta P \vee \Delta Q$
$P \supset Q$	$\Delta P \supset \Delta Q$

[36] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, § 87, y A. Heyting, *Intuitionism, An Introduction*, pp. 112-14.

[37] Cf. asimismo J. C. C. McKinsey y A. Tarski, "Some Theorems about the Lewis and Heyting Calculi", *The Journal of Symbolic Logic*, XIII (1948), pp. 1-15. La interpretación aquí expuesta es la segunda de las sugeridas por Gödel.

El resultado de ello es que todos los axiomas de Heyting se convierten, una vez expandidos, en un sistema que sólo difiere del sistema modal S4 de Lewis por su uso de «demostrable» en lugar de «necesario». Más aún, la tesis rechazada por Brouwer bajo el nombre de «principio de tercio excluso» resulta ser ahora una versión del principio de reducción en sentido fuerte. Pues su forma expandida habrá de ser $\Delta p \vee \Delta\Delta \sim \Delta p$, que equivale, en efecto, a $\sim \Delta p \supset \Delta \sim \Delta p$. Bajo la interpretación sugerida es fácil comprender por qué Brouwer afirma que la tesis rechazada resulta equivalente al principio de la resolubilidad de todos los problemas matemáticos, así como por qué se apresta a rechazarla. Pues ni siquiera todos cuantos aceptan el principio fuerte de reducción de la lógica modal ordinaria sostendrían que este último les parezca tan intuitivamente obvio como el de tercio excluso propiamente dicho; y, de acuerdo con la interpretación sugerida, la tesis rechazada no tendría que ver con la necesidad de la lógica modal ordinaria sino con la demostrabilidad mediante métodos constructivos en el dominio de la matemática.

La idea básica del intuicionismo es que la seguridad en el dominio de la matemática debiera de buscarse únicamente en la aceptación de pruebas constructivas, lo que abona la interpretación del cálculo de Heyting como una teoría axiomática de la noción de susceptibilidad de prueba (*provability*) por tales métodos constructivos. Así entendido, su programa resulta harto aceptable; pues, ciertamente, nadie desea sostener que toda conjetura matemática sea o bien demostrablemente verdadera o bien demostrablemente indemostrable por métodos constructivos. Mas, de acuerdo con esta interpretación, el cálculo de Heyting no sería un sistema de lógica en sentido estricto, ya que está lejos de fijar el significado de los signos lógicos que intervienen en su formulación desarrollada. Por el contrario, dicho cálculo presupone un cálculo clásico de la lógica y sólo ha podido ser erróneamente tomado por una lógica alternativa en virtud de la desafortunada inclinación de los intuicionistas a hablar de los teoremas como si se tratara de enunciados de que algo es susceptible de prueba. Nada hay en contra de la posibilidad de teoremas acerca de la susceptibilidad de prueba de otros teoremas, pero también tendrá que haberlos que no sean de este género por más que envuelvan nociones lógicas tales como las de condicionalidad y universalidad.

En la práctica, quienquiera que decida no aceptar en la matemática otras pruebas que pruebas constructivas podría verse obligado a rechazar las argumentaciones que se sirven del principio de tercio excluso a propósito de conjuntos infinitos (a saber, si no logra explicar la insatisfacción que le produce toda argumentación no-constructiva a la manera sugerida por Gödel). Pero, en tal caso, debiera contentarse con advertir que tales argumentaciones no gozan del respaldo intuitivo que por su parte considera necesario.

4. El programa metamatemático hilbertiano.

En el año 1908, en que Russell publicaba su primera versión de la teoría de los tipos y Brouwer se pronunciaba por vez primera contra la fiabilidad de los principios de la lógica, presentó E. Zermelo un repertorio

de axiomas destinado a salvar de las paradojas a la teoría de conjuntos [38]. Sin dejar de considerar a esta última como el más fundamental de los apartados de la matemática, Zermelo sugería la necesidad de reconstruirla sobre la base de una serie de principios capaces de sostener la doctrina generalmente aceptada, pero elegidos de tal modo que no dieran lugar a contradicciones. A estos efectos, reconocía la imposibilidad de probar la consistencia de sus axiomas, pero alegaba que estos últimos permitían al menos soslayar las antinomias recientemente descubiertas. El rasgo esencial del método propuesto consiste en la restricción de la libertad con que Cantor hablaba de conjuntos, dando entrada en la teoría sólo a aquellos conjuntos cuya existencia se halle garantizada por sus propios axiomas.

En primer término, Zermelo establece en su Axioma de Determinación (I) la identidad de dos conjuntos si cualquier cosa que sea un miembro de uno de ellos es asimismo un miembro del otro. A continuación, asegura mediante un cierto número de axiomas la derivación de una serie de conjuntos a partir de otros asumidos como dados. Así, en su Axioma de Selección (III) estipula que, si hay una propiedad tal que quepa determinar para todo miembro de un conjunto S si dicho miembro la posee o no, existe un segundo conjunto cuyos miembros son aquellos miembros de S que poseen la citada propiedad; en su Axioma del Conjunto-Potencia (IV) que, para cualquier conjunto S, existe un segundo conjunto cuyos miembros son todos los subconjuntos de S; y en su Axioma del Conjunto-Unión (V) que, para cualquier conjunto S existe un segundo conjunto cuyos miembros son todos los miembros de los miembros de S. Estos tres últimos axiomas corresponden todos ellos a supuestos implícitos en Cantor, pero Zermelo añade a la colección un nuevo supuesto de su cosecha, al que bautiza como Axioma de Elección (VI), de acuerdo con el cual, para todo conjunto S cuyos miembros sean conjuntos mutuamente excluyentes y por igual distintos del conjunto nulo, existe al menos un subconjunto de su conjunto-unión que contiene un miembro, y sólo uno, de cada uno de los miembros de S. La independencia de este último axioma, e incluso su propia admisibilidad, han sido objeto de enconados debates por patre de los matemáticos posteriores. Finalmente, y dado que ninguno de los axiomas mencionados hasta aquí garantiza *incondicionalmente* la existencia de ningún conjunto, Zermelo establece en su Axioma de los Conjuntos Elementales (II) y su Axioma de Infinitud (VII) que, en el dominio de los conjuntos, existe por lo menos un conjunto que tiene por miembro al conjunto nulo y se halla construido de manera que la inclusión en él de cualquier miembro A implica asimismo la inclusión de la clase unitaria $\{A\}$ correspondiente, esto es, la clase de la que A es el único miembro. De este modo, para expresarnos sin demasiadas precisiones, todos los conjuntos requeridos por su presentación axiomática de la teoría habrán sido generados de un modo u otro a partir del conjunto nulo, quedando la infinitud asegurada por un procedimiento semejante al de Frege. En la teoría de Zermelo no hay distinción de tipos, pero se evitan las contradicciones conocidas considerando permisibles sólo aquellos conjuntos que *no* sean *demasiado vastos*. En particular, el dominio (*Bereich*) de los conjuntos no puede, a su vez, ser admitido como un nuevo conjunto. Pero J. von Neumann, que por su parte ha

[38] "Über die Grundlagen der Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, LXV (1908), pp. 261-81.

presentado un repertorio revisado de axiomas para la teoría de conjuntos, arguye de manera concluyente que la admisión de conjuntos de la citada dimensión no entraña riesgo alguno adicional siempre que ninguno de ellos sea tan vasto como el conjunto de todo cuanto pueda ser un *miembro* de un conjunto [39].

Aparte de por la circunstancia de no incorporar distinciones de tipos, la versión zermeliana de la teoría de conjuntos difiere de la de Whitehead y Russell por el papel que asigna a los axiomas. En los *Principia Mathematica*, los axiomas se consideran todos ellos verdades necesarias y el edificio entero de la teoría es concebido por sus autores al estilo como Euclides concebía sus *Elementos*. Es decir, nada hay en aquella obra que sugiera la posibilidad de alguna alternativa, como no sea la de un sistema con idéntico contenido en el que algunos de los que ahora ofician como axiomas aparezcan como teoremas y viceversa. Cierto es, por otra parte, que Russell abrigaba más de un recelo acerca de sus axiomas de reducibilidad e infinitud, pero seguía pensando a pesar de ello que, de haber una razón para aceptar esos axiomas, habría que aceptarlos a título de verdades, acumulando por su parte toda suerte de alegatos tendentes a recabar del lector su aceptación o, por lo menos, a propiciar su buena disposición hacia los mismos. No cabe duda que a Zermelo le interesaba asimismo la plausibilidad de sus axiomas, pero tendía más bien a presentarlos como un geómetra moderno podría hacerlo con el repertorio de axiomas de una geometría no-euclidiana. Si los axiomas en cuestión son consistentes, se bastan y se sobran por sí solos para delimitar el sistema sobre el que haya de recaer nuestra consideración y suministrar de este modo una definición implícita del signo de pertenencia que interviene como símbolo primitivo en su formulación.

La noción de definición implícita se remonta a Gergonne, pero la importancia cobrada por la axiomática formal —en cuanto diferente de lo que cabría llamar la axiomática material— en el moderno pensamiento matemático se debe en buena parte a la obra de Hilbert. En sus *Grundlagen der Geometrie* de 1899, Hilbert presentaría el primer repertorio de axiomas realmente satisfactorio para la geometría euclidiana, avanzando —en un trabajo de 1904 sobre los fundamentos de la lógica y la matemática— un programa para la eliminación sistemática de las paradojas recientemente descubiertas a través de la axiomatización de la lógica, la aritmética, el análisis y la teoría de conjuntos [40]. Por su parte no creía que la aritmética pudiera reducirse a la lógica, sino más bien que una y otra debieran ser conjuntamente desarrolladas en orden a facilitar la demostración de que el sistema en su totalidad se halla libre de inconsistencia. El trabajo en cuestión no es sino un esbozo, pero revela ya algunos de los principios rectores de la obra hilbertiana y en particular aquella fe en el método axiomático que habría de alcanzar expresión consumada en su obra posterior y especialmente en un trabajo de 1922:

---

39 "Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, CLX (1929), pp. 227-41. En algunas obras posteriores, como por ejemplo la *Axiomatic Set Theory* de P. Bernays y A. Fraenkel, el término "conjunto" se reserva para las entidades susceptibles de pertenencia, usándose de "clase" en un sentido más amplio.

40 "Über die Grundlagen der Logik und Mathematik, *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg* (1904), pp. 174-85.

«El método axiomático se ha convertido hoy, y para siempre, en el instrumento adecuado de la mente humana, indispensable para toda investigación exacta cualquiera que pueda ser su campo de aplicación. Se trata de un método lógicamente inexpugnable al tiempo que fructífero. Y deja asimismo al investigador la más completa libertad de movimiento. Proceder axiomáticamente, en este sentido, no es sino discurrir con pleno conocimiento de lo que se está haciendo. En otras épocas en las que no se hacía uso del método axiomático, los hombres ejercitaban en diversos dominios su capacidad de creer con un ingenuo dogmatismo. La axiomática pone término a semejante *naïveté*, permitiendo no obstante conservar lo positivo de la creencia» [41].

Donde más claramente cabe hallar la explicación de la última frase que acaba de citarse, así como de la motivación que hubo de inspirar básicamente la aportación de Hilbert a la fundamentación de la matemática, es en su ensayo «Ueber das Unendliche» de 1926 [42]. Nos dice en él que el papel del infinito en matemáticas es el de una Idea de la Razón en la filosofía kantiana: a saber, el de trascender toda experiencia al tiempo que de algún modo la completa. Es decir, la teoría del infinito actual difiere radicalmente de la matemática constructiva, mas no por ello habremos de rechazarla. Por el contrario, deberemos darle la bienvenida como «la más admirable floración del espíritu matemático», poniendo el mayor cuidado intelectual en tratar de preservarla. En pocas palabras, «no debemos dejar que nadie nos expulse del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.» Estas observaciones se dirigen inequívocamente contra Brouwer, dirección ésta a la que apunta la ulterior declaración del mismo artículo en el sentido de que todo problema matemático es resoluble. Mas, pese a todo ello, Hilbert coincide con Brouwer en la primacía concedida a la intuición y la argumentación constructiva. En su opinión, el razonamiento matemático básico —que llama *finitista*— consiste en una especie de «reflexión directa acerca de un contenido que procede sin presupuestos axiomáticos y por medio de experimentos mentales sobre objetos imaginados en toda su concreción», así como haciendo uso de la inducción matemática o argumentación por recurrencia a la que Poincaré atribuía la suprema importancia [43]. En lo que difiere de Brouwer es en su convicción de que la matemática clásica, con sus teoremas «ideales» inalcanzables por métodos finitistas, podría no obstante ser conservada como una valiosísima conquista si cupiera probar mediante la argumentación de carácter finitista la consistencia de los axiomas a partir de los cuales resulta aquélla derivable. Su programa ha sido descrito como un plan destinado a la reducción al absurdo del intuicionismo estricto [44], mas la finalidad que se persigue en él no es meramente de índole polémica. Por el contrario, la necesidad de servirse de métodos intuicionistas en orden a probar la consistencia de la aritmética clásica surge para Hilbert de la naturaleza misma del problema.

Un sistema que haya de resultar suficiente para permitir la derivación de la teoría de números, el análisis clásico y la teoría de conjuntos habría de contener no solamente las reglas y axiomas del cálculo restringido de

---

41 "Neubegründung der Mathematik", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, I (1922), pp. 157-77.

42 "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, XCV (1926), pp. 161-90.

43 D. Hilbert y P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I, p. 20.

44 J. von Neumann, "Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift*, XXVI (1927), pp. 1-46.

funciones proposicionales, sino asimismo los axiomas fregeanos de identidad, axiomas numéricos como los de Peano y axiomas de pertenencia del estilo de los de Zermelo (o, en cualquier caso, axiomas de potencia equivalente a la de todos ellos). Hilbert no considera razonable llamar lógica a toda esta amalgama, pero está claro que el nombre es lo de menos y ni siquiera importa demasiado que los axiomas en cuestión hayan de ser independientes. Lo esencial en este punto es acreditar como consistente al sistema en su conjunto, tarea ésta para la que resultan inservibles los procedimientos al uso. Ya que el sistema se destina a ocuparse de las propiedades de conjuntos actualmente infinitos, no es posible suministrar una prueba absoluta de su consistencia produciendo un conjunto de objetos cuyas relaciones satisfagan todas las condiciones estipuladas en los axiomas. Pues aunque la noción matemática de continuidad haya venido originariamente sugerida por la reflexión acerca de la continuidad en el mundo perceptible, no tenemos ninguna garantía de que los requisitos de la noción matemática sean exhaustivamente satisfechos por algún intervalo espacial o temporal perceptiblemente continuo ni hay ningún otro dato de experiencia en que quepa buscar un conjunto actualmente finito de elementos. Por otra parte, tampoco nos es dado ofrecer una prueba relativa de la consistencia de nuestro repertorio axiomático a base de mostrar la posibilidad de traducirlo a enunciados de algún otro sistema, tal y como los enunciados de la geometría no-euclidiana son traducibles a enunciados de la geometría euclidiana. Pues no hay otro sistema de reconocida consistencia lo suficientemente comprensivo como para permitir dicha traducción [45]. Pero acaso se pueda alcanzar ese objetivo por un otro camino. Decir que el sistema es consistente es decir que la aplicación de las reglas de inferencia a los axiomas nunca podría llevar a un par de consecuencias tales que una de ellas constituya la negación de la otra. ¿Y no sería posible probar esto procediendo al efecto a razonar a un nivel superior, esto es, a razonar no dentro del sistema sino más bien acerca de este último o, más estrictamente, acerca de las fórmulas por medio de las cuales se expresa el sistema? Las fórmulas axiomáticas son finitas en número y una derivación a partir de ellas se habrá de hacer por medio de un número finito de reglas y en un número finito de pasos, por lo que no sería en principio absurdo suponer que la prueba de consistencia requerida sea asequible a través de métodos finitistas de argumentación. Pues así como éstos resultan suficientes en la teoría numérica elemental para probar la imposibilidad de hallar dos números naturales m y n tales que $m^2=2n^2$, de la misma manera podrían ser suficientes —en la nueva disciplina bautizada con el nombre de *teoría de la demostración* o *metamatemática*— para probar la imposibilidad de dar con dos derivaciones que conduzcan de los axiomas iniciales a conclusiones contradictorias.

Desde 1917 en adelante Hilbert trabajó en su proyecto con diversos colegas, publicando con P. Bernays en 1934 y 1939 los dos volúmenes de sus *Grundlagen der Mathematik*, que dan cuenta de la situación y resultados de la investigación hasta la fecha de su publicación. Los autores admiten en esta obra que se hallan aún lejos de una solución al problema

[45] D. Hilbert y P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I, pp. 14 y ss. Véase, no obstante, la conjetura de Kleene y Heyting mencionada en la última sección.

fundamental, y dentro de poco tendremos ocasión de ver que no faltan razones para considerar que ese problema nunca podría ser definitivamente resuelto tal y como se hallaba originariamente planteado. Mas de lo que no hay duda es de que la investigación iniciada por Hilbert se ha revelado extremadamente fecunda. Pues, aparte del problema de la consistencia, hay otras muchas cuestiones relativas a la teoría de los sistemas deductivos para las que la técnica de Hilbert resulta la apropiada, como sucede en especial con las cuestiones de la completud de los sistemas axiomáticos y de la posibilidad de arbitrar procedimientos de decisión para la resolución de problemas en diversas ramas de la matemática. En todas estas investigaciones es esencial que la teoría investigada admita su formalización con la ayuda de un simbolismo lógico estricto, lo que da a la postre pie para decir que la obra de Leibniz y de Frege ha prestado una importante contribución al progreso de la matemática, aunque acaso no en la dirección que sus autores esperaban.

En ocasiones, la filosofía hilbertiana de la matemática recibe el apellido de formalista; y, así como los formalistas del siglo pasado fueron atacados por Frege, Brouwer reprocha ahora a Hilbert el haber pasado por alto el verdadero *contenido* de la matemática. Los oponentes de Frege sostenían la posibilidad de introducir nuevas especies numéricas por medio de definiciones creativas, de suerte que —con sólo que esas definiciones no conduzcan a ninguna contradicción— carecería de objeto pedir ulterior prueba de la existencia de los números. A lo que Frege replicaba que no habría otro modo de probar la ausencia de contradicción que a través de la exhibición de un ejemplo, en tanto la inferencia inversa constituiría una falacia. Hilbert arguye por su parte que la consistencia de un sistema de postulados podría ser establecida sin necesidad de exhibir un modelo de este último. A lo que Brouwer replica por la suya que el intuicionismo se ahorra una inconsistencia al excluir la aplicación del principio de tercio excluso en el dominio de los conjuntos infinitos; y que, aun si Hilbert hubiera tenido éxito en su empresa, nada habría conseguido en orden a acreditar la verdad de sus enunciados «ideales», dado que hay un círculo vicioso en el intento de justificar la matemática formalista a través de la prueba de su consistencia. De acuerdo con ese intento, se nos pide, en efecto, que aceptemos la corrección de un sistema de postulados una vez demostrado que estos últimos no conducen a ninguna contradicción; pero tal justificación carecería, según Brouwer, de valor a menos de haber aceptado previamente el principio de que la corrección de una proposición se sigue del absurdo de su absurdo, lo que no es sino otra versión del principio de tercio excluso [46]. En su opinión, una teoría no tendría más derecho a ser considerada verdadera por el hecho de haberse acreditado como libre de inconsistencia que el que tendría un malhechor a ser considerado una persona honrada por el hecho de que no haya manera de castigar su delito de acuerdo con la legislación vigente en el país. Como Fraenkel ha escrito:

«Para el partidario convencido de la axiomática, la cuestión planteada por Hilbert representa el problema fundamental de toda la matemática y su posible solución

[46] "Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie, Phys.-math. Klasse*, 1928, pp. 48-52.

sería considerada como uno de los más intrépidos, originales y decisivos pasos en el tratamiento del problema del conocimiento; pero, para el intuicionista convencido, todo ello resulta irrelevante en relación con el único aspecto del problema que según él reviste importancia» [47].

La disputa entre intuicionismo y formalismo resulta una disputa harto curiosa en que ambas partes dan a veces la sensación de enzarzarse en un diálogo de sordos. Brouwer habla como si Hilbert estuviera tratando de probar la verdad de sus axiomas, y por ende de cuanto de ellos se derive, a través de la prueba de su consistencia. Mas, cuando Hilbert emprende la tarea de axiomatizar el cuerpo entero de la matemática, concibe a sus axiomas con toda probabilidad a título de postulados que determinan el sentido de los símbolos usados, que de otro modo quedarían indefinidos. Si ello es así, una entidad matemática no sería para Hilbert ni más ni menos que lo que sus axiomas le permitan que sea, con lo que todo enunciado matemático habría de detentar un estatuto idéntico al de los enunciados de la geometría pura, cual es el caso por ejemplo de la aserción de que la suma de los ángulos de un triángulo riemanniano excede de dos rectos. Así interpretada, la matemática axiomatizada de Hilbert no se hallaría ya expuesta a las objeciones de Brouwer. Pues quienquiera que hablase de números reales a la manera como propone Hilbert se serviría de la expresión «número real» para designar cualquier objeto que satisfaga una serie de condiciones inicialmente estipuladas, de suerte que sus enunciados equivaldrían a la aserción de que dichos axiomas entrañan tales o cuales consecuencias en virtud de su forma. Con otras palabras, se trataría de verdades puramente lógicas. Pero, por otra parte, no está claro si Hilbert se siente o no realmente satisfecho con semejante conclusión y ni siquiera sabemos con exactitud qué es lo que piensa en última instancia acerca de las relaciones entre su matemática axiomatizada y la matemática constructiva. A veces produce la impresión de que, una vez rematada la prueba de la consistencia de sus axiomas por métodos constructivos, estaría bien dispuesto a olvidarse de la diferencia entre ambas y a tratar a la matemática no-constructiva como una continuación de la matemática constructiva. Pero difícilmente podría ser ésta la actitud correcta a adoptar si tanto Brouwer como él están en lo cierto al pensar que la matemática constructiva envuelve algún conocimiento intuitivo de un específico contenido. Pues no parece que haya la menor garantía de que los teoremas demostrados sin recurrir a esa intuición versen acerca del mismo contenido. Así, un teorema que pretenda referirse a los números naturales, pero sea objeto de una demostración no-constructiva (por ejemplo, por medio de un rodeo a través del análisis clásico), pudiera no versar en realidad acerca de los números naturales en su sentido originario. Esto parece ser lo que Heyting tiene *in mente* cuando afirma que el objeto de la matemática intuicionista —a saber, el pensamiento matemático constructivo— «la sitúa a un lado y no en el interior de la matemática clásica, que se ocupa de otra cosa, cualquiera que su naturaleza pueda ser» [48].

Como ya hemos apuntado, hay razones para creer que el programa hilbertiano no pueda nunca ser completamente consumado, pero el es-

47 *Einleitung in die Mengenlehre*, p. 381.
48 *Intuitionism, An Introduction*, p. 4.

tímulo aportado por ese programa a la investigación de la axiomática ha conducido a algunos descubrimientos sumamente interesantes acerca de las propiedades de la lógica y otros diversos sistemas deductivos. De ellos habremos de ocuparnos en nuestro próximo y último capítulo.

XII. LA TEORIA DE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS

1. La metateoría de la lógica primaria.

En 1926, P. Bernays, uno de los colaboradores de Hilbert, publicó una investigación sobre la axiomatización del cálculo de proposiciones en los *Principia Mathematica* [1]. La mayor parte de los resultados allí expuestos habían sido obtenidos ocho años atrás cuando compuso su *Habilitationsschrift* (en la que se ocupaba asimismo de la posibilidad de reemplazar axiomas por reglas de inferencia), pero algunos de ellos habían sido entretanto dados a conocer por E. L. Post, que había llegado independientemente a descubrirlos en el curso de su investigación sobre las propiedades de las tablas de verdad [2]. Nosotros ya sabemos por un capítulo anterior que las tres cuestiones más importantes que pueden suscitarse en torno a un conjunto dado de axiomas son las de su consistencia, independencia y completud; y en esta sección vamos a ver cómo cabría atender a ellas por referencia a la axiomatización del cálculo proposicional de los *Principia Mathematica*.

Tal vez pueda pensarse que resulta superfluo tratar de probar la consistencia de los axiomas y reglas de inferencia propuestos por Whitehead y Russell para su lógica primaria (llamada por ellos teoría de la deducción), toda vez que cada uno de esos axiomas y reglas aparece presentado con una explicación que lo hace aceptable por sus propios méritos. Pero la posibilidad de probar la consistencia de un sistema axiomatizado sin acudir para nada a la interpretación usual del mismo es importante desde el punto de vista del programa formalista, revistiendo interés el comprobar cómo puede llevarse a cabo dicha prueba en un sencillo caso a propósito del que Brouwer y los intuicionistas dirían que estamos ya en peligro de dejarnos extraviar por nuestra tradición lógica. Antes de nada, sin embargo, es menester poner en claro lo que se ha de entender por «consistencia» en este contexto. Por lo pronto, no basta con decir que los axiomas no han de contradecirse mutuamente en cuanto a su sentido, pues de lo que se trata ahora es de abordar la cuestión en términos formalistas. Aparte de lo cual, la consistencia que aquí nos interesa no es una propiedad del conjunto de los axiomas exclusivamente considerados, sino más bien del sistema constituido por estos últimos y las reglas de inferencia. Lo que se desea demostrar es que los procedimientos de sustitución y separación permitidos dentro del cálculo nunca podrían llevar de los axiomas

$(p \vee p) \supset p$	*Taut*
$q \supset (p \vee q)$	*Adic*
$(p \vee q) \supset (q \vee p)$	*Perm*
$[p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$	*Asoc*
$(q \supset r) \supset [p \vee q) \supset (p \vee r)]$	*Sum,*

1 "Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der Principia Mathematica", *Mathematische Zeitschrift*, XXV (1926), pp. 305-20.

2 "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", *The American Journal of Mathematics*, XLIII (1921), pp. 63-185.

en los que una expresión de la forma $P \supset Q$ se entenderá como abreviatura de una expresión de la forma $\sim P \vee Q$, a un par de fórmulas relacionadas entre sí como lo están P y $\sim P$. Esta caracterización de la noción de consistencia incorpora el requisito de que no haya dos axiomas mutuamente relacionados de la manera indeseable, dado que cualquiera de ellos podría ser obtenido trivialmente a partir de sí mismo mediante una sustitución idéntica (esto es, una sustitución que deje inalterado el axioma originario); pero en rigor comprende más que todo eso, equivaliendo de hecho a la afirmación de que el cálculo es consistente si, y sólo si, hay *alguna* fórmula que *no* puede obtenerse dentro de él. Pues si, en efecto, cupiese derivar a la vez P y $\sim P$, sería entonces posible —en virtud de una argumentación como la ofrecida por el Pseudo-Escoto— derivar asimismo cualquier fórmula Q.

Una vez puesto en claro cuál es nuestro objetivo, consideremos ahora cómo podríamos alcanzarlo. Es obvio que no podemos examinar una por una todas las derivaciones susceptibles de construcción dentro del cálculo, ya que su número es ilimitado; pero podríamos tratar de probar lo que buscamos a través de una reflexión acerca de los rasgos generales de toda derivación. Ahora bien, decir que es posible alcanzar una determinada fórmula por medio de una serie de pasos permisibles a partir de un conjunto de axiomas dado es decir algo acerca de ese cálculo sin referirlo a ninguna interpretación en especial, por lo que la aserción valdría igualmente bien para todas las interpretaciones satisfactorias y cabría refutarla mostrando una interpretación para la que resulte patentemente falso afirmar que la fórmula en cuestión es derivable de los axiomas iniciales. En este contexto, sin embargo, una interpretación será satisfactoria si, y sólo si, los elementos que admite como posibles valores de las variables p, q, r, etcétera, constituyen un grupo [3], pongamos por caso G, para el que quepa definir una operación monaria y otra binaria, respectivamente representadas por $\sim$ y $\vee$, de modo tal (I) que G quede cerrado por respecto a esas operaciones —esto es, que la aplicación repetida de estas últimas a sus elementos no nos conduzca nunca fuera de G—, (II) que todos los axiomas reciban valores marcados como preferentes —esto es, valores integrantes de un subgrupo propio de G, pongamos por caso G *—, y (III) que si, cualesquiera dos elementos representados por P y $\sim P \vee Q$ corresponden ambos a G *, también lo haga así el elemento representado por Q. En la acostumbrada interpretación propuesta por Whitehead y Russell, tendríamos que G = {verdad, falsedad} y G * = {verdad}, en tanto $\sim$ revestiría el sentido de la negación y $\vee$ el de la disyunción. Mas, si gustáramos, podríamos estipular que G = {0,1}, G* = {0}, $\sim P = 1 - P$ y $P \vee Q = P \times Q$, donde las fórmulas no serían ya proposicionales sino numéricas y la derivación tampoco constituiría por más tiempo una inferencia sino se trataría simplemente del tránsito de un signo numérico a otro de acuerdo con ciertas reglas. La segunda interpretación se asemeja al álgebra booleana de 0 y 1, aunque con 0 en vez de 1 como valor preferente y la multiplicación en lugar de la adición como correlato de la disyunción. Con el

[3] El empleo de este término por parte de Bernays no ha de entenderse en el sentido de que la clase de los valores satisfaga todas las condiciones de la teoría matemática de grupos.

fin de evitar toda posible confusión con las nociones de costumbre, consideremos a continuación qué es lo que puede hacerse con este esquema numérico.

Aplicando la definición del signo de herradura y sirviéndonos de las ecuaciones antes expuestas para determinar el sentido de los signos $\sim$ y $\vee$, podremos comprobar que todos los axiomas del cálculo poseen el valor preferente, cualesquiera que sean los valores del grupo $\{0,1\}$ que quepa asignar a las variables que intervienen en ellos. Así tendremos, por ejemplo, $(p \vee p) \supset p = \sim(p \vee p) \vee p$, que para $p=0$ quedaría reducido a $\sim(0 \vee 0) \vee 0 = [1-(0 \times 0)] \times 0 = 0$ y para $p=1$ vendría nuevamente a reducirse a $\sim(1 \vee 1) \vee 1 = [1-(1 \times 1)] \times 1 = 0$. Más aún, es evidente que ni la sustitución ni la separación podrían llevarnos de un axioma o axiomas del cálculo a una fórmula en posesión del valor 1. Pues ya que cada axioma posee el valor 0, cualesquiera que puedan ser los valores asignados a las variables que intervienen en él, toda fórmula derivada de un axioma por sustitución de sus variables habrá de retener idéntico valor en igualdad de condiciones. Y, por lo demás, está garantizado ya que cuando P y $\sim P \vee Q$ posean ambas el valor 0, la fórmula Q habrá asimismo de poseer dicho valor: para expresarlo con detalle, $0 = \sim P \vee Q = (1-0) \times Q = Q$. Pero estos resultados son suficientes de por sí para establecer la consistencia del cálculo. Pues, de acuerdo con la interpretación que estamos considerando, todas las fórmulas derivables dentro del cálculo habrán de detentar el valor 0, siendo así imposible que ningún par de dichas fórmulas se relacionen entre sí como P y $\sim P$, cuyos valores han de ser necesariamente diferentes bajo la interpretación considerada.

Esta prueba reviste el gran mérito de su independencia respecto de la interpretación ordinaria para la que Whitehead y Russell diseñaron su cálculo, pero el empleo de numerales envuelto en ella pudiera acaso dar lugar a malentendidos. En primer lugar, cabría tal vez pensar que la argumentación precedente se reduce a una prueba relativa de consistencia sobre la base de una interpretación de los axiomas lógicos dentro de la aritmética. Esta creencia sería errónea, puesto que los axiomas de la lógica proposicional no han sido transformados en *enunciados* de la aritmética, sino tan sólo en meros signos numéricos de suerte que el razonamiento subsiguiente difiere *toto coelo* de aquel mediante el cual cabría demostrar la consistencia de un sistema geométrico basándonos en la ausencia de contradicción en la aritmética (si ello pudiera, a su vez, ser demostrado). A pesar de todo, algunos estudiosos de la lógica se han dejado extraviar, al parecer, por esta falsa analogía. En segundo lugar, e incluso si lográramos escapar a este peligro, podríamos incurrir quizás en el error de suponer que la introducción de números como valores de variables es esencial para la construcción de una prueba como la antes expuesta. Pero lo único que importa en esta última es el número de los valores elegidos y la manera como éstos se hallan conectados, esto es, la *estructura* de la interpretación, lo que permitiría —si fuera ése nuestro gusto— reformular la prueba en términos tales que para nada envuelvan referencia a ningún género especial de entidades del tipo de los números sino tan sólo a un grupo de valores que satisfagan ciertas condiciones formales. Así, podríamos es-

tablecer que $G=\{\alpha,\beta\}$ y $G^*=\{\alpha\}$ sin especificar α y β más que por medio de las ecuaciones:

$$\sim\alpha=\beta, \quad \sim\beta=\alpha,$$
$$\alpha \vee P = P \vee \alpha = \alpha, \quad \beta \vee \beta = \beta.$$

Este fue, de hecho, el recurso empleado por Bernays en el artículo arriba mencionado. En lo que sigue nos serviremos de él, con la única innovación por nuestra parte de compendiarlo mediante una matriz como la de la adjunta tabla, en la que se asigna un asterisco al símbolo del valor preferente en la primera de sus intervenciones:

$\vee$	α β	$\sim$
$*\alpha$	α α	β
β	α β	α

En el curso de su investigación de la independencia de los axiomas del cálculo proposicional de los *Principia Mathematica,* Bernays descubrió que era posible derivar la tesis que Whitehead y Russell llamaron asociativa (*Asoc*) de los cuatro axiomas restantes, lo que acreditaba su redundancia. Como es de suponer, dicha derivación está lejos de resultar sencilla; pero no envuelve ninguna novedad de principio, toda vez que se halla construida dentro del propio cálculo. La prueba de que cada uno de los otros cuatro axiomas resulta independiente de los demás es, en cambio, harina de otro costal. Pues, en efecto, lo que hay que demostrar ahora en cada caso es que los pasos permitidos por el cálculo no nos podrían llevar nunca de tres fórmulas dadas a una cuarta, para lo que no nos es dado proceder a examinar todas las posibles derivaciones a partir de las tres primeras fórmulas. Pero así como cabe demostrar que los axiomas de un sistema geométrico son independientes valiéndonos para ello de una extensión de la técnica de interpretación utilizada en la prueba de su consistencia, de la misma manera cabría probar la independencia de uno cualquiera de nuestros cuatro axiomas respecto de los otros tres construyendo al efecto una matriz o grupo apropiado para estos últimos. Un ejemplo contribuirá a aclarar en qué consiste dicho método.

Supóngase que estamos tratando de probar la independencia de *Taut* respecto de *Adic, Perm* y *Sum.* Nuestro objetivo quedaría conseguido si pudiéramos construir una matriz que satisfaga las siguientes condiciones: (1) que los elementos constituyan un grupo cerrado por lo que se refiere a las operaciones representadas por los signos primitivos; (2) que, bajo la interpretación —o esquema interpretativo— especificado por la matriz, las fórmulas *Adic, Perm* y *Sum* reciban un valor preferente, cualesquiera que sean los valores asignados a las variables que intervienen en ellos; (3) que los elementos se hallen dispuestos en la matriz de modo que, si P y $\sim P \vee Q$ poseen ambas un valor preferente, también lo posea Q, de donde resultará que todas las fórmulas derivables de los tres axiomas que se acaban de mencionar de acuerdo con los procedimientos admitidos de sustitución y separación poseen un valor preferente; (4) que, bajo la misma interpretación, no siempre corresponda a la fórmula *Taut* un valor preferente. Los tres primeros requisitos no son ni más ni menos que los

que habría que estipular en orden a probar la consistencia del conjunto axiomático integrado por *Adic, Perm* y *Sum* exclusivamente; y el efecto del cuarto será el de asegurar que la matriz constituya un contraejemplo suficiente para probar la imposibilidad de *Taut* a partir de aquel conjunto por medio de las reglas de derivación del cálculo. Las cuatro condiciones se hallan todas satisfechas por el esquema:

∨	$\alpha\ \beta\ \gamma$	~
$*\alpha$	$\alpha\ \alpha\ \alpha$	β
β	$\alpha\ \beta\ \gamma$	α
γ	$\alpha\ \gamma\ \alpha$	γ

en el que *Adic, Perm* y *Sum* poseen siempre un valor preferente, pero no así *Taut*, ya que $(\gamma \vee \gamma) \supset \gamma = \gamma$.

Pruebas análogas de independencia podrían ahora ofrecerse respecto de los otros tres axiomas. Las matrices apropiadas a estos efectos serán:

∨	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$	~
$*\alpha$	$\alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha$	β
β	$\alpha\ \beta\ \beta\ \beta$	α
$*\gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \gamma$	δ
δ	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$	γ

en la que *Taut, Perm* y *Sum* poseen siempre un valor preferente, pero no así *Adic*, ya que $\gamma \supset (\beta \vee \gamma) = \beta$;

∨	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$	~
$*\alpha$	$\alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha$	β
β	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$	α
γ	$\alpha\ \gamma\ \gamma\ \alpha$	α
δ	$\alpha\ \delta\ \delta\ \delta$	γ

en la que *Taut, Adic* y *Sum* poseen siempre un valor preferente, pero no así *Perm*, ya que $(\gamma \vee \delta) = (\delta \vee \gamma) = \delta$;

∨	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$	~
$*\alpha$	$\alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha$	β
β	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$	α
γ	$\alpha\ \gamma\ \gamma\ \alpha$	δ
δ	$\alpha\ \delta\ \alpha\ \delta$	α

en la que *Taut, Adic* y *Perm* poseen siempre un valor preferente, pero no así *Sum*, ya que $(\delta \supset \beta) \supset [(\gamma \vee \delta) \supset (\gamma \vee \beta)] = \gamma$.

Es interesante reparar en que todas las matrices aquí usadas para la prueba de la independencia admiten más de dos valores, admitiendo inclusive una de ellas más de un valor preferente. Pero seía un error creer, como algunos lógicos han hecho, que tales consideraciones avalen la idea de que la propia lógica pudiera ser plurivalente (a menos que ampliemos el ámbito de aplicación del vocablo «lógica» hasta hacerle designar cualquier sistema abstracto originariamente construido sobre la base de una modificación del cálculo de proposiciones). No cabe duda de que el sistema que no contenga, aparte de las reglas de sustitución y separación, otros axiomas que *Adic, Perm* y *Sum* podría ser interpretado —por ejemplo, en la aritmética— de manera que cada variable admita tres valores genuinos; mas en tal caso no cabría considerarlo como un sistema lógico en ninguna acepción usual del término. Mientras que cuando lo consideráse mos como un apartado de la lógica en sentido ordinario, habría que interpretarlo de manera que *Taut* resulte necesario aunque independiente. En resumidas cuen-

tas, pues, las letras griegas de las matrices plurivalentes que se acaban de exponer no representan valores proposicionales de verdad.

Aparte de su importancia para la metalógica, las precedentes pruebas de consistencia e independencia para una determinada versión del cálculo de proposiciones revisten interés por ilustrar de modo claro y simple cómo cabe hacer uso de la noción de modelo o interpretación en la investigación de las propiedades de un sistema deductivo. En lugar de decir que las fórmulas iniciales de un cálculo implican una fórmula consecuencial si, y sólo si, es imposible que las primeras sean verdaderas sin que la última lo sea también, podríamos decir ahora que las fórmulas iniciales implican la fórmula consecuencial si, y sólo si, la última es satisfecha por todas las interpretaciones que satisfagan la primera. Como nosotros ya hemos visto, este modo de enfocar la cuestión presenta el mérito de permitir la elaboración de pruebas de independencia a base de la construcción de contraejemplos, pero pudiera dar lugar a más de una perplejidad. En tanto que nos ocupemos de fórmulas en las que en todo momento se atribuya a algunos signos, en especial los de la lógica, un sentido fijo e invariable, no nos será difícil entender lo que se quiere decir con la aserción de que una interpretación dada satisface una fórmula. En geometría decimos, por ejemplo, que un postulado es satisfecho por una cierta interpretación de sus signos extralógicos si dicha interpretación lo convierte en un enunciado verdadero. Mas cuando, como sucede ahora en nuestra investigación del cálculo de proposiciones, hayamos de considerar a *todos* los signos que intervienen en nuestras fórmulas como susceptibles de interpretación y reinterpretación, estará lejos de resultar obvio lo que quiere decirse cuando se habla de la satisfacción de una fórmula. Si, como en uno de los ejemplos antes considerados, una interpretación convierte a una fórmula en una designación numérica más bien que en una expresión proposicional, es evidente que el resultado no podrá ser un enunciado verdadero. ¿Qué objeto tiene entonces continuar hablando de satisfacción en este contexto? En nuestra exposición de las pruebas conseguíamos rehuir esta dificultad mediante una definición *ad hoc* de interpretación satisfactoria, pero parece deseable abordar la cuestión en términos más generales.

Por más que nos esforcemos en presentar un cálculo de modo completamente abstracto, no tendremos otro remedio que acudir al lenguaje ordinario para especificar que ciertas fórmulas cobran un valor preferente y pueden dar lugar, a lo largo de un determinado proceso, a nuevas fórmulas en posesión de un valor preferente. En pocas palabras, la presentación de un cálculo constituye esencialmente una actividad de segundo orden que requiere de signos que no sean a su vez parte del cálculo. En las obras de Frege, e igualmente en los *Principia Mathematica*, el signo de aserción sirve en la práctica para indicar que lo que sigue se considera un truísmo lógico; y de las reglas de inferencia se dice expresamente que no cabe formularlas en el simbolismo apropiado para la formulación de esos truísmos [4]. Es cierto que podemos, si ése es nuestro gusto, hacer abstracción

[4] La distinción entre reglas y premisas fue puesta en claro por C. L. Dodgson (Lewis Carroll) en "What the Tortoise said to Achilles", *Mind*, N.S., IV (1895), pp. 278-80.

de la noción de verdad, que Whitehead y Russell tomaban por valor preferente en la presentación de su cálculo, y hasta de la noción de proposición, mas todavía habremos de retener la idea de valor preferente y hablar en el lenguaje ordinario de la transmisión de ese valor de unas fórmulas a otras. Así pues, lo que con propiedad puede considerarse satisfecho por una interpretación no son filas de signos vacíos como $(p \vee p) \supset p$, sino más bien postulados de formas tales como «Si p se halla comprendida en G, entonces $(p \vee p) \supset p$ se hallará comprendida en G *».

En un artículo de 1934, E. V. Huntington llamó la atención sobre la parte informal u oficiosa de la teoría de la deducción (esto es, del cálculo de proposiciones) de los *Principia Mathematica*, mostrando la posibilidad de derivar la totalidad de la teoría (que incluye los axiomas y la regla de separación) a partir de los ocho siguientes postulados [5]:

1. Si P se halla comprendida en G y Q se halla comprendida en G, entonces $P \vee Q$ se hallará comprendida en G.
2. Si P se halla comprendida en G, entonces $\sim P$ se hallará comprendida en G.
3. Si P se halla comprendida en G *, entonces P se hallará comprendida en G.
4. Si $P \vee Q$ se halla comprendida en G *, entonces $Q \vee P$ se hallará comprendida en G *.
5. Si P se halla comprendida en G *, entonces $P \vee Q$ se hallará comprendida en G *.
6. Si P se halla comprendida en G y $\sim P$ en G *, entonces P no se hallará comprendida en G *.
7. Si P se halla comprendida en G y $\sim P$ no se halla comprendida en G *, entonces P se hallará comprendida en G *.
8. Si $P \vee Q$ se halla comprendida en G * y $\sim P$ en G *, entonces Q se hallará comprendida en G *.

Para facilitar la comparación hemos retenido en nuestra formulación el simbolismo de los *Principia Mathematica* (del que Huntington no se sirve), pero se ha de sobreentender que no por ello nos obligamos a adoptar la interpretación de Whitehead y Russell, pudiendo en consecuencia sugerir cualquier otra que nos ayude a hacernos cargo de la estructura del sistema determinado por los ocho postulados. El empleo de vocablos castellanos en la formulación de estos últimos comporta naturalmente la presuposición de los principios lógicos ordinarios que hayan de ser utilizados en la derivación de las consecuencias pertinentes, pero ello es inevitable. Pues cuando razonamos acerca del razonamiento no tenemos otro remedio que prestar nuestro reconocimiento a algunos principios, y la cuestión a decidir estriba únicamente en si hemos de adoptar un aparato demostrativo más o menos débil o fuerte. La relativa simplicidad del sistema de postulados de Huntington se debe en buena parte al hecho de admitir no sólo «si» e «y», sino asimismo «no», en el vocabulario castellano del que echa mano para la formulación de sus postulados.

---

[5] "Independent Postulates for the "Informal" Part of *Principia Mathematica*", *Bulletin of the American Mathematical Society*, XL (1934), pp. 127-36.

El conjunto de axiomas propuesto por Whitehead y Russell para el cálculo de proposiciones es completo no sólo en el sentido de resultar suficiente para la prueba de todas las fórmulas necesariamente verdaderas en virtud de su modo particular de combinarse con los signos veritativo-funcionales $\sim$ y $\vee$ (o con signos, como el punto de conjunción, definidos en términos de estos últimos), sino también en el sentido fuerte de desprenderse una contradicción de la adición a los axiomas de cualquier fórmula veritativo-funcionalmente combinada con los signos del cálculo pero no derivable ya a partir de los axiomas. Para la prueba de este teorema metalógico habremos de comenzar por establecer un cierto número de lemas previos.

En primer lugar, probaremos dentro del cálculo los siguientes bicondicionales filónicos (o equivalencias materiales, como de ordinario se les denomina):

$$(1)\ \sim\sim p \equiv p$$

(2) $p \vee p \equiv p$	(3) $p.p \equiv p$
(4) $p \vee q \equiv q \vee p$	(5) $p.q \equiv q.p$
(6) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	(7) $p.(q.r) \equiv (p.q).r$
(8) $p \vee (q.r) \equiv (p \vee q).(p \vee r)$	(9) $p.(q \vee r) \equiv (p.q) \vee (p.r)$
(10) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p.\sim q$	(11) $\sim(p.q) \equiv \sim p \vee \sim q.$

En nuestra lista de equivalencias, (1), (2) y (3) constituyen principios de simplificación por medio de los cuales podrían eliminarse ciertas repeticiones, (4) y (5) son leyes conmutativas que permiten variaciones de orden, (6) y (7) son leyes asociativas que nos autorizan a prescindir de los paréntesis en ciertos casos y escribir si lo deseamos $p \vee q \vee r$ o $p.q.r$, (8) y (9) son leyes distributivas que hacen posible pasar en ciertas circunstancias de una expresión disyuntiva a otra en la que figura el signo de conjunción como conectiva principal, o viceversa, mientras que (10) y (11) son reglas de De Morgan que facilitan la supresión del signo de negación al frente de expresiones complejas. Interpretadas de acuerdo con las instrucciones de Whitehead y Russell, todas ellas son tan obvias que resultaría tedioso proceder a derivarlas de los cuatro axiomas independientes del cálculo. En lo que sigue, por lo tanto, nos ahorraremos las prolijas argumentaciones necesarias al efecto, aunque sin olvidar que es esencial poder llevar a cabo esas derivaciones para la prueba de la completud.

A continuación probaremos que, para cualquier función de verdad $\mathscr{F}$ de un argumento, es permisible aseverar

$$(12)\ (p \equiv q) \supset [\mathscr{F}(p) \equiv \mathscr{F}(q)].$$

Dado que todas las expresiones veritativo-funcionales son reducibles en los *Principia Mathematica* a expresiones que sólo contengan los signos $\sim$ y $\vee$ con letras proposicionales, comenzaremos por probar los tres casos especiales:

$$(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)$$
$$(p \equiv q) \supset [(r \vee p) \equiv (r \vee q)]$$
$$(p \equiv q) \supset [(p \vee r) \equiv (q \vee r)].$$

De nuevo aquí las pruebas han de llevarse a cabo dentro del cálculo sin introducir para ello ningún nuevo principio. Mas cuando pasemos a aseverar (12) en toda su generalidad, sobre la base de que es posible aseverar dicha fórmula para cualquier $\mathscr{F}$ en particular mediante la reiterada aplicación de las tres reglas simples en el orden que pudiera resultar menester para la construcción del complejo teorema, nuestro razonamiento, aunque evidentemente válido, no discurrirá ya dentro del cálculo. La prueba de cada una de las funciones de verdad particulares sí que tendría lugar en el interior de este último, pero no así la prueba de la generalización.

La importancia de (12) radica en permitirnos hacer uso de los principios (1) a (11) para la transformación parcial o total de las fórmulas que nos interesen, haciendo así posible la reducción de cualquier expresión veritativo-funcional a una expresión equivalente en *forma normal conjuntiva*, es decir, a una conjunción de disyunciones en la que cada componente de una disyunción sea o bien un signo proposicional atómico o bien la negación de uno de ellos. A estos efectos se ha de proceder a ejecutar por este orden las tres siguientes operaciones capitales: (I) la eliminación de $\supset$ y $\equiv$ de todas las posiciones que ocupen, haciendo uso para ello de las definiciones acostumbradas; (II) la eliminación de los signos de negación que figuran al frente de los paréntesis, recurriendo para ello a las reglas de De Morgan; (III) la eliminación de los signos de conjunción del interior de los paréntesis, sirviéndonos para ello de la ley distributiva. Pero, además, es menester eliminar las dobles negaciones allí donde éstas aparezcan, siendo posible introducir simplificaciones y reordenaciones cuando ello resulte conveniente. A título de ejemplo de semejante reducción podría considerarse la serie que ahora sigue de expresiones equivalentes, en la que las diversas transformaciones son llevadas a cabo sucesivamente:

$$
\begin{aligned}
(p \supset q) &\equiv (\sim q \supset \sim p)\\
(\sim p \vee q) &\equiv (\sim q \supset \sim p)\\
(\sim p \vee q) &\equiv (\sim \sim q \vee \sim p)\\
(\sim p \vee q) &\equiv (q \vee \sim p)\\
[(\sim p \vee q) \supset (q \vee \sim p)].&[(q \vee \sim p) \supset (\sim p \vee q)]\\
[\sim(\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)].&[(q \vee \sim p) \supset (\sim p \vee q)]\\
[\sim(\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)].&[\sim(q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(\sim \sim p . \sim q) \vee (q \vee \sim p)].&[\sim(q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p . \sim q) \vee (q \vee \sim p)].&[\sim(q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p . \sim q) \vee (q \vee \sim p)].&[(\sim q . \sim \sim p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p . \sim q) \vee (q \vee \sim p)].&[(\sim q . p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p \vee q \vee \sim p) . (\sim q \vee q \vee \sim p)].&[(\sim q . p) \vee (\sim p \vee q)]\\
[(p \vee q \vee \sim p) . (\sim q \vee q \vee \sim p)].&[(\sim q \vee \sim p \vee q) . (p \vee \sim p \vee q)]\\
(p \vee q \vee \sim p) . (\sim q \vee q \vee \sim p) . &(\sim q \vee \sim p \vee q) . (p \vee \sim p \vee q) .
\end{aligned}
$$

Cualquiera que sea la complejidad de la fórmula de que partamos, es obvio que las aplicaciones sucesivas de las operaciones arriba detalladas habrán de conducirnos finalmente a una expresión en la deseada forma normal. La reducción de una expresión veritativo-funcional puede llevarse a cabo en todos y cada uno de los casos particulares sin necesidad de salir del cálculo de proposiciones; mas la generalización que se precisa para

la prueba de la completud habrá de ser establecida, una vez más, desde fuera del cálculo.

En una forma normal conjuntiva pudiera haber distintas expresiones que resulten lógicamente equivalentes todas ellas a una expresión dada; pero ello carece de importancia, puesto que para el argumento que ahora sigue cualquiera de esas expresiones reviste idéntico valor. Si, una vez reducida una expresión veritativo-funcional a una expresión equivalente en forma normal conjuntiva, tuviésemos —como en nuestro anterior ejemplo— que cada una de las disyunciones conjuntas contiene una expresión atómica a la par que su negación, la expresión originaria habrá de ser necesariamente verdadera en virtud de su forma y derivable a partir de los axiomas del cálculo de proposiciones a través de la derivación de su forma normal equivalente. Pues, en efecto, es fácil probar dentro del cálculo (I) la disyunción de cualquier fórmula con su negación, (II) la disyunción de un truísmo así establecido con cualquier otra fórmula que podamos elegir y (III) la conjunción de cualquier número de fórmulas probadas con anterioridad. Pero sería posible ir aún más lejos y aseverar que todo enunciado que, en tanto que función de verdad, sea necesariamente verdadero en virtud de su forma resulta derivable de esa suerte de los axiomas del cálculo proposicional. Pues, si una de las disyunciones de la forma normal conjuntiva correspondiente a un enunciado semejante no contuviera una expresión proposicional atómica a la par que su negación, sería posible que aquella disyunción fuese falsa (por ejemplo, si cada uno de los signos proposicionales no negados en ella fuese falso y cada uno de los negados verdadero). Lo que es tanto como decir que la forma normal en su conjunto podría ser falsa, cosa absurda por demás.

En orden a demostrar que el cálculo de proposiciones de que venimos ocupándonos es completo en sentido fuerte, supóngase que incrementamos el conjunto de axiomas originario con la adición de una fórmula compuesta de variables proposicionales y signos veritativo-funcionales pero no derivable a partir de los axiomas en cuestión. En la forma normal conjuntiva de esta nueva fórmula tendrá que haber al menos una disyunción que no contenga una variable proposicional negada a la par que no negada. Sustituyamos ahora cada una de las letras de esta fórmula disyuntiva que no vaya precedida de un signo de negación por la letra p, sustituyendo por $\sim p$ cada una de las letras precedida de tal signo. Eliminando las dobles negaciones, la nueva disyunción podría ser reducida a $p \vee p \ldots \vee p$, que a su vez resulta reducible a p. En resumidas cuentas, pues, sería posible derivar p de nuestro nuevo conjunto ampliado de axiomas por medio de los procedimientos admitidos en el seno del sistema. Pero un sistema que tolere semejante derivación habrá de resultar contradictorio.

Las pruebas de consistencia, independencia y completud consideradas hasta aquí se referían todas ellas al cálculo de proposiciones presentado por Whitehead y Russell en los *Principia Mathematica;* pero, mediante las oportunas modificaciones, cabría adaptarlas a probar la consistencia, independencia y completud de otras versiones de la lógica proposicional, incluidas aquéllas que sólo envuelven reglas. Como cabía haber esperado, dichas pruebas revisten especial sencillez por lo que se refiere a la versión que únicamente emplea reglas de desenvolvimiento.

En orden a probar la consistencia en este último caso, basta con hacer ver que las reglas en cuestión no nos permiten demostrarlo todo, lo que podría lograrse hallando una interpretación del sistema que excluya la posibilidad de pasar de alguna fórmula a otra por medio de una derivación legítima. Para ello tomamos un grupo G, cuyas operaciones, representadas por nuestros diversos signos formales, puedan ser definidas de manera que G quede cerrado por respecto a ellas, y un subgrupo propio G * tal que, si todos los elementos representados por las fórmulas de la parte superior de cualquiera de nuestros esquemas de desenvolvimiento pertenecen a G *, haya de haber al menos uno de los elementos representados por una fórmula de la parte inferior del mismo esquema que también pertenezca a G *. Puesto que contamos con diversos signos operacionales, semejante interpretación podría ser fácilmente compendiada en forma tabular en los siguientes términos:

P	Q	$P.Q$	$P \vee Q$	$\sim P$	$P \supset Q$
$*\alpha$	α	α	α	β	α
α	β	β	α	β	β
β	α	β	α	α	α
β	β	β	β	α	α

Si el sistema de reglas fuese inconsistente, sería posible demostrar toda fórmula y, por ende, una fórmula a la que corresponda el valor β. Más aún, dicha demostración constituiría una derivación cuyas fórmulas iniciales podrían ser todas ellas reemplazadas por una fórmula cualquiera y, por ende, por una fórmula a la que corresponda el valor α. Mas semejante demostración no podría consistir en una única aplicación de ninguna de nuestras reglas, ni tampoco en ningún desenvolvimiento más complejo llevado a cabo de acuerdo con estas últimas. Pues cuando las fórmulas iniciales posean todas el valor α, no cabría introducir bajo la raya horizontal de un esquema ninguna fórmula en posesión del valor β sino por medio de la aplicación de una de las reglas (4), (5) o (7a); y es posible hacer ver sobre la base de la tabla que, en cada uno de esos casos, se habría introducido al mismo tiempo otra fórmula en posesión del valor α, lo que imposibilita que ninguna sucesión de aplicaciones de nuestras reglas constituya un desenvolvimiento capaz de conducirnos de una fórmula inicial en posesión del valor α a una fórmula terminal en posesión del valor β.

Bajo esta interpretación, que podríamos llamar normal por ajustarse a nuestra intención originaria, es posible probar la independencia de las diversas reglas proponiendo para cada una de ellas una interpretación modificada o anormal de su respectivo signo formal que deje intactas todas las demás reglas (en el sentido de que éstas sigan siendo incapaces de conducirnos de un conjunto de fórmulas a todas las cuales corresponda el valor α a un conjunto de fórmulas a todas las cuales corresponda el valor β) pero permita a la regla en cuestión garantizar el tránsito de un conjunto de fórmulas en posesión del valor α a un conjunto de fórmulas en posesión del valor β. Puesto que no hay más de tres reglas relativas a uno y el mismo signo formal, la cosa no es difícil ni demasiado compli-

cada. En la lista que sigue ofrecemos para cada una de las reglas una interpretación anormal de su correspondiente signo, interpretación que —tomada en conjunción con la interpretación normal de los restantes signos— bastará para probar la independencia de la regla de que se trate:

(1) $P.Q=\beta$

(3a) $P \vee Q=Q$ (3b) $P \vee Q=P$

(5) $\sim P=\beta$

(7a) $P \supset Q=Q$ (7b) $P \supset Q=\sim P$

(2a) $P.Q=Q$ (2b) $P.Q=P$

(4) $P \vee Q=\alpha$

(6) $\sim P=\alpha$

(8) $P \supset Q=\alpha$

Para una prueba directa de la completud de nuestras reglas de desenvolvimiento (1) a (8), consideradas como un sistema de lógica proposicional, sólo necesitamos modificar la prueba de completud antes suministrada, incluyendo los pertinentes argumentos en orden a demostrar que las reglas permiten la reducción de todas las fórmulas veritativo-funcionales a su forma normal conjuntiva, así como la posibilidad de que una expresión en dicha forma se acredite como verdadera si cada una de las disyunciones conjuntas contiene una expresión atómica a la par que su negación. En cuyo caso será dado pasar a demostrar que la adición de cualquier nueva regla que no sea derivable de las ya admitidas nos obligaría a la aceptación de $*/P$.

Cualquiera que sea la forma adoptada por el cálculo de proposiciones de que nos ocupemos, las pruebas de consistencia, independencia y completud para sus reglas y axiomas (si los hay) envolverán inevitablemente un tipo de razonamiento que no cabe representar dentro del propio cálculo. Nosotros ya hemos tenido ocasión de prestar atención a semejante tipo de razonamiento a propósito de la prueba de completud ofrecida por Post para el cálculo de los *Principia Mathematica*, pero igualmente bien podríamos haberlo hecho a propósito de las pruebas de consistencia o independencia de este último. Pues, una vez demostrado que ninguna derivación legítima, por larga que ésta sea, puede llevarnos de premisas con un valor preferente a una conclusión con un valor de género distinto, no cabrá validar nuestro argumento con los solos principios de la lógica proposicional. La razón de esta imposibilidad no es simplemente que las tesis probadas versen *acerca del* cálculo de proposiciones (pues algunos argumentos acerca de un cálculo podrían ejemplificar principios de ese cálculo), sino más bien que las tesis en cuestión son *generales* y no resultan accesibles sino por medio de un razonamiento capaz de demostrar que una determinada propiedad pertenece a todos los elementos de una serie por pertenecer al primero de ellos y ser hereditaria en la serie, esto es, por medio de la inducción matemática. Puesto que el principio que preside semejante razonamiento trasciende no sólo los recursos de la lógica primaria (o proposicional) sino también los de la lógica general (o teoría de la cuantificación), parece que contamos con suficiente justificación para afirmar que ni siquiera los elementales teoremas de la metalógica considerados en esta sección pertenecen al dominio de la lógica propiamente dicha.

2. La metateoría de la lógica general.

Con vistas a nuestra consideración de la metateoría de la lógica general, comenzaremos por asumir, para simplificar, que contamos con las seis reglas siguientes:

(1) $P \supset Q, P / Q$
(2) $* / P \supset (Q \supset P)$
(3) $* / [P \supset (Q \supset R)] \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]$
(4) $* / (\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$
(5) $* / (x) Fx \supset FY$
(6) $P \supset Fx / P \supset (x) Fx$, siempre que x no se halle libre en P.

En nuestra lista, el subsistema integrado por las reglas (1)-(4) representa el apartado correspondiente a la lógica primaria; y la totalidad de las fórmulas constituye una versión simplificada del sistema ofrecido por Frege en su *Begriffsschrift*, si bien con reglas en lugar de axiomas.

Para probar la consistencia de tales reglas bastará demostrar que en ningún caso nos obligan a aceptar un par de fórmulas relacionadas entre sí como P y $\sim P$. A estos efectos adoptamos la interpretación de la que nos servíamos en la prueba de consistencia de la última sección, acompañándola de una estipulación adicional que nos permita prescindir de cuantificadores universales y considerar a las expresiones de la forma Fx como signos proposicionales, esto es, como signos capaces de cobrar uno de los dos valores α y β. Se evidenciará entonces que todas las fórmulas introducidas por cualquiera de las reglas (2)-(5) han de poseer el valor preferente α, retenido asimismo por todas las fórmulas derivadas de las del primer grupo por medio de la regla (1) o la regla (6). Dado que, de acuerdo con nuestra interpretación, ningún par de fórmulas relacionadas entre sí como P y $\sim P$ podrían conjuntamente detentar el valor α, ello establece la consistencia de las reglas.

En esta prueba, dada por vez primera a conocer por D. Hilbert y W. Ackermann en sus *Grundzüge der theoretischen Logik* de 1928, la interpretación del simbolismo de la universalidad que se acaba de sugerir equivale de hecho a la asunción de que sólo hay un individuo en el dominio sobre el que recae nuestra generalización. Pues si, en efecto, sólo hubiera un individuo y su nombre fuese Y, la expresión $(x)Fx$ resultaría equivalente a FY, evidenciándose que las reglas (5) y (6) correspondientes a la lógica general no comportan riesgo alguno de inconsistencia. Por lo que hace a nuestra argumentación, la asunción de un dominio más vasto de individuos —y, en particular, la asunción de un dominio infinito— podría tal vez llevar a una contradicción. Mas, si así fuera, la contradicción resultante procedería de algún absurdo introducido por la referida asunción y no de la propia lógica general en sí misma considerada.

La trivial interpretación del simbolismo de la universalidad que nos permite probar la consistencia del conjunto de reglas en su totalidad resulta también útil para probar la independencia de las reglas (1), (2), (3) y (4). Pues dicha interpretación hace a las reglas (5) y (6) respectivamente equivalentes a

(5') $* / P \supset P$
(6') $P \supset Q / P \supset Q$,

siendo posible demostrar, mediante una adaptación de los métodos de la anterior sección, que ninguna de las cuatro primeras reglas es derivable de estas últimas conjuntamente tomadas con las otras tres.

Para probar la independencia de (5), reemplazamos el cuantificador universal (x) en todas y cada una de sus intervenciones en nuestro sistema por $\sim(x)\sim$, esto es, por la combinación de signos utilizada por nosotros como cuantificador existencial. Con ello se mantienen invariables las reglas (1)-(4), mientras (6) se subsume en la regla derivada $P \supset Fx / P \supset \sim(x)\sim Fx$. Se sigue de ahí que toda regla derivable sin recurrir a (5) en el sistema originario ha de permanecer invariable en el curso de la transformación o subsumirse en otra regla derivada. Mas (5) se transforma a su vez en $*/\sim(x)\sim Fx \supset FY$, que ya no es una regla derivada, puesto que su adición al sistema originario nos permitiría obtener $*/FX \supset FY$.

De modo semejante, y en orden a demostrar la independencia de (6), reemplazamos $(x)Fx$ en sus diversas intervenciones por $(x)\sim(Fx \supset Fx)$. De este modo permanecen sin cambio las reglas (1)-(4), mientras que (5) queda subsumida en la trivial regla derivada $*/(x)\sim(Fx \supset Fx) \supset FY$. Pero (6) se convierte en $P \supset Fx / P \supset (x)\sim(Fx \supset Fx)$, que ciertamente no es tampoco una regla derivada.

Las precedentes pruebas de consistencia e independencia de las reglas de un sistema de lógica general sin axiomas constituyen una adaptación de las pruebas de consistencia e independencia elaboradas por Bernays para un sistema con axiomas, pero la idea en que se inspira la prueba de consistencia procede de un trabajo de Herbrand [6]. La primera vez que se dio a conocer una prueba de completud para un sistema de lógica general fue en un trabajo de Gödel de 1930 [7]. En lo que sigue vamos a ocuparnos del mismo; pero, antes de entrar en detalles, conviene decir algo acerca de la naturaleza misma de la empresa. Pues la situación con la que ahora habremos de enfrentarnos resulta harto más complicada que la examinada en la última sección.

Nuestro conjunto de reglas para la lógica general no es completo en sentido fuerte, ya que cabe ampliarlo sin incurrir por ello en contradicción. Es decir, es posible concebir diversas reglas consistentes con las antes propuestas pero que, sin embargo, no sean reglas derivadas de estas últimas. Un sencillo ejemplo nos lo ofrece la regla $*/\sim(x)Fx \supset (x)\sim Fx$, que, si contamos con los signos apropiados para ello, podría asimismo ser transcrita en cualquiera de las siguientes versiones:

$$*/(x)Fx \vee (x)\sim Fx,$$
$$*/(\exists x)Fx \supset (x)Fx,$$
$$*/\sim[(\exists x)Fx.(\exists x)\sim Fx].$$

La adición de esta regla a nuestro conjunto de reglas originario equivale a una estipulación en favor de la interpretación especial utilizada en la prueba de consistencia, esto es, equivaldría a una restricción que nos permita suponer que el dominio de los individuos admisibles como argumentos de funciones proposicionales contiene sólo un elemento. Pues, como

---

[6] "Recherches sur la théorie de la démonstration", *Travaux de la Société des sciences et de lettres de Varsovie, Cl. III, math.-phys.*, XXXIII (1930), pp. 33-160.

[7] "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XXVII (1930), pp. 349-60.

claramente se desprende de la última versión de nuestra regla, ésta exige, en efecto, que la fórmula $(\exists x)Fx.(\exists x)\sim Fx$ sea falsa para todas las interpretaciones de F, lo que es tanto como decir que el número de individuos del dominio no llega a dos. Aplicando la misma técnica, cabría construir ahora como sigue nuevas reglas destinadas a limitar el dominio de individuos considerado a dos, tres o cualquier número de individuos que podamos desear:

[1] $*/(x)Fx \vee (x)\sim Fx$
[2] $*/(x)Fx \vee (x)(\sim Fx \vee Gx) \vee (x)(\sim Fx \vee \sim Gx)$
[3] $*/(x)Fx \vee (x)(\sim Fx \vee Gx) \vee (x)(\sim Fx \vee \sim Gx \vee Hx) \vee$
$(x)(\sim Fx \vee \sim Gx \vee \sim Hx)$
. . . . . .

El número entre paréntesis que precede a cada una de estas reglas representa el *límite superior* de magnitud de los dominios de individuos permitidos por la misma. Pues mientras que el esquema proposicional que sigue a la barra inclinada de la segunda de esas reglas no es válido (esto es, necesariamente verdadero para cualquier interpretación de sus letras esquemáticas) en un dominio que contenga tres o más individuos, lo será en cambio en un dominio que contenga dos individuos o uno; y, de manera semejante, todo esquema que sea válido para un dominio de $n+1$ individuos lo será, asimismo, para un dominio de n individuos, siempre que $n>0$. Así se desprende de la consideración de lo que significa decir que un esquema proposicional cuantificado es válido en un dominio de n individuos.

Cuando el dominio sobre el que se ejerce la cuantificación es finito, cabe en principio reemplazar una expresión universal o existencial por una conjunción o disyunción respectivamente. Así, podremos escribir $F_1.F_2$ en lugar de $(x)Fx$ si esta última se aplica a un dominio que sólo contenga dos individuos y dichos individuos son arbitrariamente designados mediante numerales. Cuando, y sólo cuando, el resultado de efectuar tales reemplazamientos a todo lo largo de una expresión sea una tautología de acuerdo con las reglas de la lógica proposicional, la expresión cuantificada originaria podrá ser descrita como necesariamente verdadera en el dominio finito al que ha sido aplicada. De modo semejante, un *esquema* proposicional cuantificado podrá ser descrito como *válido* en un dominio de una determinada magnitud cuando, para cualquier interpretación de sus letras esquemáticas, quede convertido en una verdad necesaria tras la eliminación de sus cuantificadores de la manera antes indicada. Así, y por referencia a un dominio de dos individuos, el esquema que aparece en la segunda de las reglas restrictivas arriba transcritas vendría a reducirse a $(F_1.F_2) \vee [(\sim F_1 \vee G_1).(\sim F_2 \vee G_2)] \vee [(\sim F_1 \vee \sim G_1).(\sim F_2 \vee \sim G_2)]$,

esto es, a

$F_1.F_2 \vee \sim F_1.\sim F_2 \vee \sim F_1.G_2 \vee \sim F_2.G_1 \vee G_1.G_2 \vee \sim F_1.\sim F_2 \vee \sim F_1.\sim G_2 \vee \sim F_2.\sim G_1 \vee \sim G_1.\sim G_2$

o

$F_1.F_2 \vee \sim F_1.\sim F_2 \vee \sim F_1.(G_2 \vee \sim G_2) \vee \sim F_2.(G_1 \vee \sim G_1) \vee G_1.G_2 \vee \sim G_1.\sim G_2$,

que es obviamente tautológica. Si aplicáramos el mismo esquema a un dominio de un solo individuo y procediésemos a reducirlo en consecuencia, el resultado sería de nuevo una forma tautológica. Y, en general, cualquier esquema que sea válido para un dominio de $n+1$ individuos tendrá también que serlo para un dominio de n individuos, siempre que $n>0$. Pues si la aplicación del esquema a un dominio de $n+1$ individuos arrojase una forma reducida que resulte tautológica, cabría obtener una nueva forma reducida que siga siendo tautológica de la sustitución del numeral 1 por $n+1$ a todo lo largo de la primera; y la producción de esta segunda fórmula vendría evidentemente a identificarse con la aplicación del esquema originario a un dominio de n individuos.

La precedente ley podría ser ahora reformulada en términos de la satisfacibilidad de nuestro esquema. Pues así como se dice que un esquema ha de ser válido en un dominio dado si, al aplicarlo a ese dominio, arroja una verdad para toda interpretación de sus letras esquemáticas, de la misma manera se dirá que un esquema ha de ser satisfacible en un dominio dado si arroja una verdad para alguna interpretación de sus letras esquemáticas. De donde se sigue que la validez de un esquema en un dominio dado se podría identificar con la no-satisfacibilidad de su negación, en tanto que la satisfacibilidad de dicho esquema se identificaría con la invalidez de su negación. Será, por tanto, fácil demostrar que un esquema satisfacible en un dominio de n individuos ha de serlo también en un dominio de $n+1$ individuos, siempre que $n>0$; y, en algunos contextos, esta formulación de nuestra ley resultaría quizá más útil que la antes propuesta.

Si confináramos nuestra atención al cálculo funcional monádico, esto es, a aquella parte de la lógica general en que sólo nos ocupamos de funciones proposicionales de un argumento, no necesitaríamos considerar otros dominios que dominios con un número finito de individuos. Pues P. Bernays y M. Schönfinkel han demostrado que cualquier esquema de dicho cálculo que sea satisfacible de algún modo (esto es, en esta o aquella clase de dominio) lo habrá de ser en un dominio de 2^n individuos, donde n represente el número de las diferentes letras esquemáticas funcionales que el esquema contiene [8]. En orden a probar tal cosa, comencemos por suponer que las letras funcionales del esquema han sido interpretadas como signos de diversos atributos A_1 ,..., A_n. A continuación, y por vasto que sea el dominio de individuos envuelto en esta interpretación, podrá ser dividido entre a lo sumo 2^n clases de tal modo que dos individuos sean miembros de la misma clase si, y sólo si, cada uno de ellos posee todos los atributos de nuestra lista que pertenecen al otro. Mas dichas clases, pongamos por caso K_1 ,..., K_r, donde $r\leqslant 2^n$, podrán ahora ser consideradas como un nuevo dominio de individuos para el que cabría definir nuevos atributos A_1^* ,..., A_n^*, tales que K_i posea A_j^* si, y sólo si, los miembros de K_i poseen A_j. Y, en este nuevo dominio, nuestro esquema originario habrá de ser evidentemente satisfecho una vez más cuando sus letras funcionales se interpreten como signos de los atributos A_1^* ,..., A_n^*. Si $r=2^n$, ello completará la prueba requerida; y si $r<2^n$, tan sólo necesitaremos invocar la ley en virtud de la cual la satisfacibilidad de un esquema en un dominio

[8] "Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, XCIX (1928), pp. 342-72.

finito implica su satisfacibilidad en cualquier otro dominio finito de mayor magnitud.

Hasta aquí nos hemos limitado a considerar el problema de la validez y la satisfacibilidad en dominios finitos. Pero en aquella parte de la lógica general que se ocupa de relaciones, en cuanto diferentes de atributos, es fácil dar lugar a esquemas que no puedan ser satisfechos en dominios finitos. He aquí, por ejemplo, uno de esos esquemas:

$$(x)\sim F(x,x).(x)(y)(z)[F(x,y).F(y,z)\supset F(x,z)].(x)(\exists y)F(x,y).$$

Si interpretáramos $F(x,y)$ como si su significado fuese $x<y$, la fórmula sería satisfecha en el dominio infinito de los números naturales. Mas no cabría ninguna interpretación de la misma que permita su satisfacción en un dominio finito, con lo que su negación sería válida para todo dominio finito. ¿Será tal vez posible dar lugar a un esquema que requiera para su satisfacción un dominio aún más vasto que el de los números naturales? En seguida veremos que no faltan razones para responder negativamente a esta pregunta, pero lo que por el momento importa establecer es que la lógica nada tiene que ver con la distinción entre dominios finitos e infinitos. Nuestras reglas de la lógica general no son completas en sentido fuerte precisamente por tratarse de reglas que únicamente permiten la demostración de esquemas universalmente (o absolutamente) válidos, esto es, esquemas válidos —según la explicación más usual— para todo dominio novacío.

Esta reserva por la cual excluimos de nuestra consideración a los dominios vacíos pudiera a primera vista parecer arbitraria, y ha sido de hecho criticada por algunos lógicos que la acusan de envolver una presuposición existencial que habría de restringir el alcance de nuestra disciplina y atentar contra su pureza formal. La razón comúnmente alegada en defensa de tal reserva es que esta última nos permitiría retener $(x)Fx\supset(\exists x)Fx$ como un esquema universalmente válido derivado de $(x)Fx\supset FY$ y $FY\supset(\exists x)Fx$. De acuerdo con esta línea de razonamiento, $(x)Fx$ sería verdadera en un dominio vacío para toda interpretación de F, resultando como resulta equivalente a $\sim(\exists x)\sim Fx$, pero $(\exists x)Fx$ sería falsa y, con ella, lo sería la totalidad del esquema $(x)Fx\supset(\exists x)Fx$. Este es, sin duda, un argumento muy apropiado para inducirnos a confinar nuestra atención a los dominios novacíos, pero no es suficiente todavía para disipar los recelos de quienes temen que de ahí se derive una inconveniente restricción del alcance de la lógica. Para hacer frente a semejante objeción, basta con hacer ver que dicha restricción no es realmente una restricción, puesto que no podría haber ningún dominio vacío de individuos. En la jerga técnica de los lógicos, un individuo es simplemente un argumento admisible para las funciones del tipo ínfimo consideradas en ese instante, por lo que no tendría sentido hablar de un dominio de individuos a menos de poder indicar alguna función o funciones para las cuales sea apropiado. De modo semejante, sería absurdo sugerir la posibilidad de que haya funciones proposicionales que resulten apropiadas para un dominio vacío, pues tampoco las podría haber sin algún género de argumentos admisibles. Aquellas funciones proposicionales que sean contradictorias o incoherentes determinarán *clases* vacías, pero incluso a ellas les habrán de corresponder *dominios*

no-vacíos, integrados por aquellos argumentos respecto de los cuales nos sea dado denegarlas con sentido. En rigor, decir de un supuesto dominio de individuos que es vacío sería a lo sumo un modo vago e indirecto de sostener que un complejo de signos que suponíamos expresaba una función proposicional no expresa, de hecho, nada. Así es como, por ejemplo, se diría que no hay nada de lo que quepa tan siquiera denegar con sentido que sea la raíz cuadrada de la valentía.

Una de las razones para haber dejado de apreciar tal conexión entre dominios y funciones pudiera ser el modo abstracto como los lógicos acostumbran a presentar las leyes relativas a los dominios. Pero otra segura fuente de confusión es un dogma muy extendido entre los empiristas en los últimos tiempos. Tras apuntar correctamente que la existencia de un hombre o un caballo es un hecho contingente que sólo podríamos conocer a partir de la experiencia, algunos de estos filósofos han pasado a afirmar, con escasa fortuna, que no es posible establecer *a priori* proposición alguna existencial. Su tesis resulta fácilmente refutable por recurso a abundantes contraejemplos extraídos de la matemática, como lo sería la proposición de que hay un número primo mayor que un millón, pero el caso es que quienes la sustentan la han tomado muy en serio y se sirven de ella como de un argumento contra la posibilidad de la ontología. En el presente contexto, dicha tesis pudiera conducir a mantener que la lógica, cuyo carácter apriorístico se halla fuera de toda duda, no debería basarse en la exclusión de los dominios vacíos.

Aunque, por las razones ya expuestas, las reglas de la lógica general presentadas al comienzo de esta sección no son completas en sentido fuerte, lo son en el sentido más débil de resultar suficientes para la demostración de todos los esquemas universalmente válidos. Esto fue, en efecto, lo que Gödel probó en el teorema de 1930 arriba mencionado, cuya estructura vamos ahora a considerar. La idea directriz del método seguido, gracias al cual logra poner en conexión la validez en el dominio de la lógica general con la validez en el dominio de la lógica primaria o proposicional, fue dada por primera vez a conocer por T. Skolem en 1928 [9] y desarrollada poco después por J. Herbrand en un importante trabajo al que nos hemos referido con anterioridad [10]; pero el uso que hace de la misma presenta considerables novedades y permite incidentalmente suministrar una nueva demostración de un interesante teorema descubierto ya en 1915 por Löwenheim.

Lo primero que se precisa demostrar a estos efectos es que, para toda fórmula universalmente válida de la lógica general, se puede hallar una fórmula universalmente válida que (*a*) sea demostrable si, y sólo si, la fórmula originaria lo es y (*b*) se halle construida por medio de una forma normal prenexuada de Skolem, esto es, con todos sus cuantificadores alineados al comienzo de la fórmula y, dentro de estos últimos, colocados los cuantificadores existenciales, si los hay, delante de los uni-

9 "Über die mathematische Logik", *Norsk Mathematisk Tidsskrift*, X (1928), pp. 125-42.
10 "Récherches sur la théorie de la demonstration", *Travaux de la Société des sciences et des lettres de Varsovie, Classe III*, XXXIII (1930), pp. 33-160.

versales, si los hay. Este resultado, obtenido por Skolem en 1920 [11], juega el mismo papel en la prueba gödeliana del teorema de completud para la lógica general que el jugado por la tesis de la reducibilidad a forma normal conjuntiva en la prueba por Post de su teorema de completud para la lógica proposicional. Naturalmente, la reducción de una fórmula dada a su forma normal skolemiana ha de poder probarse mediante un argumento desarrollado dentro del cálculo de funciones proposicionales cuya completud le corresponde establecer al teorema de Gödel; pero, como en el caso más sencillo de la reducibilidad a forma normal conjuntiva, también en este caso se requiere acudir a la inducción matemática para la prueba de la tesis general. Por nuestra parte no intentaremos reproducir detalladamente la argumentación de Gödel, sino que nos limitaremos a tomar nota de que —para los objetivos del autor de la prueba— es suficiente probar la demostrabilidad de toda fórmula universalmente válida que se halle en forma normal skolemiana.

Introduzcamos ahora «$\mathscr{A}$» como nombre de una fórmula bien formada de forma skolemiana

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_k)(y_1)\ldots(y_m)M(x_1,\ldots,x_k;\ y_1,\ldots,y_m),$$

en la que $M(x_1,\ldots,x_k;y_1,\ldots,y_m)$ sea abreviatura de una expresión desprovista de cuantificadores, que, aparte de las indicadas variables, sólo contenga letras esquemáticas funcionales junto con conectivas veritativo-funcionales, paréntesis y tal vez letras esquemáticas proposicionales. Si $k=0$, es decir, si $\mathscr{A}$ no contiene cuantificadores existenciales, la expresión en su conjunto podría ser universalmente válida por revestir la versión desarrollada de $M(y_1,\ldots,y_m)$ carácter tautológico, respondiendo, pongamos por caso, a un patrón por el estilo de $(Fy_1 \vee \sim Fy_1).(Gy_2 \vee \sim Gy_2)$. Si $k=1$, es decir, si en $\mathscr{A}$ sólo hay un cuantificador existencial, la expresión en su conjunto podría de nuevo ser universalmente válida por revestir, como antes, carácter tautológico la versión desarrollada de $M(x_1;y_1,\ldots,y_m)$. Pero si hubiera más de un cuantificador existencial, la situación sería más complicada. Pues mientras que la fórmula en su conjunto podría seguir siendo universalmente válida a causa del carácter tautológico de la versión completa de $M(x_1,\ldots,x_k;y_1,\ldots,y_m)$, podría asimismo serlo por una otra razón, a saber, por el hecho de haber un modo de enlazar las variables existencialmente ligadas que otorgue a la versión completa de $M(x_1,\ldots,x_k;y_1,\ldots,y_m)$ un carácter tautológico del que de otro modo carecería. Así, y para el caso trivial de que $k=2$ y $m=0$, la fórmula $(\exists x_1)(\exists x_2)(Fx_1 \vee \sim Fx_2)$ sería universalmente válida por resultar derivable de $FY \vee \sim FY$. En orden a sistematizar nuestra caracterización de tales complejidades, convengamos en enumerar como sigue todos los diferentes k-tuplos de la forma $\langle z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_k}\rangle$ que podamos componer a partir de la secuencia infinita de variables $z_0, z_1, z_2 \ldots$ tomando a cada una de ellas tantas veces cuantas deseemos. A estos efectos, agruparemos en primer término a esos k-tuplos de acuerdo con las sumas de sus subíndices, comenzando por aquellos para los que $i_1+i_2+\ldots+i_k$ sea menor, y a continuación procederemos a ordenarlos lexicográficamente dentro de cada uno de esos grupos. Así, la secuencia comenzará $\langle z_0, z_0,\ldots,z_0\rangle$,

11 "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze, etc.", *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania*, I *Math-nat. Klasse*, 1920, n. 4.

$\langle z_0, z_0, \ldots, z_0, z_1\rangle, \langle z_0, z_0, \ldots, z_1, z_0\rangle, \ldots$ Sea ahora '$\mathscr{B}_n$' un nombre de la expresión $M(z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_k}; z_{(n-1)m+1}, z_{(n-1)m+2}, \ldots, z_{nm})$, donde $\langle z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_k}\rangle$ sería el n-ésimo de los k-tuplos que se acaban de mencionar. Así si, por ejemplo, $k=3$ y $m=2$, tendríamos

$$\begin{array}{lll}
'\mathscr{B}_1' & \text{como nombre de} & M(z_0, z_0, z_0; z_1, z_2) \\
'\mathscr{B}_2' & \text{»} \quad \text{»} & \text{»} \quad M(z_0, z_0, z_1; z_3, z_4) \\
'\mathscr{B}_3' & \text{»} \quad \text{»} & \text{»} \quad M(z_0, z_1, z_0; z_5, z_6) \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

En cada una de esas expresiones, las variables que siguen al punto y coma difieren de las que lo preceden y asimismo de todas aquellas que figuran en anteriores expresiones de la serie; pero, excepción hecha de la primera expresión de ésta, no aparecen antes del punto y coma variables que no lo hayan hecho en expresiones precedentes. Sea, a continuación, '$\mathscr{C}_n$' un nombre de la disyunción de todas las fórmulas $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_3$ y '$\mathscr{D}_n$' un nombre de la clausura universal de $\mathscr{C}_n$, esto es, de la fórmula obtenida anteponiendo a $\mathscr{C}_n$ cuantificadores universales para todas las variables que contenga. En ese caso, cabría demostrar —sirviéndonos de las reglas del cálculo funcional investigado junto con el principio de inducción matemática— que, para todo n, '$\mathscr{D}_n$' implica $\mathscr{A}$. La prueba detallada de esto último es un tanto tediosa, mas no difícil de conseguir.

Ahora bien, pudiera suceder que en nuestra sistemática enumeración de posibilidades haya algún número n para el que $\mathscr{C}_n$ resulte tautológica en el sentido en que un esquema como $Fx \vee \sim Fx$ se consideraría tautológico. De ser así, podría aseverarse su clausura universal $\mathscr{D}_n$, de la que —como ya sabemos— cabría derivar $\mathscr{A}$ dentro del cálculo objeto de investigación. Mas si no hubiera ningún número n para el que $\mathscr{C}_n$ resulte tautológica, $\mathscr{A}$ no sería una fórmula universalmente válida, puesto que cabría interpretar sus letras esquemáticas de tal manera que la expresión en su conjunto se convierta en falsa.

Este último punto podría probarse ahora como sigue. Ya que, para todo n, $\mathscr{C}_n$ sería no-tautológica por hipótesis, es posible asignar valores de verdad a todos sus componentes elementales (esto es, a sus letras esquemáticas proposicionales, si las hay, y a sus fórmulas parciales del tipo de Fz_p, $G(z_q, z_r)$, etc.) de forma que la expresión en su conjunto obtenga, en virtud de las reglas de la lógica proposicional, el valor *falsedad*. Para cualquier n dado, únicamente podrá haber un número finito de tales asignaciones falsantes, pero en total tendría que haber una infinidad de ellas, puesto que la secuencia $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$, etc., es infinita y cada fórmula que siga en ella a la primera habrá de contener algún componente o componentes elementales que no figuren en la inmediatamente precedente. Mas por la misma razón podríamos suponer que todos los componentes elementales que aparezcan en cualquiera de las fórmulas $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$, etc., han de resultar susceptibles de enumeración en el orden de su primera aparición, lo que daría pie para efectuar una asignación preferente de valores de verdad en los siguientes términos. El primer componente elemental recibirá el valor *verdad* si, y sólo si, le corresponde el valor *verdad* en una infinidad de las asignaciones falsantes antes aludidas; el segundo recibirá el valor *verdad* si,

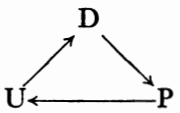
y sólo si, le corresponde el valor *verdad* en una infinidad de aquellas asignaciones falsantes aludidas que coincidan hasta el momento con la asignación preferente; y así sucesivamente. Por descontado, en todo este proceso se ha de asumir que cada uno de los componentes elementales recibirá el valor *falsedad* si no recibe el valor *verdad*. Y estará claro que la asignación preferente falsa a la vez todas las fórmulas $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, etc., y consiguientemente todas las fórmulas $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3$, etc., a partir de las cuales se construyan aquéllas por disyunción. A continuación podremos suponer que, en cada uno de los componentes elementales que no sea una simple letra proposicional, sus variables z_0, z_1, z_2, etc., han de ser reemplazadas por sus propios subíndices numéricos, de suerte que tengamos una serie de expresiones tales como $F0,G(1,2),F1,G(5,7)$, etc. Si suponemos además que cada una de estas nuevas expresiones retiene el valor de verdad asignado a la correspondiente expresión originaria por la asignación preferente, habremos conseguido interpretar todas las letras esquemáticas funcionales de la versión completa de $M(x_1,\ldots,x_k;y_1,\ldots,y_m)$ desde el punto de vista de la teoría de los números. Así, si F fuera una de esas letras con un lugar argumental, habría quedado determinado para qué números ha de considerarse Fx verdadera y para qué números ha de considerarse falsa, y otro tanto sucedería con cada una de las letras seleccionadas. Más aún, tales interpretaciones de las letras esquemáticas por referencia al dominio de los números naturales convertirían en falsa a $\mathscr{A}$, ya que no puede evidentemente haber ningún k-tuplo integrado por números naturales como el que ahora se necesitaría para asegurar la verdad de

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_k)(y_1)\ldots(y_m)M(x_1,\ldots,x_k;\, y_1,\ldots,y_m).$$

La conclusión a que llegamos, pues, es ésta: o bien $\mathscr{A}$ es susceptible de prueba con los medios del cálculo de funciones proposicionales o bien no es válida en el dominio de los números naturales y, por lo tanto, no es universalmente válida. Para decirlo en dos palabras, si $\mathscr{A}$ es universalmente válida, entonces es susceptible de prueba. Este argumento no basta ciertamente, tal y como se acaba de formular, para garantizar la consumación de los propósitos de Hilbert, puesto que la asunción de que o hay o no hay un número n para el que $\mathscr{C}_n$ sea tautológica envuelve el principio de tercio excluso. Pero revela en términos del mayor interés la estructura de la lógica general, permitiéndonos extraer como corolario un importante teorema independientemente obtenido por L. Löwenheim en 1915, a saber, el teorema que nos dice que un esquema válido para el dominio de los números naturales (o cualquier otro numerablemente infinito) ha de ser universalmente válido [12]. Pues, de acuerdo con el resultado expuesto en forma de disyunción al comienzo de este párrafo, si $\mathscr{A}$ es válida en el dominio de los números naturales, habrá de resultar susceptible de prueba y, por lo tanto, universalmente válida. Abreviando mediante «U», «D», «P», respectivamente, las expresiones «universalmente válida», «válida en un dominio numerablemente infinito» y «susceptible de prueba por medio de las reglas de la lógica general», y sirviéndonos finalmente de una flecha para indicar la idea de implicación, podríamos representar

12 "Über Möglichkeiten im Relativka'kül", *Mathematische Annalen*, LXXVI (1915), pp. 447-70.

ahora las relaciones que guardan entre sí aquellas tres nociones por medio del triángulo



El teorema de completud de Gödel quedará entonces resumido en el circuito «U→D→P», en tanto que el teorema del dominio de Löwenheim —en la presentación que aquí se ha hecho del mismo— se dejará resumir en el circuito «D→P→U». Por último, el tercer circuito «P→U→D» constituye una obvia trivialidad.

El trabajo en el que Löwenheim presentó la primera prueba de su teorema (sirviéndose para ello del simbolismo de Schröder) representa el comienzo de la moderna metalógica, pero la importancia de su resultado no llegó a ser apreciada en toda su magnitud hasta algunos años después de su publicación. El teorema reproducido más arriba resulta especialmente interesante por poner de relieve que los dominios numerablemente infinitos son los más vastos que la lógica necesita tomar en consideración. La trascendencia de esta observación resaltaría aún más si la reformuláramos por medio del aserto de que todo esquema satisfacible en algún dominio lo es asimismo en un dominio numerablemente infinito. Pues, como Skolem apuntó en 1922, ello conduce a una nueva paradoja de la teoría de conjuntos y, lo que es más, a una paradoja suscitada dentro de la teoría axiomatizada destinada a salvarnos de los incontrolados escarceos cantorianos [13]. En efecto, a partir de los axiomas de la misma habrá de ser siempre posible la demostración de la existencia de una infinidad no-numerable de conjuntos (pues el alcance de cualquier sistema axiomático propuesto que no permita tal cosa sería tan reducido que el sistema carecería de utilidad). Mas los axiomas en cuestión podrán ser congregados de modo que compongan una fórmula unitaria en la que, aparte de los signos lógicos del cálculo de funciones proposicionales, no intervengan otros signos que la ε de la pertenencia; y, de acuerdo con el teorema de Löwenheim, si es posible hallar alguna interpretación de ε que haga verdadera a dicha fórmula, tendrá que ser posible hallarla para un dominio numerablemente infinito. En resumidas cuentas, pues, cualesquiera axiomas destinados a dirigir nuestra atención hacia la infinitud no-numerable fracasarán inevitablemente en el empeño. Y Skolem ha llegado a demostrar que la dificultad no podría ser superada introduciendo una infinidad de axiomas, puesto que cualquier *clase* de fórmulas simultáneamente satisfacibles en cualquier dominio no-vacío lo habrán de ser en un dominio numerablemente infinito [14]. La única posibilidad de escapar a la dificultad parece constituirla la sugerencia del propio Skolem en el sentido de considerar a la distinción entre lo numerable y lo no-numerable como relativa a nuestro sistema axiomático. Así, los subconjuntos de un conjunto infinito

13 "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre", *Wissenschäftliche Vorträge, gehalten auf dem Fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors 1922*, pp. 217-32. No hemos tenido acceso al original.

14 "Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls, etc.", *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristaiania*, I, *Mat.-nat. Klasse*, 1919, n. 3.

pudieran ser no-numerables, dentro de un sistema axiomático dado, por envolver su enumeración la construcción de otro conjunto (a saber, de pares) no permisible en el interior de la teoría aunque de algún modo definible desde el exterior por referencia a la teoría como un todo. Se trata de una hipótesis plausible, pero el establecimiento de la misma difícilmente podría ser considerado como una reivindicación de Cantor, pues comporta la tesis de que no hay conjuntos *absolutamente* no-numerables

3. La incompletabilidad de la aritmética formal.

Las pruebas de consistencia, independencia y completud examinadas en la última sección podrían ser aplicadas, mediante una oportuna extensión, a un sistema deductivo que contenga los dos axiomas fregeanos de identidad en adición al aparato de la lógica general. Dentro de ese sistema será posible definir numerales en tanto que subíndices de enunciados existenciales. Así, para *Hay exactamente una cosa F*, *Hay exactamente dos cosas Fs*, etc., podríamos escribir:

$(\exists_1 x)Fx =_{\text{def}} (\exists x)[Fx.(y)(Fy \supset x = y)]$,
$(\exists_2 x)Fx =_{\text{def}} (\exists x)\ (\exists y)[Fx.Fy. \sim (x = y).(z)(Fz \supset x = z \vee y = z)]$,
. . . . . .

Mas no cabría hacer mucho por mostrar la plausibilidad de la teoría fregeana de la aritmética sin introducir, como Frege lo hizo, variables de un tipo superior. Pues sólo con su ayuda podría esperarse definir a los números como objetos de un cierto género (a saber, conjuntos de conceptos o conjuntos de conjuntos) y probar, de este modo, los axiomas de Peano. La introducción de variables de un tipo superior, en unión de la tesis de la extensionalidad, entraña, en efecto, el tránsito de la lógica general a la teoría de la pertenencia o, como más comúnmente se la denomina, la teoría de conjuntos. Que los axiomas de Peano puedan o no ser derivados dentro de una aceptable versión de la teoría de conjuntos es cuestión acerca de la cual cabría que discrepasen las opiniones de los matemáticos, pero mediante un paso más en el despliegue de la metamatemática sería posible soslayar la controversia centrando nuestra investigación en el sistema $\mathscr{P}$ resultante de abandonar las tesis cuestionables de los *Principia Mathematica* e introducir en su lugar los axiomas de Peano. Si Whitehead y Russell están en lo cierto, $\mathscr{P}$ tendría que resultar derivable de su propio sistema; y no hay duda de que algo así viene también exigido por lo que Hilbert tiene *in mente* cuando habla de la formalización de la matemática.

Este es el problema de que K. Gödel se ocupa en su trabajo «Ueber formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme» [15]. Su cálculo de la lógica general procede íntegramente de los *Principia Mathematica*, con la única excepción de escribir $x \Pi F(x)$ en vez de $(x)F(x)$. Pero del resto de la obra retiene únicamente la distinción de tipos, a los que se refiere por medio de subíndices adscritos a sus variables

[15] "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XXXVIII (1931), pp. 173-98.

x_1, y_1, x_2, y_2, etc., y el principio de extensionalidad, que presenta por medio de una secuencia infinita de fórmulas:

$$x_1 \Pi(x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \supset x_2 = y_2,$$
$$x_2 \Pi(x_3(x_2) \equiv y_3(x_2)) \supset x_3 = y_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

No obstante, introduce dos nuevos signos primitivos 0 y f, de los que se sirve para la formulación de tres axiomas especiales de la teoría numérica:

1. $\sim(fx_1 = 0)$,
2. $fx_1 = fy_1 \supset x_1 = y_1$,
3. $x_2(0).x_1 \Pi(x_2(x_1) \supset x_2(fx_1)) \supset x_1 \Pi(x_2(x_1))$.

Si asignamos a 0 su sentido usual y a f el significado de «el siguiente de» tendremos aquí otras tantas versiones de los axiomas tercero, cuarto y quinto de Peano. Dado que la serie de los números naturales ha sido extraída del dominio de individuos del sistema, resulta innecesario introducir uno u otro de sus restantes dos axiomas (esto es, *0 es un número* y *Si n es un número, también lo habrá de ser el siguiente de n*); y, de hecho, sería imposible hacerlo así a menos de considerar a *x es un número* como una abreviatura de *x=0 ó x es el siguiente de algo*. Es interesante reparar asimismo en que el principio de inducción matemática no podría ser enunciado mediante un único axioma sin hacer uso de una variable de tipo superior.

En orden a facilitar las referencias, Gödel distingue entre dos géneros de fórmulas significativas que podrían intervenir en el sistema. Las fórmulas del primer género serán signos numéricos, incluyendo no sólo auténticos numerales tales como $0, f0, ff0$, etc., sino asimismo variables del tipo ínfimo y signos complejos convertibles en designaciones numéricas al reemplazar por numerales las variables que contienen. Las fórmulas del segundo género serán expresiones proposicionales o expresiones convertibles en expresiones proposicionales, bien sea mediante las apropiadas sustituciones de sus variables, bien sea mediante la prefijación de cuantificadores. De entre las fórmulas numéricas, Gödel asigna especial importancia a aquellas que se convierten en designaciones de números tras el reemplazamiento por numerales de sus variables. Pues dichas fórmulas son los signos funcionales de la matemática ordinaria, y Gödel considera necesario introducir un cierto número de ellos en el curso de su argumentación. Algunas de sus definiciones constituyen explícitas equivalencias y algunas tales como

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)n! \end{cases}$$

envuelven el procedimiento recursivo de fijar el valor de la función para el argumento 0 y mostrar a continuación cómo puede obtenerse su valor para un argumento ulterior a partir de su valor para el argumento precedente. Pero todas ellas son igualmente efectivas en el sentido de suministrar ecuaciones a partir de las cuales quepa, al menos en principio, calcular por medio de las oportunas sustituciones y reemplazamientos los valores de las funciones para cualesquiera argumentos dados.

Dentro de este sistema, Gödel construye ahora una fórmula que no puede probarse con los recursos del sistema, aunque ha de ser verdadera a menos que el sistema sea contradictorio. Lo que esa fórmula establece es, en efecto, su propia indemostrabilidad. Ello da a primera vista la impresión de una paradoja, lo que nos lleva a sospechar si dicha fórmula no estará defectuosamente construida como lo está el pseudoenunciado «Lo que ahora digo es falso». Mas la autorreferencia de la fórmula de Gödel es inocua. En orden a comprobar que esto es así y escrutar el mecanismo de esa autorreferencia, habrá que comenzar por atender a la aritmetización gödeliana de la sintaxis. Hilbert había apuntado ya en 1904 la posibilidad de tratar a la lógica simbólica como una rama de la teoría numérica elemental [16], pero fue Gödel quien por primera vez elaboró con detalle semejante correspondencia y se sirvió de ella para la investigación de las propiedades de un sistema deductivo formalizado.

En el trabajo mencionado, Gödel procede a su aritmetización correlacionando cada uno de sus signos primitivos con un número natural de acuerdo con el siguiente esquema:

0 con 1,
f con 3,
$\sim$ con 5,
$\vee$ con 7,
Π con 9,
(con 11,
) con 13,
variables del tipo n con números de la forma p^n, donde p sea un primo mayor que 13 (por ejemplo, x_1 con 17, x_2 con 17^2, y_3 con 19^3, etc.).

A continuación, si $s_1, s_2, \ldots, s_k$ son los números con los que han sido correlacionados los k distintos símbolos de una fórmula, correlacionará a esta última en su conjunto con el número $2^{s_1} \times 3^{s_2} \times \ldots \times p_k^{s_k}$, donde p_k sea el k-ésimo primo. Así, la fórmula:

$$x_1 \Pi (x_2(x_1) \vee \sim x_2(x_1))$$

quedará correlacionada con el número

$$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^{11} \cdot 7^{17^2} \cdot 11^{11} \cdot 13^{17} \cdot 17^{13} \cdot 19^7 \cdot 23^5 \cdot 29^{17^2} \cdot 31^{11} \cdot 37^{17} \cdot 41^{13} \cdot 43^{13}.$$

Y, finalmente, si $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son los números con los que han sido correlacionadas las m fórmulas proposicionales de una secuencia tal como una prueba, correlacionará a dicha secuencia en su conjunto con el número $2^{f_1} \times 3^{f_2} \times \ldots \times p_m^{f_m}$. Es obvio que este método asocia un número, y sólo uno, a cada una de las fórmulas o secuencias de fórmulas posibles, haciéndolo de modo que, en principio, nos sea dado determinar para cualquier número si le corresponde alguna expresión asociada y, en tal caso, de qué expresión se trata. Pues, según un bien conocido teorema de la aritmética, sólo hay un modo posible de descomponer un número en factores primos. Por lo demás, no faltan otros procedimientos de asociación de números y

16 *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, 1904, pp. 174-85.

signos en orden a obtener un resultado por el estilo, pero el método de Gödel presenta la ventaja de simplificar considerablemente el siguiente paso de la argumentación.

Dada una asociación entre signos y números como la que se acaba de considerar, será posible ahora construir un enunciado relativo a la composición del número correspondiente a cualquier enunciado que deseemos formular acerca de la estructura de una fórmula o secuencia de fórmulas de nuestro sistema. Supóngase, por ejemplo, que la fórmula impresa más arriba a título de muestra fuese considerada una generalización en posesión de un cuantificador universal. En la versión gödeliana de la aritmetización de la sintaxis, el enunciado aritmético correspondiente tendría por efecto hacer a la enorme cifra antes transcrita (esto es, al número asociado con la fórmula o, como cabría decir para abreviar, al número de la fórmula) divisible por 3^9 mas no por otra potencia superior de 3. Se trata aquí de un caso muy sencillo pero acaso suficiente para ilustrar nuestro principio. En la práctica, los enunciados aritméticos correspondientes a un análisis detallado de las fórmulas y sus mutuas relaciones tienden a ser bastante complicados, lo que lleva a Gödel a construir una serie de cuarenta y seis definiciones abreviatorias que le permitan someter a control su complejidad. Una de estas definiciones introduce el signo $Z(n)$ con el significado de *el número (Zahl) asociado con el numeral «fff... 0» en que la letra «f» figura exactamente n veces.* Otra introduce $Sb(x_y^v)$ para *el número de la fórmula que resulta de sustituir por el signo cuyo número es y el signo cuyo número es v en todos los lugares en que este último aparezca libre en la fórmula cuyo número es x.* Y la última de todas introduce $Bew(x)$ como un predicado aplicable a un número si, y sólo si, éste es el número de una fórmula proposicional demostrable o susceptible de prueba (*beweisbar*) en el sistema, esto es, el número de la última fórmula de una serie de fórmulas en la que cada una sea un axioma o una consecuencia inmediata de una o dos de las fórmulas precedentes.

Las funciones y predicados introducidos de esta guisa son todos, estrictamente hablando, funciones y predicados de *números,* definibles sin referencia alguna a signos o fórmulas; y, excepción hecha de la última (de cuya peculiaridad daremos cuenta en la próxima sección), todas las definiciones que Gödel nos ofrece resultan efectivas en el sentido apuntado más arriba. Es decir, siempre será posible calcular en un número finito de pasos qué valor cobra una de las funciones para un número dado por argumento; y, de manera semejante, será siempre posible determinar en un número finito de pasos si un predicado otro que $Bew(x)$ se aplica o no a un número dado. Pero de los ejemplos antes propuestos se desprende claramente que las funciones y predicados de la teoría numérica que Gödel considera se hallan elegidos y denominados en virtud de su correspondencia con una serie de nociones requeridas en la metateoría del sistema $\mathscr{P}$. De hecho, nuestro autor ha concentrado su atención en un fragmento de la teoría de números que se corresponde por su estructura con la sintaxis del sistema $\mathscr{P}$ pero podría, no obstante, ser representado dentro de este último. Hay que admitir, naturalmente, que una relación entre números de Gödel no es *idéntica* a una relación entre signos de $\mathscr{P}$. Pero no es, en cambio, erróneo hablar en este contexto de aritmetización de la sintaxis, puesto que todo enunciado que necesitemos formular acerca de las rela-

ciones entre signos de $\mathscr{P}$ podría quedar adecuadamente *representado* mediante un enunciado acerca de una relación entre los números de Gödel de esos signos; y, recíprocamente, toda fórmula que exprese una relación entre números de Gödel mediante el simbolismo especial de este último podrá ser, a su vez, *reinterpretada* como la expresión de una relación entre signos de $\mathscr{P}$. Hay en rigor, por tanto, una diferencia entre hablar de números y hablar de signos de $\mathscr{P}$, pero podemos servirnos de uno y el mismo formalismo —a saber, $\mathscr{P}$ — para ambos menesteres.

Al llegar a este punto, es conveniente abandonar la exposición del propio Gödel e introducir dos nuevos signos de los que éste no se sirve expresamente (aunque se hallan sugeridos por su esbozo preliminar de la argumentación). Se trata de «$\mathscr{E}_N$», destinado a significar «la expresión cuyo número asociado es denotado por N», y $Diag(x)$, que se ha de interpretar como una abreviatura de $Sb\ (x^{17}_{Z(x)})$. El primero de ellos no es un signo del sistema $\mathscr{P}$, puesto que su sentido viene determinado por las asociaciones arbitrarias de números y signos establecidas con el fin de ayudarnos a hablar acerca del sistema $\mathscr{P}$; pero resulta útil como un recurso suplementario para facilitar la transición entre las dos interpretaciones posibles de las fórmulas. En nuestra explicación, la letra N es, por supuesto, una letra esquemática. El segundo, por su parte, es el signo de una función aritmética que cabría definir en el sistema $\mathscr{P}$ sin hacer mención de signos ni de fórmulas, aunque pudiera convenirnos leerlo como una abreviatura de *el número de la fórmula que resulta de sustituir por el numeral que denota x la variable libre cuyo número es 17 de la fórmula cuyo número es x.* La denominación de «función diagonal» toma su origen de ciertas observaciones de Gödel en su esbozo preliminar. Si constreñimos nuestra atención a aquellas expresiones proposicionales —sean $\mathscr{E}_A$, $\mathscr{E}_B$, $\mathscr{E}_C$, etc.— que sólo contengan una variable libre y pueda, pues, decirse de ellas que expresan propiedades de números, comprobaremos que, para cada una de dichas expresiones, es posible preguntar de cada número, y en particular de cada número asociado a una expresión así, si posee o no la propiedad expresada por esta última. Escribiendo ahora «$[\mathscr{E}_N;M]$» para significar que el número denotado por M satisface $\mathscr{E}_N$, podríamos insertar las proposiciones consideradas en una disposición doblemente infinita

$$\begin{array}{llll} [\mathscr{E}_A;A] & [\mathscr{E}_A;B] & [\mathscr{E}_A;C] & \ldots \\ [\mathscr{E}_B;A] & [\mathscr{E}_B;B] & [\mathscr{E}_B;C] & \ldots \\ [\mathscr{E}_C;A] & [\mathscr{E}_C;B] & [\mathscr{E}_C;C] & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{array}$$

Para todos aquellos argumentos asociados a expresiones proposicionales que no contengan más que una variable, la función numérica expresada por $Diag(x)$ tomará por valores los números de las fórmulas que expresen proposiciones situadas en la diagonal de nuestra figura. La definición de la función antes propuesta permitirá asimismo que esta última tome valores para otros argumentos, pero ello no interesa para nuestros efectos.

Estamos ahora en situación de pergeñar una curiosa fórmula para la que introduciremos el nombre «$\mathscr{G}$» con el fin de indicar que se halla construida de acuerdo con una prescripción de Gödel. Si $\mathscr{E}_N$ es $\sim Bew\ (Diag(x))$, entonces $\mathscr{G}$ será $\mathscr{E}_{Diag(N)}$ o $\sim Bew(Diag(N))$. Lo que $\mathscr{G}$ enun-

cia es que el número denotado por $Diag(\mathcal{N})$ posee la propiedad aritmética expresada por $\sim Bew(x)$. Pero el número denotado por $Diag(\mathcal{N})$ es el propio número de $\mathcal{G}$, y la propiedad aritmética expresada por $\sim Bew(x)$ es una propiedad que únicamente podría pertenecer al número de una fórmula indemostrable. Lo que $\mathcal{G}$ enuncia, por lo tanto, es que ella misma es indemostrable. Lo más parecido a esto último que cabría construir en el lenguaje ordinario sería «Es imposible demostrar el enunciado que resulta de completar con su propio nombre la fórmula inacabada 'Es imposible demostrar el enunciado que resulta de completar con su propio nombre la fórmula inacabada...'» [17]. En este analogado, la noción de completar una fórmula con su propio nombre se correspondería con la función diagonal; y, si se concede a estos efectos que un texto flanqueado por un par de comillas pueda oficiar como un nombre de lo que figura entre comillas, podríamos describir a la oración en su conjunto como el enunciado que resulta de completar la fórmula entrecomillada con su propio nombre. Pero, en la teoría de Gödel, es la sistemática correlación entre números y fórmulas la que juega el papel de una denominación, y la noción de demostrabilidad o susceptibilidad de prueba que se maneja en ella resulta relativa al sistema $\mathcal{P}$. Estas diferencias revisten la mayor importancia.

El propio Gödel llama la atención sobre un punto de semejanza entre $\mathcal{G}$ y la oración que da lugar a la paradoja del Mentiroso, pero insiste en que $\mathcal{G}$ no es objetable en modo alguno. $\mathcal{G}$ puede ser de hecho indemostrable —como ella misma enuncia— sin ser falsa, por lo que no es correcto argüir que, si es indemostrable, ha de ser demostrable. Y tampoco resultaría correcto objetar que $\mathcal{G}$ sea vacua como lo es la afirmación «Lo que ahora digo es verdad»; pues, dada la correlación entre números y signos de que antes se hablaba, $\mathcal{G}$ acierta a decir algo acerca de sí misma. Si una fórmula es demostrable en un sistema deductivo enteramente formalizado, será derivable a partir de los axiomas de este último mediante la aplicación de una serie de reglas que únicamente se refieren a la estructura de las fórmulas. Naturalmente, dichas reglas sólo podrán tomar en cuenta la estructura en cuestión en la medida en que resulte significativamente relevante. Esto es, las reglas no se preocupan para nada de distinguir entre versiones superficialmente diferentes de los signos que pudieran ser pronunciadas o transcritas por diferentes personas. Pero ello sólo quiere decir que las reglas pasan por alto aquellas diferencias a las que no se ha atribuido ninguna significación, no que las reglas resulten en sí mismas incomprensibles sin referencia a la significación de los signos. Para servirnos de una distinción bien conocida desde Gödel, podríamos decir que, en la presentación de un cálculo, tan sólo operamos con reglas sintácticas, más bien que semánticas, destinadas a gobernar nuestro uso de los signos o, para decirlo *grosso modo*, destinadas a regular las relaciones de esos signos entre sí más bien que sus relaciones con el mundo extralingüístico. Ahora bien, nada hay que impida a un enunciado referirse a su propia estructura. Si un hombre afirma «La oración que estoy profiriendo en estos momentos consta de doce palabras», su afirmación no sólo no comporta ninguna paradoja sino que es verdadera. Lo que de

[17] J. N. Frindlay propone un ejemplo parecido a éste en "Goedelian Sentences: A Non-numerical Approach", *Mind*, LI (1942). pp. 259-65.

defectuoso hay en «Lo que ahora digo es verdad» no es simplemente que esta afirmación se refiera a sí misma; pues, como algunos lógicos medievales supieron ver, la autorreferencia pudiera resultar inofensiva. Su defecto radica más bien en el intento de hablar acerca de su propio significado, en lugar de limitarse simplemente a expresar un significado, con lo que acabará por verse enteramente despojada de significado. Cuando, en cambio, construimos una oración que afirma su propia indemostrabilidad en un cierto sistema, sorteamos esa dificultad, puesto que la indemostrabilidad dentro de un cálculo —a diferencia de la verdad y la falsedad— es una propiedad a la que cabe prestar atención haciendo abstracción del significado. La distinción entre una y otra propiedad es, de hecho, esencial al modo formalista de proceder defendido por Hilbert en el dominio de la matemática, aunque no en el de la metamatemática. Y si, por lo demás, encontramos chocante la interpretación sintáctica de $\mathscr{G}$, la razón de nuestra extrañeza acaso estribe en que continuamos aferrados al común modo de pensar según el cual la propiedad de ser demostrable (y, análogamente, la de ser indemostrable) corresponde a las proposiciones más bien que a las fórmulas.

La importancia de $\mathscr{G}$ radica en permitirnos demostrar dos teoremas sumamente interesantes: (1) que, si $\mathscr{G}$ es ω-consistente, habrá de ser incompleto, con $\mathscr{G}$ como fórmula indecidible; y (2) que, si $\mathscr{P}$ es consistente, la consistencia de $\mathscr{P}$ no podrá ser probada dentro de $\mathscr{P}$. Considerémoslos en lo que sigue con algún detalle.

(1) *Si $\mathscr{P}$ es ω-consistente, habrá de ser incompleto, con $\mathscr{G}$ como fórmula indecidible.* Supongamos, en primer término, que $\mathscr{G}$ pueda ser probada dentro de $\mathscr{P}$. En ese caso, tendrá que haber algún número que sea el número de una prueba de $\mathscr{G}$. Mas lo que $\mathscr{G}$ asevera es precisamente la inexistencia de tal número, con lo que nuestra hipótesis conduce a una contradicción consigo misma. En virtud del principio de contraposición estamos, por lo tanto, autorizados a decir que, si $\mathscr{P}$ es consistente en el sentido ordinario de no albergar en su interior ninguna fórmula conjuntamente con su negación, $\mathscr{G}$ no resultará susceptible de prueba dentro de $\mathscr{P}$. Mas nada hay en cuanto hasta aquí llevamos dicho que demuestre que, si $\mathscr{P}$ es consistente, $\mathscr{G}$ no pueda ser contraprobada dentro de $\mathscr{P}$. Supongamos, entonces, que $\mathscr{G}$ resulta susceptible de contraprueba. Ello querría decir que, en efecto, es posible probar la negación de $\mathscr{G}$, equivalente a $(\exists x)P(x)$, donde $P(x)$ es una abreviatura de *x es el número de una prueba de $\mathscr{G}$*. Por otra parte, y dado cualquier número natural, será posible probar dentro de $\mathscr{P}$ que dicho número no es el número de una prueba de $\mathscr{G}$, esto es, podremos probar $\sim P(1), \sim P(2), \sim P(3)$, etc. Pues, por tediosa que la indagación pudiera resultar en la mayor parte de los casos, siempre será posible llegar a una decisión acerca de un determinado número particular en un número finito de pasos; y dicha decisión habrá de ser invariablemente de carácter negativo, ya que, en caso contrario, sería posible construir una prueba de $\mathscr{G}$ dentro de $\mathscr{P}$, contrariamente a lo que ya había sido establecido de antemano. Ahora bien, un sistema en el que $(\exists x)P(x)$ tenga cabida como teorema junto con $\sim P(1), \sim P(2), \sim P(3)$, etc., podrá no ser inconsistente en la acepción ordinaria de este último vocablo, pero es ciertamente insatisfactorio. La posibilidad de semejante deficiencia fue apuntada por

vez primera por P. Finsler en 1926 [18], habiéndosela bautizado con el nombre de inconsistencia-ω (por alusión a ω, el primer ordinal transfinito). Sirviéndonos una vez más del principio de contraposición, podremos decir, pues, que, si $\mathscr{P}$ es ω-consistente, $\mathscr{G}$ no admite ser refutada dentro de $\mathscr{P}$. En cuyo caso, y ya que la consistencia-ω constituye un requisito más severo que la simple consistencia, podríamos resumir nuestras conclusiones afirmando que, si $\mathscr{P}$ es ω-consistente, $\mathscr{G}$ no resultará susceptible de prueba ni de contraprueba dentro de $\mathscr{P}$, lo que es tanto como decir que $\mathscr{P}$ es incompleto [19].

(2) *Si $\mathscr{P}$ es consistente, la consistencia de $\mathscr{P}$ no podrá ser probada dentro de $\mathscr{P}$.* En este punto sólo se necesita tomar en consideración la simple consistencia; pues, si es imposible probar la simple consistencia, será *a fortiori* imposible probar la consistencia-ω. Ahora bien, nosotros ya hemos demostrado que, si $\mathscr{P}$ es consistente, $\mathscr{G}$ no puede ser probada dentro de $\mathscr{P}$; de donde, como es lógico, se sigue que, si $\mathscr{P}$ es consistente, $\mathscr{G}$ ha de ser verdadera, puesto que lo que $\mathscr{G}$ enuncia es que no puede ser probada. Pero el argumento mediante el que nos hemos asegurado de esto último es un argumento informal. A los efectos del segundo teorema de Gödel sería necesario demostrar que, si $\mathscr{C}$ es una fórmula de $\mathscr{P}$ que en su interpretación sintáctica establece la consistencia de $\mathscr{P}$, el condicional filónico que tenga a $\mathscr{C}$ por prótasis y a $\mathscr{G}$ por apódosis puede ser probado dentro de $\mathscr{P}$. La demostración no es difícil en principio, pero resulta inevitablemente tediosa, por lo que no vamos a tratar de reproducirla aquí. Del lema en ella establecido se sigue de inmediato el segundo teorema. Pues, si fuera posible probar la consistencia de $\mathscr{P}$ dentro de $\mathscr{P}$, tendría también que ser posible probar $\mathscr{G}$, lo que, como sabemos, no es el caso. Y hasta cabría decir que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{G}$ son equivalentes, puesto que $\mathscr{P}$ no sólo contiene como teorema el condicional arriba mencionado, sino asimismo su converso. Al proclamar su propia indemostrabilidad, $\mathscr{G}$ ofrece un ejemplo revelador de que $\mathscr{P}$ no permite la demostración en su interior de toda fórmula; y eso es tanto como decir que $\mathscr{P}$ no es inconsistente en la acepción ordinaria del vocablo.

El segundo de estos teoremas es interesante por poner de relieve que el programa hilbertiano nunca podría ser consumado tal y como se hallaba originariamente concebido. $\mathscr{P}$ parece encerrar recursos suficientes para desarrollar toda suerte de argumentaciones comúnmente llamadas finitistas y, sin embargo, no permite una prueba metamatemática de su propia consistencia. En consecuencia, tampoco permitirá *a fortiori* una prueba metamatemática de la consistencia de ningún sistema más ambicioso del que pudiera constituir un apartado. Sin duda puede haber argumentaciones que excedan del alcance de $\mathscr{P}$ y mediante las cuales quepa probar que $\mathscr{P}$ (y acaso sistemas matemáticos más ricos que este último) se halla libre no sólo de simple inconsistencia sino también de inconsistencia-ω. Con posterioridad a Gödel, G. Gentzen logró de hecho una prueba semejante valiéndose de la inducción transfinita [20]. Pero siempre tendrá que haber

---

18 "Formale Beweise und die Entscheidbarkeit" en *Mathematische Zeitschrift*, XXV (1926), pp. 676-82.

19 En su trabajo "Extensions of Some Theorems of Gödel and Church", *Journal of Symbolic Logic*, I (1936), pp. 87-91, J. B. Rosser demostró el teorema más fuerte de que si $\mathscr{P}$ es simplemente consistente, habrá de ser igualmente incompleto.

20 "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Annalen*, CXII (1936), pp. 493-565.

algún sistema matemático que aceptemos como satisfactorio sin una prueba independiente de su carencia de contradicción, y la argumentación de Gödel demuestra que ese sistema habrá de ser al menos más rico que $\mathscr{P}$. La reflexión acerca de estos resultados podría llevar incluso a sospechar si no habrá algo radicalmente mal concebido en el intento formalista de asegurar la respetabilidad de un sistema matemático sin preocuparse de encontrar una interpretación del mismo intuitivamente aceptable. Gödel, no obstante, no pretende llegar a tales conclusiones. Por el contrario, advierte expresamente que sus resultados no son incompatibles con el programa de Hilbert, puesto que pudiera haber una prueba finitista de consistencia que no admita ser presentada en $\mathscr{P}$; pero no explica qué uso hace del adjetivo «finitista» en este contexto.

Mientras que el segundo de nuestros dos teoremas reviste una más obvia relevancia para las controversias relativas a la fundamentación de la matemática, la importancia del primero es aún más decisiva por revelar una curiosa y hasta entonces insospechada propiedad de la aritmética: a saber, la de no poder ser nunca completamente formalizada. En orden a aclarar este punto, consideremos una vez más la construcción de $\mathscr{G}$.

Lo que la fórmula enuncia en su interpretación sintáctica es que no puede ser probada en $\mathscr{P}$; y ya que, en rigor, no cabe probarla ni contraprobarla en $\mathscr{P}$, puede servir de ejemplo para probar la incompletud de $\mathscr{P}$. ¿Qué sucedería ahora si tratásemos de superar esta deficiencia de $\mathscr{P}$ añadiéndole $\mathscr{G}$ como un nuevo axioma? $\mathscr{G}$ resultaría entonces susceptible de prueba en el trivial sentido en que un axioma puede considerarse susceptible de prueba por el hecho de seguirse de sí mismo, pero ello tendría que acontecer forzosamente en un nuevo sistema $\mathscr{P}'$, cuya incompletud podría a su vez ser demostrada por medio de la construcción de una nueva fórmula de Gödel, a saber, $\mathscr{G}'$. En la construcción de $\mathscr{G}$ nos servíamos de una expresión predicativa $Bew(x)$ definida por referencia a los números asociados a los axiomas de $\mathscr{P}$. Cuando tratemos ahora de construir una fórmula indecidible en $\mathscr{P}'$, tendremos naturalmente que hacer uso de una nueva expresión predicativa —a saber, $Bew'(x)$— definida por referencia a los números asociados a los axiomas de $\mathscr{P}'$, incluido el número asociado a $\mathscr{G}$. Pero, de no hacerlo así, podríamos proceder como en la construcción de $\mathscr{G}$; y, si $\mathscr{P}'$ fuera ω-consistente, el resultado sería indecidible en $\mathscr{P}'$ por razones análogas a las aducidas en la prueba del teorema (1). Y la cosa no acaba aquí; pues la estratagema de añadir la última fórmula indecidible como un nuevo axioma podría ser repetida *ad infinitum*, y siempre con el mismo resultado. En resumidas cuentas, pues, la argumentación de Gödel no sólo demuestra que $\mathscr{P}$ es incompleto, sino asimismo que es incompletable. No quiere ello decir que haya una concreta fórmula matemática que nunca pueda ser probada ni contraprobada por algún procedimiento, sino sólo que sería vano esperar dar con un *sistema formal* capaz de abarcar la totalidad de la aritmética intuitiva.

La incompletabilidad de la aritmética formal no presentaría caracteres tan dramáticos si las fórmulas recalcitrantes a nuestros esfuerzos por demostrarlas hubieran de ser siempre enunciados de índole reflexiva como los construidos por Gödel. Pero la posibilidad de construir esos enunciados peculiarmente indecidibles sólo nos interesa como síntoma de un género de incompletud inevitable en cualquier repertorio axiomático de la teoría

de números. Tarski la ha bautizado con el nombre de incompletud-ω en función de su relación con la inconsistencia-ω [21]. Pues si $P(x)$ es una abreviatura de *x es el número de una prueba de* $\mathscr{G}$, será posible, como sabemos ya, probar dentro de $\mathscr{P}$ todas y cada una de las fórmulas que integran la serie $\sim P(1)$, $\sim P(2)$, $\sim P(3)$, etc., pero no así en cambio $(x)\ \sim P(x)$, equivalente por su parte a $\mathscr{G}$. Es decir, $\mathscr{P}$ carecería de recursos para llevar a cabo una generalización que —desde la perspectiva no-formalizada del sentido común— parecería perfectamente natural. Si, en lugar de limitarnos a añadir $\mathscr{G}$ como un nuevo axioma, ampliásemos nuestro formalismo adicionándole todo un nuevo aparato demostrativo que nos permita obtener $\mathscr{G}$, y por tanto $\mathscr{G}$, como teorema, estaríamos en posesión de un instrumento más potente para los propósitos ordinarios de la aritmética. Su principal novedad vendría en tal caso constituida por el uso de axiomas que contengan variables de un tipo superior al de las que intervienen en la teoría numérica de $\mathscr{P}$; y Gödel ha mostrado que ello no sólo habría de permitirnos demostrar fórmulas consideradas hasta aquí como indemostrables, sino asimismo acortar notablemente la demostración de buen número de fórmulas obtenidas con anterioridad [22]. Pero dentro de este nuevo sistema volvería a ser posible construir una fórmula indecidible, lo que replantearía todo el proceso y lo haría prolongarse *ad infinitum*.

En la teoría de números contamos con una serie de famosas proposiciones que han resistido durante siglos todos los intentos de los matemáticos por probarlas o contraprobarlas, tal y como sucede por ejemplo con el aserto de Fermat de que no hay cuatro números naturales x, y, z, n mayores que 0 y tales que $x^{n+2}+y^{n+2}=z^{n+2}$, la conjetura de Goldbach de que todo número par mayor que 2 puede representarse como la suma de dos primos y la hipótesis de que hay infinitos pares de primos p y q tales que $p+2=q$. Algunas de ellas quizás hayan logrado eludir la decisión por razones del tipo de las que acaban de considerarse, esto es, porque, siendo verdaderas, requieran para su prueba de un sistema formal más rico que cualquiera de los conocidos hasta la fecha. Mas que ésta sea la situación de una proposición es algo que no podremos saber hasta haberla logrado probar en ese sistema más rico. Y, por más que nos pueda desalentar la perspectiva de embarcarnos en esa tarea, habremos de admitir que no cabe probar que ninguna de aquellas proposiciones sea *absolutamente* indecidible. Pues en orden a probar que una de ellas, pongamos por caso la conjetura de Goldbach, es absolutamente indecidible tendríamos que hacer ver que es a la vez indemostrable e irrefutable. Pero sería imposible probar que la conjetura de Goldbach es irrefutable sin ofrecer al mismo tiempo una demostración de la misma. La razón de ello es que toda formalización de la teoría numérica, por simple que aquélla sea, tendrá que posibilitar un seguro, aunque enojoso, procedimiento por el que un día poder contraprobar la conjetura de Goldbach si esta última es falsa: a saber, el procedimiento de comparar uno tras otro cada número par mayor que 2 con la suma de cada par de primos menores que él. Ahora bien, demostrar que la conjetura de Goldbach no puede ser contraprobada en modo alguno sería demostrar

---

21 "Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XL (1933), pp. 97-112.

22 "Über die Länge der Beweise", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, VII (1936), pp. 23-24.

que tampoco lo puede ser por este procedimiento, lo que equivaldría a demostrar que es verdadera. En cambio, no parece evidente que una prueba de la indemostrabilidad de la conjetura de Goldbach constituya a la vez una prueba de la existencia de un contraejemplo. Este es el punto clave de la problemática suscitada por los alegatos de Brouwer.

En su trabajo, Gödel consiguió demostrar el teorema de mayor alcance según el cual, para cualquier clase κ ω-consistente que sólo contenga fórmulas de $\mathscr{P}$ y sea recursiva en un sentido que habremos de explicar más adelante, ha de existir una fórmula obtenida por la clausura universal de un signo predicado de carácter recursivo y tal que ni ella ni su negación sean derivables a partir de κ dentro de $\mathscr{P}$. Con el fin de evitar la introducción de la noción de recursividad antes de que sea imprescindible hacerlo así, no hemos tratado de reproducir todos los lemas requeridos por la prueba de Gödel en su desarrollo completo, habiendo confinado nuestra atención en esta primera aproximación al caso especial en el que κ no añada nada a los axiomas de $\mathscr{P}$. Como el propio Gödel ha apuntado, cabría dar un paso más en esta línea de simplificación y aseverar la esencial incompletud de cualquier sistema, como el de los *Principia Mathematica* o la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo, dentro del cual sea posible derivar los axiomas de Peano por medio de apropiadas definiciones de «0» y «siguiente de». Pues cualquiera de esos sistemas alojará de hecho a $\mathscr{P}$ en su interior y habrá de ser, por consiguiente, tan incompletable como $\mathscr{P}$. Este descubrimiento no puede por menos de ejercer, como es fácil adivinar, una importante repercusión sobre el programa logicista de Frege y sus seguidores.

En el último capítulo de su *Introduction to Mathematical Philosophy*, Lord Russell escribía:

> «Si todavía hay quien no admita la identidad de la lógica y la matemática, podemos desafiarle a que nos muestre en qué punto de la cadena de definiciones y deducciones de los *Principia Mathematica* considera que concluye la lógica y comienza la matemática» [23].

Desde Gödel, parece razonable responder que la lógica no se extiende más allá de la teoría de la cuantificación. Cuando decimos que la aritmética y, con ella, todos los llamados cálculos funcionales de orden superior, así como todas las versiones de la teoría de conjuntos, son esencialmente incompletos, estamos efectivamente admitiendo que esas teorías envuelven alguna noción, o más de una, de la que no cabe ofrecer una exhaustiva caracterización mediante el establecimiento de una serie de reglas de inferencia; y ésta parece constituir una buena razón para excluirlas del dominio de la lógica. Desde cualquier punto de vista que enfoquemos la cuestión, la lógica ha de ser considerada como el apartado básico y fundamental de esa variopinta familia de teorías deductivas a la que damos el nombre de matemática, puesto que se halla presupuesto por todas ellas. Pero carecería de objeto afirmar la posibilidad de reducir toda la matemática a la lógica si, al mismo tiempo, hubiera que admitir que la lógica incluye dentro de sí todos y cada uno de los diversos apartados de la matemática. Y, sin embargo, esto es lo que tendría hoy que decir un seguidor de Frege. En los días de Frege, el ámbito de la lógica no se hallaba todavía delimitado

23 Op. cit., pp. 194-5.

con precisión y la tesis logicista podía parecer plausible a sus contemporáneos por el hecho de resultarles fácil concebir el paso de la teoría de la cuantificación a la teoría de conjuntos y la aritmética. Mas los descubrimientos de Gödel han puesto de relieve una profunda diferencia entre la teoría de la cuantificación, que es completa, y la teoría de conjuntos, que no lo es. En beneficio de la claridad parece, por lo tanto, preferible reservar para la primera la denominación de «lógica», y esto es de hecho lo que hacen la mayor parte de los matemáticos cuando se hallan enfrascados en sus ocupaciones cotidianas. Para decirlo en dos palabras, lo que hemos dado en llamar lógica general por ocuparse de la noción de generalidad parece asimismo merecer ese título por no dejar fuera de sí nada que sea propio de la lógica, excepción hecha del expreso tratamiento de la modalidad que descansa en el tránsito de las reglas de primer orden a las de segundo orden.

4. El problema de la decisión.

Para la lógica primaria o proposicional contamos con un procedimiento o regla mecánica de decisión mediante el que poder determinar si cualquier esquema dado es o no válido. Para ello reduciremos este último a su forma normal conjuntiva, comprobando a continuación si cada uno de los miembros de la conjunción en que consiste dicha forma contiene alguna disyunción que responda a la estructura $P \vee \sim P$, en cuyo caso se dirá que el esquema originario es válido (o tautológico), no siéndolo en caso contrario. Alternativamente, podremos construir la tabla de verdad de la correspondiente fórmula y averiguar si ésta recibe el valor *verdad* para todas las posibilidades veritativas enumeradas. Es obvio que la viabilidad de tales técnicas depende del carácter finito del repertorio de posibilidades que haya de tomarse en consideración. Ninguna fórmula de la lógica primaria podría contener más que un número finito de letras esquemáticas: y, si dicho número es n, sólo tendremos 2^n posibilidades veritativas a considerar cuando tratemos de determinar la validez de la fórmula en cuestión. La situación es muy diferente en la lógica general, pero, en principio, parece natural preguntarse si no cabría también hallar en ella algún procedimiento decisorio mediante el que determinar (*a*) si una fórmula dada es o no es universalmente válida y (*b*) si, en caso de no serlo con carácter universal, lo sería para este o aquel dominio, si lo hay, de una u otra magnitud. Análogos problemas se plantean en relación con la satisfacibilidad de las fórmulas, pero —por las razones explicitadas en una anterior sección— no necesitaremos hacerlos objeto de examen independiente.

Enseguida veremos que no cabe ofrecer ninguna solución de tipo general al problema de la decisión en aquel segundo gran apartado de la lógica, pero se han encontrado procedimientos decisorios para un cierto número de casos especiales, hallándose recogidos tales resultados en el inventario publicado por W. Ackermann en 1954 bajo el título de *Solvable Cases of the Decision Problem* [24]. Aunque nos sea imposible considerarlos a todos ellos en detalle, po-

[24] Un compendio de tales descubrimientos se puede asimismo encontrar en A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, I (1956), § 46, junto con un cierto número de notas históricas.

dría ser útil registrar los principales hallazgos acompañándolos de un breve comentario.

El problema de la decisión ha podido ser resuelto para todo esquema bien formado que

(1) sólo contenga letras funcionales monádicas,
o (2) pueda ser reducido a una forma normal prenexuada cuyo prefijo no contenga:
  (*a*) ningún cuantificador existencial
  o (*b*) ningún cuantificador universal
  o (*c*) ningún cuantificador existencial delante de un cuantificador universal
  o (*d*) más que un cuantificador existencial
  o (*e*) más que dos cuantificadores existenciales que no se hallen separados entre sí por ningún cuantificador universal,
o (3) pueda ser reducido a una forma normal prenexuada en la que
  (*a*) la matriz (esto es, la expresión que sigue al prefijo) sea una disyunción de componentes elementales y sus correspondientes negaciones o quepa reducirla a dicha forma,
  o (*b*) el prefijo sea de la forma $(\exists x_1) \ldots (\exists x_m)\ (y_1) \ldots (y_n)$ y todo componente elemental de la matriz que contenga alguna de las variables $x_1, \ldots, x_m$ contenga o bien todas las variables $x_1, \ldots, x_m$ o bien al menos una de las variables $y_1, \ldots, y_n$,
  o (*c*) el prefijo concluya con $(z_1) \ldots (z_n)$ y todo componente elemental de la matriz que contenga alguna de las variables que intervienen en el prefijo contenga al menos una de las variables $z_1, \ldots, z_n$,
  o (*d*) el prefijo sea de la forma $(\exists x)(y)(\exists z_1) \ldots (\exists z_n)$, donde $n \leqslant 4$, y la matriz sea de la forma $G(x,y) \supset H(z_1, \ldots, z_n)$, con la letra funcional diádica G como única letra funcional en la versión completa o desarrollada de $H(z_1, \ldots, z_n)$.

El problema de la decisión para el cálculo funcional monádico ha sido resuelto por diversos autores, independientemente los unos de los otros. Pero el método seguido a estos efectos por Bernays y Schönfinkel acaso sea el más interesante. De acuerdo con un teorema de estos autores reseñado en una sección anterior, cualquier esquema del cálculo funcional monádico que sea satisfacible de algún modo lo será en un dominio de 2^n individuos, donde n represente el número de las diferentes letras funcionales contenidas en el esquema. Pero un esquema es universalmente válido si, y sólo si, su negación no puede ser satisfecha en ningún dominio, de suerte que un esquema del cálculo funcional monádico que contenga n letras funcionales será universalmente válido si, y sólo si, su negación no puede ser satisfecha en un dominio de 2^n individuos, esto es, si, y sólo si, el propio esquema es válido en un dominio de 2^n individuos. Dado que la cuantificación universal o la cuantificación existencial ejercidas sobre un dominio de 2^n individuos pueden ser respectivamente reemplazadas por una conjunción o una disyunción de 2^n elementos, siempre podremos contrastar la validez de un esquema funcional monádico eliminando todos sus cuantificadores en favor

de las conjunciones o disyunciones apropiadas y aplicando a continuación la técnica de las tablas de verdad a la fórmula resultante. En la práctica, sin embargo, resulta más cómodo seguir el método de H. Behmann y proceder a transformar la fórmula originaria en un complejo veritativo-funcional cada uno de cuyos elementos constitutivos sea una fórmula existencial del tipo de $(\exists x)(Fx.\sim Gx.Hx)$, donde F, G y H representen una selección de las letras funcionales monádicas del esquema originario, o la negación de dicha fórmula existencial [25]. Los métodos diagramáticos utilizados por J. Venn, en su *Symbolic Logic* de 1881, y Lewis Carroll, en su *Symbolic Logic* de 1896, para determinar la validez de los silogismos constituyen efectivas anticipaciones de esta técnica.

Con la admisión de letras funcionales diádicas y otras letras funcionales poliádicas, la lógica general se torna más complicada, pero seguiría siendo posible hallar esquemas que sean universalmente válidos si lo son en un dominio finito. Así, un esquema (x_1) ... $(x_m)M(x_1, \ldots, x_m)$ que no contenga otros cuantificadores que cuantificadores universales será universalmente válido si lo es en un dominio de m individuos. Pues si no fuera válido en algún dominio de más de m individuos, cabría seleccionar de tal dominio m individuos $A_1, \ldots, A_m$ para los que $M(A_1, \ldots, A_m)$ sea falsa, contrariamente a la suposición inicial de que la fórmula originaria era válida para cualquier dominio de m individuos. De modo semejante, un esquema $(\exists x_1)$ ... $(\exists x_m)$ $M(x_1, \ldots, x_m)$ que no contenga otros cuantificadores que cuantificadores existenciales será universalmente válido si lo es en un dominio de un individuo. Pues si no fuera universalmente válido, tampoco lo sería la fórmula más fuerte $(\exists x)M(x, \ldots, x)$ y tendría que haber, así, algún dominio de un único elemento, llamado acaso A, para el que $M(A, \ldots, A)$ sea falsa, contrariamente a la suposición inicial de que la fórmula originaria era válida para cualquier dominio de un único individuo. Se ha de advertir, no obstante, que, si la versión completa de $M(x_1, \ldots, x_m)$ contiene fórmulas integrantes que respondan a la estructura $\sim (x_p = x_q)$, podrá haber algún número k tal que la fórmula originaria sea válida en todos los dominios de k o más elementos, pero no así en ninguno de menos de k elementos. Determinar cuál sea el número k en un caso semejante ya es asunto más arduo.

Más aún, un esquema (x_1) ... $(x_m)(\exists y_1)$ ... $(\exists y_n)M(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ en el que todos los cuantificadores universales precedan a la totalidad de los cuantificadores existenciales será universalmente válido si lo es en un dominio de m individuos. Pues, si el esquema originario es válido para cualquier dominio de m individuos, también tendrá que serlo la fórmula (x_1) ... $(x_m)N(x_1, \ldots, x_m)$, donde $N(x_1, \ldots, x_m)$ represente una abreviatura de la disyunción de todas las posibles fórmulas $M(x_1, \ldots, x_m; x_{i1}, \ldots, x_{in})$ en las que las variables $y_1, \ldots, y_n$ de la fórmula originaria hayan sido reemplazadas de algún modo por variables del conjunto $x_1, \ldots, x_m$. Mas si (x_1) ... $(x_m)N(x_1, \ldots, x_m)$ es válida en un dominio de m individuos, tendrá que ser universalmente válida por incluirse en el primero de los casos especiales arriba mencionados y, con ella, lo será la fórmula originaria a la que implica.

---

25 "Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem", *Mathematische Annalen*, LXXXVI (1922), p. 163-229.

Los resultados precedentes se hallan todos ellos contenidos en el trabajo de Bernays y Schönfinkel ya citado. Los otros dos casos de nuestro segundo grupo no son tan fáciles de tratar, pero 2(*d*) fue resuelto en 1928 por W. Ackermann [26] y T. Skolem [27], trabajando cada uno por su cuenta, y K. Gödel [28], L. Kalmar [29] y K. Schütte [30] resolverían poco después 2(*e*), asimismo con mutua independencia. En cada uno de estos casos, el problema podría ser reducido al del cálculo funcional monádico por medio de una serie de ingeniosas transformaciones. Pero se trata de los últimos casos que podrían ser (I) descritos por exclusiva referencia a la composición de sus prefijos en una forma normal prenexuada y (II) resueltos por medio de una prueba que acredite la suficiencia de su contrastación en algún dominio finito. La razón de ello, descubierta por Schütte, es que, para todo prefijo que no figure en nuestra lista (esto es, para todo prefijo que cuente al menos con dos cuantificadores existenciales separados entre sí por al menos un cuantificador universal y para todo prefijo que posea al menos tres cuantificadores existenciales seguidos, sea inmediatamente o no, de un cuantificador universal) será posible hallar esquemas válidos en cualquier dominio finito pero no en un dominio numerablemente infinito. Ello no prueba ciertamente que sea imposible hallar alguna solución para cualquiera de los casos excluidos, pero el resultado de Schütte pone en claro que, si la hay, habrá de ser buscada por otro procedimiento.

En nuestro tercer grupo hemos reunido algunos casos para los que podrían encontrarse soluciones atendiendo tanto a la estructura de las matrices cuanto a la composición de los prefijos, pero la lista no es ni sistemática ni exhaustiva. Y difícilmente cabría que lo fuera, puesto que toda derivación de un teorema matemático a partir de axiomas equivale, en efecto, al hallazgo de un esquema universalmente válido ejemplificado por $A \supset T$, donde A será la conjunción de los axiomas y T el teorema. Lo que se ha seleccionado allí son solamente unos cuantos casos especialmente interesantes en razón de su generalidad. 3(*d*) reviste, de entre ellos, la peculiaridad de incluir axiomas que no resultan válidos en un dominio infinito aunque lo sean en todo dominio finito.

Además de soluciones al problema de la decisión para una serie de casos especiales, se ha podido también hallar un cierto número de reducciones a casos resolubles. Cada una de ellas consiste en un procedimiento que permite construir para un esquema dado otro esquema de una determinada clase que sea universalmente válido si, y sólo si, el primero es universalmente válido, denominándose la clase de los esquemas a que pueden reducirse los demás con el nombre de *clase reductiva* o término de la reducción (*reduction class*). La más conocida de ellas es la clase de los esquemas que se hallan en forma normal prenexuada skolemiana, pero no faltan otras como son, por ejemplo, la clase de los esquemas con una única letra funcional, la clase de los esquemas que sólo contienen letras funcionales

26 "Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke", *Mathematische Annalen*, C (1928), pp. 638-49.

27 "Über die mathematische Logik", *Norsk Matematisk Tidsskrift*, X (1928), pp. 125-42.

28 "Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, II (1932), pp. 27-28; "Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls", *Monatschefte für Mathematik und Physik*, XL (1933), pp. 433-43.

29 "Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten", *Mathematische Annalen*, CVIII (1933), pp. 466-84.

30 "Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, CIX (1934), págs. 572-603.

diádicas y hasta clases de ámbito notablemente más restringido, como la de los esquemas en forma normal prenexuada skolemiana con un prefijo que responda a la estructura $(\exists x_1) \ldots (\exists x_m)(y)$ y una matriz que únicamente contenga una letra funcional diádica [31]. Las reducciones en cuestión pueden ser útiles para abordar algunos problemas especiales; pero, a la vista del descubrimiento de A. Church a que nos vamos a referir, revisten asimismo interés por indicar cuáles sean los límites de nuestras posibilidades al respecto.

Bajo el influjo de erróneas teorías de la lógica, los filósofos han dado en ocasiones por sentado que bastaría un simple procedimiento mecánico para identificar a todos y cada uno de los truísmos de la lógica. Wittgenstein, por ejemplo, llegó a escribir:

«Nuestro principio fundamental es que toda cuestión que pueda resolverse por medio de la lógica, podrá ser resuelta sin más... Es posible... dar de entrada una descripción de todas las 'verdaderas' proposiciones lógicas. Por lo que en lógica no podrá haber *jamás* sorpresas... La prueba en lógica es sólo un expediente mecánico para facilitar el reconocimiento de la tautología, allí donde esta última revista alguna complicación» [32].

Y los matemáticos, por su parte, han pensado más de una vez que Frege había de estar equivocado porque los problemas de la teoría numérica no resultan todos ellos resolubles por medio de reglas mecánicas de procedimiento como las que, en opinión de esos autores, habrían de bastar para zanjar todas las cuestiones de la lógica. En el trabajo en que probara la incompletabilidad de la aritmética formal, Gödel puso por vez primera en claro que el descubrimiento de un procedimiento universal de decisión para la lógica general sería suficiente para permitir la solución de una serie de célebres problemas irresueltos de la teoría de números, como el relativo a la conjetura de Goldbach. En el contexto en que fue formulada, esta observación no pretendía prestar apoyo a ninguna filosofía de la matemática en particular, sino más bien trataba de sugerir la inanidad de todo intento por descubrir un procedimiento de decisión universal para la lógica general. La imposibilidad de tal descubrimiento pudo probarse, pocos años más tarde, gracias a un desarrollo de la propia técnica de Gödel. En orden a hacernos cargo de la argumentación que conduce a dicha conclusión, habremos de considerar el concepto gödeliano de función recursiva mencionado, pero no explicitado, en la última sección.

En el apartado relevante para nuestros efectos de su artículo de 1931, Gödel parte de una caracterización muy general de la familiar noción de definición recursiva. Una función de la teoría numérica $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, esto es, una función cuyos argumentos y valores sean todos por igual números naturales, quedará *recursivamente definida* a partir de las funciones de la teoría numérica $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $\mu(x_{n+1})$ si, para todos los números naturales $x_2, \ldots, x_n$ y k, tenemos según Gödel

$$\phi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$$
$$\phi(k+1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(k, \phi(k, x_2, \ldots, x_2), x_2, \ldots, x_n)$$

[31] La historia de estas y otras reducciones se puede encontrar en la *Introduction to Mathematical Logic*, I, § 47, de A. Church.

[32] *Tractactus Logico-Philosophicus*, 5.551, 6.125, 6.1251, 6.1262.

A continuación, se sirve de esta última noción para introducir un nuevo concepto. Una función de la teoría numérica es *recursiva* —nos dice— si hay una serie finita de funciones de la teoría numérica ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_n que concluya con ϕ y se halle constituida de manera que toda función de la serie (*a*) quede recursivamente definida a partir de dos de las funciones precedentes en la serie, o (*b*) haya sido derivada a partir de una u otra de las funciones precedentes empleando algunas de las funciones precedentes como argumento de esta última, de modo que tengamos por ejemplo

$$\phi_k(x_1, x_2)=\phi_p(\phi_q(x_1, x_2), \phi_r(x_2)),$$

donde p, q, $r<k$, o (*c*) sea una constante, o (*d*) se trate de la función siguiente en la serie. La inclusión de estas dos últimas cláusulas en la definición de una función recursiva revela que Gödel no sólo está pensando en funciones definidas recursivamente (esto es, por medio de fórmulas de recursión) sino asimismo en las funciones presupuestas por tales fórmulas. El rasgo relevante compartido en común por las funciones que llama recursivas es el de que los valores de cada una se hallen fijados por una serie de ecuaciones iniciales, bien sea directamente, como en los últimos casos arriba mencionados, bien sea indirectamente, cuando las ecuaciones iniciales sirvan como premisas para el cálculo de valores mediante las dos simples operaciones de sustitución de variables y reemplazamiento de miembros equivalentes por miembros equivalentes. Las recursiones revisten importancia a este respecto porque únicamente ellas podrían salvar de la trivialidad al concepto de función recursiva. Por otra parte, ninguna función podría ser definida por medio de fórmulas de recursión sin hacer mención de la constante 0 y la función siguiente en la serie.

Procediendo a una nueva extensión de su práctica, Gödel pasa a decir que una relación (función proposicional) de n números naturales $R(x_1, ..., x_n)$ podrá ser llamada recursiva si hay una función recursiva de la teoría numérica $\phi(x_1, ..., x_n)$ tal que

$$R(x_1, ..., x_n) \text{ si, y sólo si, } \phi(x_1, ..., x_n)=0.$$

En el caso especial de que $n=1$ podremos llamar a R una propiedad recursiva y decir asimismo que la clase por ella determinada es recursiva. Pero, en líneas generales, conviene hablar de funciones y relaciones recursivas en virtud de la estrecha conexión que la noción de función guarda en el pensamiento matemático con la de relación. Cuandoquiera que sea apropiado hablar de una función ϕ tal que $x=\phi(y)$, será apropiado hablar también de una relación R tal que $R(x, y)$.

Las funciones $x+y$, $x.y$, x^y y las relaciones $x=y$ y $x<y$ son todas ellas obviamente recursivas. Así, escribiendo «n'» para representar «el siguiente de n», tendremos para $x+y$ las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+0=x \\ x+n'=(x+n)', \end{cases}$$

para $x.y$ las ecuaciones:

$$\begin{cases} x.0=0 \\ x.n'=xn+x, \end{cases}$$

y para x^y las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^0=0' \\ x^{n'}=x^n x. \end{cases}$$

Más aún, las funciones de verdad de la lógica proposicional admiten ser correlacionadas con funciones recursivas de la teoría numérica, lo que da pie a hacer uso de las mismas en las definiciones de funciones y relaciones recursivas. Como cabía haber esperado, los cuantificadores presentan más dificultades, pero Gödel demuestra que también nos podríamos servir de ellos para la definición de funciones y relaciones recursivas siempre que los acompañemos de restricciones que nos permitan en principio desarrollar todos los casos relevantes. Así pues, dadas una función recursiva expresada por $\phi(x)$ y una relación recursiva expresada por $R(x,y)$, podremos definir una nueva relación recursiva escribiendo:

$$S(x, y) \equiv (\exists z)[z \leqslant \phi x.R(z, y)]$$

Cuandoquiera que se introduzcan cuantificadores en las definiciones de su sintaxis aritmetizada, se hará acompañándolos de tales restricciones, con la excepción de la última de esas definiciones —a saber, la del predicado *Bew*(x)—, en la que para el curso de la argumentación es esencial que el operador existencial aparezca irrestricto. De modo semejante, habrá que restringir invariablemente el número de casos a considerar cuando se trate de averiguar el número denotado por su signo $\varepsilon_x F(x)$, cuyo significado es el *menor número x tal que* $F(x)$, *si existe tal número, y en caso contrario 0.*

Valiéndose del aparato de su sintaxis aritmetizada, Gödel se halla en situación de probar la posibilidad de definir toda relación recursiva dentro de su sistema $\mathscr{P}$ o, más exactamente, en situación de probar que todo signo relacional de carácter recursivo con n variables posee en el sistema un número asociado tal que, si r denota dicho número y $u_1, \ldots, u_n$ denotan los números asociados a las variables, o bien la fórmula $Bew[Sb(r^{u_1,\ldots,u_n}_{Z(x_1),\ldots,Z(x_n)})]$ o bien la fórmula $Bew[Neg\ Sb(r^{u_1,\ldots,u_n}_{Z(x_1),\ldots,Z(x_n)})]$ sea verdadera para cada n-tuplo de los números naturales tomados por valores de las variables $x_1, \ldots, x_n$, según que la relación rija o no rija para dicho n-tuplo [33]. Pues una relación recursiva se dice definible en un sistema si, y sólo si, los axiomas del sistema nos permiten decidir si la relación en cuestión rige para un conjunto de números apropiado. En orden a probar nuestro teorema, Gödel supone que cada una de las relaciones recursivas de n argumentos ha de expresarse de la forma $x_1 = \phi(x_2, \ldots, x_n)$, donde ϕ representa una función recursiva de n—1 argumentos, ejercitando luego la inducción matemática a todos los posibles niveles de complejidad estructural de las funciones recursivas. A continuación, se ocupa de demostrar que todas las funciones recursivas pueden ser definidas dentro de una versión simplificada de la aritmética de Peano, a la que cabría acaso llamar $\mathscr{P}^0$, y —recíprocamente— que cualquier relación que este sistema nos permita probar o contraprobar para todo conjunto de números apropiado es recursiva [34].

La diferencia más notable entre $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^0$ es que este último no incluye variables de diferentes tipos. Pero tal diferencia comporta otras consigo. Por ejemplo, la identidad no podrá ya ser definida a la manera de los *Principia Mathematica*, sino que habrá de ser introducida independiente-

---

33 En orden a preservar las expresiones de Gödel, nos hemos apartado momentáneamente aquí de nuestras propias convenciones simbólicas, pero el sentido viene claramente dado en cada caso por el contexto.

34 Estrictamente hablando, $\mathscr{P}^0$ es la aritmética de Skolem más bien que la de Peano, dado que —como se verá a continuación— no contiene un axioma unitario de inducción matemática.

mente; y, dado que ni el principio de extensionalidad ni el de inducción matemática podrán ser ahora formulados mediante un único enunciado, habrá que reemplazar a cada uno por una infinidad de axiomas incluidos bajo un esquema común. Para expresarlo en términos positivos y sirviéndonos de la notación más extendida (esto es, aquella en la que x' represente *el siguiente de* x, los signos $=$, $+$ y . retengan sus sentidos aritméticos usuales y la universalidad se exprese, cuando ello sea posible, mediante variables libres), $\mathscr{P}^{\omega}$ será el sistema resultante de añadir a la lógica general los axiomas:

A1. Todos los casos particulares de $x=y \supset (Fx \supset Fy)$
†A2. $x=x$
B1. $\sim(x'=0)$
B2. $x'=y' \supset x=y$
B3. Todos los casos particulares de $[F_o .(x)(Fx \supset Fx')] \supset (x)Fx$
C1. $x+0=x$
C2. $x+y'=(x+y)'$
D1. $x.0=0$
D2. $x.y'=x.y+x.$

En esta lista, los axiomas del grupo A corresponden a los axiomas fregeanos de identidad y los del grupo B a los tercero, cuarto y quinto axiomas de Peano, en tanto los axiomas de los grupos C y D son las fórmulas de recursión para la adición y la multiplicación respectivamente. A2 se ha hecho preceder de un obelisco para indicar la posibilidad de su derivación de A1 y C1 conjuntamente tomados y, por ende, su redundancia en este contexto, aunque no, por supuesto, en toda suerte de contextos.

Ya que a ciertos efectos pudiera resultar inconveniente tener que operar con un conjunto infinito de axiomas, se han emprendido intentos de construir un sistema aún más simple e igualmente adecuado para la definición de las funciones recursivas, habiendo mostrado A. Tarski, A. Mostowski y R. M. Robinson, en *Undecidable Theories* (1953) [35], la posibilidad de obtener ese sistema, llamado $\mathscr{Q}$, eliminando A1, A2 y B3 en favor de

A11. $x=y \supset (x=z \supset y=z)$
A12. $x=y \supset x'=y'$
A13. $x=y \supset x+z=y+z$
A14. $x=y \supset z+x=z+y$
A15. $x=y \supset x.z=y.z$
A16. $x=y \supset z.x=z.y$
B31. $x=0 \vee (\exists y(x=y'),$

al tiempo que se conservan los restantes axiomas de $\mathscr{P}^{\omega}$. En esta nueva lista, los axiomas A11-16, si bien se trata de casos especiales incluidos bajo el esquema de A1, resultan en su conjunto suficientes para permitir el reemplazamiento de A1 y A2 en todas las pruebas de $\mathscr{P}^{\omega}$. Pero el sistema $\mathscr{Q}$ es, no obstante, considerablemente menos potente que $\mathscr{P}^{\omega}$, dado que la potencia de B31 no es en modo alguno equivalente a la del principio de inducción matemática al que reemplaza. Por el contrario, B31 es el más débil de los

35 La primera contribución a este respecto parece haber sido la de R. M. Robinson, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, Mass. 1950), pp. 729-30.

resultados que podrían obtenerse en $\mathscr{P}^{\omega}$ haciendo uso del principio; pues lo único que afirma es que cada individuo del sistema habrá de ser idéntico a 0 ó el siguiente de algo, lo que efectivamente equivale a decir de cada uno que es un número natural.

Los descubrimientos de Gödel atraerían la atención hacia la clase de las funciones sistemáticamente susceptibles de evaluación; y Alonzo Church, sobre la base de una sugerencia oral de Gödel, propuso en 1936 la tesis de que toda función efectivamente calculable es recursiva [36]. Durante siglos había venido siendo un lugar común la creencia en la posibilidad de resolver ciertas cuestiones matemáticas por medio de procedimientos mecánicos de cálculo (o algoritmos, como a veces se los denomina, más o menos justificadamente, en memoria del matemático árabe Al-Karismi), pero el de Church constituía el primer intento por precisar aquella idea y ganó pronto general aceptación. Con anterioridad, e independientemente, Church había concebido la idea de identificar la calculabilidad efectiva con lo que llamara la *definibilidad-λ*, para descubrir finalmente la equivalencia de esta última noción con la de recursividad. Un año más tarde, A. M. Turing demostraría que otro tanto acontece con la noción de *computabilidad-mediante-una-máquina*, ya ofrecida por él como un análisis alternativo de la noción de calculabilidad efectiva [37]. La importancia de la tesis estribaba en posibilitar una nueva aproximación al problema de la decisión, de la que Church se beneficiaría para probar, en primer término, la imposibilidad de un procedimiento universal de decisión para ciertos fragmentos de la teoría de números y, como consecuencia de esto último, la imposibilidad de un procedimiento semejante para la lógica general [38]. Ya que la prueba de tales conclusiones se halla conectada con su sistema de la conversión-λ, no explicitado en este libro, no intentaremos reproducirla aquí, considerando en lugar de ella un argumento más sencillo construido por Tarski, Mostowski y Robinson sobre la base del primitivo trabajo de Tarski «The Concept of Truth in Formalized Languages» [39].

Si hubiera un procedimiento universal de decisión para $\mathscr{Q}$, tendría que permitirnos decidir si cualquier fórmula dada de $\mathscr{Q}$ es verdadera o no y, lo que es más, tendría que hacerlo así por referencia a la estructura de la fórmula en cuestión. Nada hay, por el momento, de objetable en esta hipótesis. Pues aunque, como sabemos ya, la verdad haya de adscribirse primariamente a las proposiciones, no es inapropiado hablar de la verdad de una fórmula matemática, toda vez que, en virtud de las reglas del simbolismo matemático, cada una de esas fórmulas expresa la misma proposición en todas las ocasiones de su uso. Y tampoco es inapropiado afirmar que la verdad de una fórmula matemática ha de ser reconocida, si de algún modo, en su estructura, ya que lo único que importa para la determinación de su verdad o falsedad es su significado, que las reglas del simbolismo hacen depender por entero de su estructura. Cuando decimos que una fórmula

---

36 "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory", *American Journal of Mathematics*, LVIII (1936), pp. 345-63.

37 "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, XLII (1937), pp. 230-65; "A Correction", ibid. XLIII (1938), pp. 544-6; "Computability and λ-Definability", *Journal of Symbolic Logic*, II (1937), pp. 153-63.

38 "A Note on the Entscheidungsproblem", *Journal of Symbolic Logic*, I (1936), pp. 40-41; "A Correction", ibid., pp. 101-2. Se aplican en estos trabajos a la lógica los resultados obtenidos en el artículo mencionado en la penúltima nota.

39 *Undecidable Theories*, pp. 46 s.

de $\mathcal{Q}$ es verdadera, queremos decir, pues, que es verdadera *en tanto que una fórmula de* $\mathcal{Q}$ o, para abreviar, que es verdadera *en* $\mathcal{Q}$.

Supongamos, entonces, que haya un procedimiento universal de decisión para $\mathcal{Q}$. Puesto que, en virtud de las estipulaciones de Gödel, a toda fórmula proposicional del sistema, sea verdadera o falsa, le ha de corresponder un número asociado, tendrá que haber una clase de números exclusivamente integrada por los números correspondientes a fórmulas verdaderas, con lo que nuestro procedimiento de decisión constituiría incidentalmente una regla mecánica para determinar si un número dado pertenece o no a dicha clase. Pero, de acuerdo con la tesis de Church, la existencia de una regla semejante implica que esa clase es recursiva, lo que, según un descubrimiento anteriormente mencionado, implicará a su vez la posibilidad de definir en $\mathcal{Q}$ a un predicado que la determine. Más aún, si existe un predicado tal, pongamos por caso $T(x)$, es obvio que, cuando N denote algún número asociado a una fórmula proposicional de $\mathcal{Q}$, $T(N)$ habrá de ser deducible de $\mathfrak{G}_N$ y viceversa. Es imposible, sin embargo, que dichas condiciones sean simultáneamente satisfechas. Pues si $T(x)$ es una fórmula predicativa de $\mathcal{Q}$ también lo será $\sim T(Diag(x))$ y, en el supuesto de que esta última se identificara con $\mathfrak{G}_N$, podríamos construir en el sistema una nueva fórmula $\mathfrak{G}\ Diag(N)$, o $\sim T(Diag(N))$, que exhiba las peculiaridades de la paradoja del Mentiroso. Esta última fórmula, a la que llamaremos $\mathcal{L}$ para abreviar, establece que el número denotado por $Diag(N)$ presenta la característica expresada por $\sim T(x)$, pero dicha característica sólo podría pertenecer al número de una fórmula falsa y el número denotado por $Diag(N)$ es el de $\mathcal{L}$. De modo que lo que $\mathcal{L}$ afirma es, en efecto, que $\mathcal{L}$ es falsa. Así pues, si es verdadera, ha de ser falsa; y, si es falsa, ha de ser verdadera. En orden a escapar a tal absurdo, habremos de rechazar nuestra suposición originaria y declarar en su lugar que, si $\mathcal{Q}$ es consistente, no tiene más remedio que carecer de un procedimiento universal de decisión.

Al comparar este ingenioso razonamiento con la prueba gödeliana de la incompletabilidad de la aritmética formal, son dos los puntos de interés que más destacan, aparte de las conclusiones a que se llega en él. En primer término, es de fundamental importancia para cada una de ambas argumentaciones que el sistema investigado permita la definición de la función diagonal a través del recurso de la aritmetización. El más simple de los sistemas conocidos de la teoría numérica en que es posible definir esa función, junto con todas las restantes funciones recursivas, es el llamado $\mathcal{R}$ por Tarski, Mostowski y Robinson [40]. Su contenido teórico es aún menor que el de $\mathcal{Q}$, pero no cabe presentarlo por medio de un conjunto finito de axiomas, por lo que resulta menos útil que $\mathcal{Q}$ para la ulterior investigación del problema de la decisión. En segundo término, para la validez de una y otra argumentación es esencial que haya una diferencia entre demostrabilidad y verdad incluso en aquel caso en que operemos con un sistema completamente axiomatizado en el que ambas nociones coincidan en su aplicación. Mientras que la primera de ellas podría ser definida a base de los símbolos del sistema a que se refiere, aunque no de manera que se siga su recursividad, la segunda no sería definible sin la introducción de nuevos conceptos. Para decirlo en dos palabras, la verdad en el dominio

[40] Ibid. p. 52.

de la matemática no ha de identificarse con la demostrabilidad más de lo que la verdad en el dominio de las ciencias empíricas lo pueda ser con la verificabilidad, y toda doctrina filosófica que sugiera lo contrario tendrá que estar en un error.

Acabamos de ver que no es posible contar con un procedimiento universal de decisión para $\mathcal{Q}$, por admitir este sistema en su interior la definición de la función diagonal. Pero es obvio que la adición de nuevos axiomas consistentes con los originarios no podría en ningún caso dar lugar a un sistema en que no sea posible continuar definiendo la función diagonal, lo que nos lleva a concluir la imposibilidad de un procedimiento universal de decisión para cualquier sistema —como $\mathcal{P}^{\omega}$, $\mathcal{P}$ o la teoría de conjuntos— del que $\mathcal{Q}$ constituya un apartado. Tarski expresa esto último diciendo que $\mathcal{Q}$ es una *teoría esencialmente indecidible*. La denominación resulta un tanto desafortunada (ya que, en otros contextos, cabría servirse de ella para aludir a una hipótesis cuya verdad o falsedad no hubiera modo de determinar), mas la noción es muy importante. Pues hoy se sabe bien que la carencia de un procedimiento decisorio para cualquier sistema matemático que incluya al modesto sistema $\mathcal{Q}$ no es una deficiencia que quepa corregir introduciendo un nuevo y más potente aparato demostrativo, sino una limitación insuperable. Hilbert podía tener razón al confiar en la resolubilidad de todos los problemas matemáticos, pero lo cierto es que no hay, ni podría haberlo, un método para la solución de todos los problemas. Y, por más ingenio que se derroche en el diseño de nuevas máquinas calculatorias, no será nunca suficiente para lograr aquel propósito.

Sería erróneo, no obstante, suponer que nuestro sistema sólo reviste interés por permitirnos probar la indecidibilidad de sus propias prolongaciones. Si $\mathcal{S}$ es un sistema consistente dentro del que poder interpretar a $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$ y todas sus prolongaciones consistentes carecerán también de un procedimiento universal de decisión. Por «interpretación» se entiende aquí el establecimiento de una correlación entre los signos no-lógicos de aquellos dos sistemas según es lo usual en la investigación de los sistemas axiomáticos, resultando fundamental a este respecto que $\mathcal{Q}$ sólo posea un número finito de axiomas. Por este método indirecto Tarski y sus colaboradores han logrado probar la imposibilidad de un procedimiento universal de decisión para buen número de sistemas formales, incluidas las teorías elementales de grupos, anillos, campos y retículos [41].

Por importantes que todos estos resutados puedan ser, todavía es más interesante para el lógico tomar nota de la posibilidad de servirse de $\mathcal{Q}$ para probar la indecidibilidad de la lógica general, a la que aquel sistema aloja como un apartado dentro de sí. A estos efectos resulta conveniente expresar todas las proposiciones de $\mathcal{Q}$ por medio de una nueva notación en la que

$Id(x, y)$	reemplace a $x=y$,
$Suc(x, y)$	reemplace a $x'=y$,
$Sum(x, y, z)$	reemplace a $x+y=z$,
$Prod(x, y, z)$	reemplace a $x.y=z$,

añadiéndole cuantas nuevas variables puedan ser necesarias. Conviene al mismo tiempo restaurar todos los cuantificadores que se hayan omitido

41 *Undecidable Theories*, pp. 5, 65 s.

previamente en gracia a la brevedad. De este modo, el último axioma de nuestro repertorio vendría ahora a formularse:

D2. $(x)(y)(t)(u)(v)(w)[Prod(x, t, u).\ Suc(y, t).\ Prod(x, y, v).\ Sum(v, x, w) \supset Id(u, w)]$.

Es obvio que la nueva notación arroja un cúmulo de expresiones bastante más engorrosas y menos útiles para los propósitos del cálculo que las expresiones por ellas reemplazadas, pero la traducción contribuye a poner en claro el papel desempeñado por la lógica general en el sistema. Pues, si se introduce la letra A como abreviatura de la conjunción de los axiomas especiales del sistema expresados en la nueva notación y se abrevia mediante F cualquier fórmula bien formada del sistema expresada en la misma notación, es evidente que la cuestión de si cabe probar F dentro del sistema en su totalidad quedará reducida a la cuestión de si cabe probar $A \supset F$ dentro de la lógica general. Si fuera, pues, posible especificar un procedimiento universal de decisión para la lógica general, tendríamos que ser siempre capaces de determinar mediante una regla mecánica de procedimiento si $A \supset F$ es o no un truísmo de la lógica general, determinando así si F es demostrable en $\mathfrak{Z}$. Pero ello equivaldría a contar con un procedimiento universal de decisión para $\mathfrak{Z}$, cosa que ya sabemos imposible, por lo que habremos de admitir que no puede contarse con un procedimiento universal de decisión para la lógica general.

No es sorprendente que un sistema de la aritmética formal que ya sabíamos incompleto carezca asimismo de un procedimiento universal de decisión. Pero es interesante reparar en que la lógica general, acreditada por su parte como completa (en el sentido de resultar suficiente para la demostración de todos los esquemas universalmente válidos expresables mediante el simbolismo lógico), tampoco cuenta, sin embargo, con un procedimiento semejante. Todos los truísmos de la lógica general habrán de sernos accesibles, mas nada hay que nos garantice la posibilidad de decidir en un número finito de pasos si una fórmula dada es o no es un truísmo. Esto es, por más tiempo que hayamos invertido en el empeño sistemático —pero infructuoso— de dar con una prueba en tal sentido, todavía pudiera prolongarse la tarea de encontrarla.

5. El puesto de la lógica entre las ciencias.

En la antigüedad fue una cuestión muy debatida la de si la lógica debía ser considerada como una rama de la filosofía, según hicieron los estoicos, o simplemente como una propedéutica para los estudios filosóficos, como sostuvieron los peripatéticos. Mas la contienda entre unos y otros era poco más que una disputa terminológica, pues ambas partes contendientes coincidían en conceder a la lógica la primacía en la educación del filósofo; y si los estoicos, a diferencia de Aristóteles, la incluyeron como parte de la filosofía, fue sólo porque, en razón de su posterioridad en la historia de esta última, mostraban una más acusada sensibilidad para la presentación de sus doctrinas en forma sistemática. Lo que la mayoría de sus cultivadores han llamado lógica en los siglos siguientes es la investigación de cuestiones como las examinadas por Aristóteles en las obras que componen su *Organon* y, según hoy se ofrece a una mirada retrospectiva, la mayor novedad

de la contribución estoica no radica en una nueva demarcación de nuestra disciplina, sino en su hincapié en las relaciones entre proposiciones en cuanto diferentes de las relaciones entre universales o conceptos. Mas comoquiera que ello sea, el caso es que Aristóteles no llegó a ofrecer una caracterización precisa del ámbito de la lógica, por lo que una importante serie de cuestiones acerca de su conexión con otras ciencias hubieron de quedar pendientes de discusión hasta época reciente.

En la doctrina silogística de sus *Primeros Analíticos*, Aristóteles formula un cierto número de principios generales acerca de las relaciones entre clases —como la que llamó de *hallarse incluido en un todo* (ἐν ὅλῳ τῷ *A* εἶναι)— o entre universales —como la que llamó de «*pertenecer*» (ὑπάρχειν) o *ser predicado* (κατηγορεῖσθαι), del tipo por ejemplo de *Si A pertenece a todo B y B pertenece a todo Γ, entonces A pertenece a todo Γ*. Pero está claro que esos principios revisten importancia para él en cuanto un medio de garantizar que ciertos patrones de argumentación son válidos para todos los posibles contenidos a que quepa aplicarlos. Y su interés por estos últimos patrones obedece primordialmente a la convicción de que son necesarios para la elaboración de la ciencia, tal y como ésta es concebida en sus *Segundos Analíticos*. No es de extrañar, por consiguiente, que sus sucesores hayan puesto a menudo en conexión a la lógica con la teoría del conocimiento y la psicología del razonamiento. En otros apartados de su *Organon*, Aristóteles se ocupa de los modos como los términos poseen significado y los géneros de entidades a que resultan susceptibles de aplicación. Y en los preliminares de su silogística dedica asimismo un espacio considerable al análisis del discurso y la clasificación de los enunciados. Tampoco es, pues, de extrañar que en los siglos siguientes se haya agrupado a la lógica junto con la gramática y la retórica como una *ars sermocinalis*. En tanto que los lógicos se contentaban con tomar a las propias obras de Aristóteles por fuentes capitales de su disciplina, esa diversidad de concepciones de la misma no había de plantear grandes problemas: variando su enfoque según la sección del *Organon* de que estuvieran ocupándose, los lógicos podían seguir pensando que el objeto de la lógica tiene por igual que ver con las palabras, los pensamientos y las cosas. Mas los progresos de la lógica en el siglo pasado han hecho imposible contentarnos con la simple concatenación tradicional de su temática. Basándose en analogías sugeridas por la obra de Aristóteles y los lógicos posteriores, matemáticos y filósofos se han servido del vocablo «lógica» en contextos que los antiguos lógicos jamás habrían imaginado. Y el resultado de todo ello es una confusión en que los usos del vocablo se hallan tan alejados entre sí que éste apenas consigue ya facilitar la comunicación entre los representantes de las distintas tendencias. En esta situación, lo primero que hemos de hacer es preguntarnos cuál sea el meollo de nuestra tradición, tratando luego, si es posible, de establecer una serie de convenciones que nos ayuden a apreciar cuál sea la relación entre ese núcleo central y el resto de las materias con las que los diversos pensadores lo han puesto en relación.

Aunque Boole bautizó a su más ambiciosa obra de lógica con el título de *The Laws of Thought* y dio a veces la sensación de creerse investigando la constitución del intelecto humano, está claro que su álgebra nada tiene que ver con procesos de pensamiento. En cada una de las interpretaciones de la misma a las que quepa adjetivar de lógicas, el álgebra de Boole se

ocupa de relaciones entre entidades que en modo alguno son mentales. Y en las obras de Frege es todavía menor la posibilidad de confusión entre la lógica y la psicología, expresamente distinguidas por el autor en numerosas ocasiones. Es cierto que llamó a su ideología o escritura conceptual «un lenguaje simbólico del pensamiento puro» (*eine Formelsprache des reinen Denkens*), pero de sus explicaciones se desprende que con esa expresión no se refiere a ningún lenguaje construido para hablar acerca de un variedad específica del pensar. Por el contrario, cuando afirma que la aritmética se identifica con la lógica se cuida de aclarar que, para él, los enunciados aritméticos versan sobre objetos —a saber, números— que no han sido creados por, ni dependen en modo alguno de, la mente humana. Su lenguaje simbólico únicamente es un lenguaje del pensamiento puro en el sentido de servir de vehículo a verdades pensadas por nosotros al hacer abstracción de los diversos contenidos concretos de nuestras experiencias. Tal descripción no es lo suficientemente precisa como para indicar que ese lenguaje se halla exclusivamente destinado a la formulación de los principios de la lógica. Por lo que a su título respecta, el libro de Frege podría igualmente bien haberse referido a un nuevo simbolismo para la metafísica; pero no cabe duda de que su autor lo concebía como una contribución al desarrollo de la ciencia que Aristóteles iniciara en sus *Primeros Analíticos*. Dentro de su concepción, la aritmética —que identificaba con la lógica— es la más fundamental de todas las ciencias. Y la aritmética no versa para nada acerca de lo que los filósofos acostumbran a llamar el mundo externo, esto es, el mundo de las cosas que se dan en el espacio, ni tampoco acerca del mundo de la mente. Cierto es que se ocupa de inferencias mentalmente construidas, pero tan sólo lo hace así en la medida en la que le interesa investigar las conexiones que puedan darse en el dominio de lo pensable. Sus leyes no son leyes de la naturaleza, sino leyes de las leyes de la naturaleza [42].

Enseguida veremos que esta última observación, presentada por Frege como un epigrama más bien que como una definición, podría ser tomada muy en serio como una delimitación del ámbito de la lógica. Pero lo que por el momento nos interesa destacar aquí es el hecho de que tanto Boole como Frege, al igual que Leibniz antes que ellos, concibieron a la lógica como un sistema de principios reguladores de la validez de la inferencia en relación con toda suerte de materias y para toda suerte de contextos, esto es, como una teoría de relaciones tales como las que Aristóteles y Crisipo consideraran, respectivamente, en sus doctrinas de los silogismos o la derivación de esquemas inferenciales. Como tuvimos ocasión de ver a lo largo de este libro, no faltan otros ingredientes en la tradición lógica, pero aquéllos son los elementos que los más grandes lógicos de los tiempos modernos juzgaron nucleares y parece razonable decir que el resto de los miembros del cuerpo de la lógica se habrán de articular en torno al cometido vertebral de clasificar y conectar entre sí los principios de la inferencia formalmente válida. Hasta aquí, todo está relativamente claro; pero dos novedades de nuestro propio siglo han suscitado alguna incertidumbre, haciendo necesario extremar el rigor en nuestra caracterización de la lógica.

42 *Grundlagen der Arithmetik*, §§ 87 y 93.

La primera de ellas es el descubrimiento de paradojas en el interior del dominio que Cantor y Frege asignaron a la lógica. Se trata de un descubrimiento perturbador por demostrar que las convicciones a menudo dignificadas por los lógicos con el título de «intuiciones lógicas» pudieran ser erróneas. A Brouwer le ha llegado inclusive a sugerir que debiéramos rechazar la validez universal del principio de tercio excluso. Pero, aparte de ello, semejante descubrimiento ha sembrado la duda acerca de la corrección de los intentos de identificar a la aritmética con la lógica. Hilbert, como sabemos, prefería derivar a la aritmética de un conjunto de axiomas específicos añadidos a la teoría de la cuantificación. Y aunque Whitehead y Russell continuaron defendiendo la tesis de Frege, los recursos que se vieron obligados a introducir a estos efectos revelan la peculiaridad de su acepción del vocablo «lógica». La teoría russelliana de los tipos lógicos merece todavía la aprobación de muchos filósofos, pero incluso aquellos que la han distinguido con su favor no han tenido en ocasiones más remedio que conceder que guarda un mayor parecido con la metafísica que con la lógica en el sentido tradicional; y no cabe duda de que los axiomas de reducibilidad e infinitud a que Russell creía necesario recurrir junto con su teoría de los tipos tienen poco que ver con lo que de ordinario consideraríamos principios lógicos.

El segundo acontecimiento que parece imponer una reconsideración del alcance de la lógica es el debate en torno a la necesidad y el lenguaje del que nos ocupábamos en nuestro capítulo sobre la filosofía de la lógica después de Frege. Algunos de los defensores de una concepción convencionalista de la lógica desearían incluir bajo este rótulo a todas las verdades *a priori*, por considerar que todas ellas deben por igual su condición de verdaderas a meras reglas de lenguaje. Si dicha práctica se generalizara, carecería de objeto preguntarse si Frege está o no en lo cierto al considerar a la aritmética como una prolongación de la lógica, puesto que la aritmética vendría indudablemente a reducirse a la lógica de los numerales, tal y como la geometría se reduciría a la lógica de los términos que designan figuras, la mecánica a la lógica de «fuerza», el análisis económico a la lógica de «precio», la teología filosófica (si se admite una ciencia semejante) a la lógica de «Dios», y así sucesivamente. Esta desaforada inflación del significado de un vocablo técnico lo inutiliza para todo aquello que no sean los más toscos propósitos de clasificación, por lo que habremos de congratularnos de que la moda no haya rebasado por el momento los límites relativamente estrechos de una determinada escuela. Pero, por lo demás, es fácil comprender hasta qué punto ha podido inspirarse ese modo de proceder en ciertos rasgos de la más rancia tradición. Desde los tiempos de Aristóteles a nuestros días, los lógicos se han interesado por el estudio de los hábitos lingüísticos y las reglas semánticas que presiden nuestro uso de términos tales como «todo», «si», «o», «posible», etc. Cuando se supone que todos los principios de la lógica tradicional —como sería el caso, por ejemplo, de los principios correspondientes a los diversos modos silogísticos— deben su condición de verdaderos a las reglas semánticas que regulan el uso de las palabras por medio de las cuales se hallan expresados, parece natural extender dicha consideración a muchos otros enunciados y hasta pudiera resultar ocasionalmente esclarecedor decir que todos ellos pertenecen a la lógica. Ya antes del auge de esa teoría se contrapuso en

más de una ocasión, al discutirse el problema de la necesidad, el calificativo de «lógica» al de «causal», como si ambos adjetivos hubieran de agotar el universo del discurso.

A falta de una definición universalmente aceptada del vocablo «lógica», la cuestión de si la teoría de conjuntos o cualquier otra rama del conocimiento *a priori* ha de considerarse un capítulo de la lógica sólo podría ser zanjada mediante una legislación lingüística al efecto. Ahora bien, dicha legislación pudiera estar bien o mal orientada. Pues, en principio, parece deseable que cualesquiera reglas de nuevo cuño que deliberadamente apliquemos a las viejas palabras no se alejen demasiado, si de algún modo lo han de hacer, de la costumbre establecida, resultando asimismo conveniente que las distinciones en que hayan de apoyarse sean distinciones relevantes para la organización del conocimiento. Así pues, si se piensa que la lógica ha venido durante siglos ocupándose primordialmente de los principios de la inferencia válida para todo posible contenido, esto es, con abstracción de la específica materia de estas o aquellas inferencias para atender sólo a su forma, habrá que reputar de escasamente provechosa una extensión de nuestro empleo del vocablo «lógica» que autorice giros tales como «la lógica de 'Dios'». Y si creemos que la teoría de conjuntos se halla estrechamente conectada con algunos apartados de la lógica en sentido tradicional, mas nos sentimos turbados ante la introducción de los recursos necesarios para liberar a aquélla de paradojas, lo que tendremos que hacer es proceder a un riguroso escrutinio de la estructura de la ciencia de la lógica tal y como ésta es presentada por quienes desearían que incluyese a la teoría de conjuntos. Los descubrimientos reseñados en este capítulo resultan obviamente relevantes al respecto.

La distinción entre teorías que admiten un procedimiento de decisión y aquellas otras que no lo hacen así es sumamente interesante desde un punto de vista filosófico y acaso revista una gran importancia de orden práctico en una era de computadoras como la que vivimos, pero difícilmente podría ayudarnos a demarcar el dominio de la lógica. Pues, en efecto, sería contrario a una larga y bien asentada tradición reservar la denominación de «lógica» para el cálculo de proposiciones, esto es, para lo que se llama en este libro la lógica primaria, sin que quepa trazar por otra parte una clara divisoria entre lo que resulta decidible y lo que no dentro del cálculo restringido (o de primer orden) de funciones proposicionales. Sabemos, sí, que no puede haber un procedimiento de decisión para el cálculo en su conjunto, pero no nos es dado ofrecer una satisfactoria caracterización general de toda aquella parte de este último para la que es posible construir un tal procedimiento decisorio. No es, en cambio, difícil distinguir entre el cálculo restringido de funciones proposicionales, que sabemos deductivamente completo, y la teoría de conjuntos (o el correspondiente cálculo funcional de orden superior), que sabemos no sólo incompleta sino incompletable. Parece razonable, en consecuencia, decir que el primero merece el título de lógica, cosa que no ocurre con la segunda. Pues, en efecto, el vocablo «lógica» se halla tradicionalmente conectado con el estudio de las reglas de inferencia; y, si resulta extraño aplicar ese vocablo a un sistema axiomático como el de Frege, más extraño resultaría aún aplicarlo a un sistema en el que las consecuencias de los axiomas no sean todas accesibles por inferencia a partir de estos últimos. Y, sin embargo, esto es

lo que hizo Frege —como podemos hoy apreciar a la luz del teorema de Gödel— al tratar de reducir la aritmética a la lógica. Donde Frege creyó ver una simple diferencia de niveles, tropezamos en realidad con un abismo al que con propiedad cabría considerar como la frontera de la lógica.

Quizás cabría incluir dentro de la lógica a la teoría de la identidad, puesto que la noción básica de la misma es una noción de carácter sumamente general y sus axiomas podrían ser añadidos a la teoría de la cuantificación sin detrimento de la completud del complejo resultante. Pero, una vez distinguida la teoría de conjuntos del resto del sistema de Frege y basada en sus propios axiomas de pertenencia, parece lo más natural presentar a la teoría de la cuantificación mediante reglas de inferencia como las de Gentzen o reglas de desenvolvimiento como las ofrecidas por nosotros en una anterior sección. Y esta última técnica ya no podría ser extendida a la teoría de la identidad. Ciertamente podemos reemplazar los axiomas de identidad por reglas adicionales de inferencia, pues para ello bastaría con decir que cada axioma es una fórmula susceptible de ser inferida a partir de la clase nula de las premisas. Pero no nos es dado reemplazar los axiomas fregeanos de identidad por parejas de reglas de inferencia (o desenvolvimiento) que conjuntamente permitan la introducción y la eliminación del signo de identidad. Y tampoco podemos definir la identidad por medio de una regla-γ en el sistema de reglas de orden superior propuesto en nuestra sección sobre la lógica modal. Ello revela que la noción de identidad no guarda con la noción de implicación, o la más general de envolvimiento, la misma íntima trabazón que las nociones de conjunción, negación, universalidad, etc., comúnmente consideradas como lógicas. De donde habrá que concluir la conveniencia de dejar fuera del alcance de la lógica a la teoría de la identidad, quedando nuestra ciencia definida como la teoría pura del envolvimiento, es decir, la teoría de la forma general de los principios de envolvimiento considerados con entera independencia de la específica naturaleza de las proposiciones contenidas en las clases entre las que se dé aquella relación. Esta caracterización de la ciencia de la lógica concuerda estrechamente, como hemos visto, con la epigramática formulación por parte de Frege del modo como las leyes lógicas se relacionan con las de las demás ciencias, pudiéndosela considerar también como una rigurosa interpretación de la concepción de Bolzano según la cual la lógica sería la ciencia de las ciencias. Sin duda que, en la práctica, la lógica —tal y como aquí ha sido definida— será siempre estudiada en conjunción con otras materias relevantes para la organización del conocimiento y en particular con aquéllas a las que hubo de verse asociada en Aristóteles, Crisipo, Leibniz, Bolzano y Frege. Pues, por lo pronto, de lo que aquí se ha dicho se desprende que la lógica en sentido estricto ni tan siquiera vendría a coincidir en extensión con la teoría de los sistemas deductivos desarrollada por los matemáticos a partir de las sugerencias hilbertianas. Mas, comoquiera que podamos denominarlo o describirlo, este género relativamente simple de investigación ocupa un lugar central en la gran tradición del pensamiento europeo en torno a la ciencia.

SELECCION BIBLIOGRAFICA *

ABELARDO, PEDRO, *Ouvrages inédits d'Abélard*. E. V. Cousin. París, 1836.

— *Peter Abaelards Philosophische Schriften*. Ed. B. Geyer. (*Beiträge zur Geschichte der Philosophie und Theologie des Mittelalters*, XXI.) Münster, 1919-33.

— *Scritti Filosofici: Editio super Porphyrianum*, & c. Ed. M. Dal Pra. Milán, 1954.

— *Dialectica*. Ed. L. M. de Rijk. Assen, 1956.

— *Abaelardiana Inedita*. Ed. L. Minio-Paluello (*Twelfth Century Logic: Texts and Studies*, II), Roma, 1958.

ACKERMANN, W., *Solvable Cases of the Decision Problem*. Amsterdam, 1954.

ADÁN DE BALSHAM, *Adam Balsamiensis Parvipontani Ars Disserendi* (*Dialectica Alexandri*). Ed. L. Minio-Paluello (*Twelfth Century Logic: Texts and Studies*, I), Roma, 1956.

AGUSTÍN, SAN, *Principia Dialecticae* y *Categoriae Decem*, en *Opera Omnia*, I. Ed. J. P. Migne (*Patrologia Latina*, XXXII), París, 1861.

ALBERTO DE SAJONIA, *Perutilis Logica*. Venecia, 1522.

ALBERTO MAGNO, SAN, *Opera Omnia*, I y II. Ed. Ad. Borgnet. París, 1890.

ALCUINO, *Poema de Pontificibus et Sanctis Eboracensis Ecclesiae* y *Dialectica*, en *Opera Omnia*. II. Ed. J. P. Migne (*Patrologia Latina*, CI), París, 1863.

ALDRICH, H., *Artis Logicae Compendium*. Oxford, 1961.

ALEJANDRO DE AFRODISIA, *In Aristotelis Analyticorum Priorum Librum I Commentarium*. Ed. M. Wallies (*Commentaria in Aristotelem Graeca*, II (II)), Berlín, 1881.

— *In Aristotelis Topicorum Libros Octo Commentaria*. Ed. M. Wallies (*Commentaria in Aristotelem Graeca*, II (II), Berlín, 1881.

AMMONIO, *In Aristotelis Analyticorum Priorum Librum I Commentarium*. Ed. M. Wallies (*Commentaria in Aristotelem Graeca*, IV (VI)), Berlín, 1899.

ANSELMO DE CANTERBURY, *Monologion, Proslogion y De Veritate*, en *Opera Omnia*, I. Ed. F. S. Schmitt. Edimburgo, 1946.

— *De Fide Trinitatis = Epistola de Incarnatione Verbi*, en *Opera*, II, 1946.

APULEYO, *De Philosophia Rationali* = Περὶ Ἑρμηνείας, en *Opera*, III. Ed. P. Thomas. Leipzig, 1908.

ARISTÓTELES, *Categoriae et Liber de Interpretatione*. Ed. L. Minio-Paluello. Oxford, 1949. (Hay traducción inglesa con notas de J. C. Ackrill, Oxford, 1963.)

— *Topica et Sophistici Elenchi*. Ed. W. D. Ross. Oxford, 1958.

— *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*. Texto revisado con introducción y comentario de W. D. Ross. Oxford, 1949. (Hay trad. cast. de éstos y los precedentes tratados del *Organon*, por F. Larroyo, Ed. Porrúa, México, 1969.—*T.*)

— *Aristotle's Metaphysics*. Texto revisado con introducción y comentario de W. D. Ross. Oxford, 1924.

ARNAULD, A., y NICOLE, P., *La Logique, ou l'art de penser*. París, 1662.

AVICENA (IBN SINA), *Opera*. Venecia, 1508.

BACON, R., *Summulae Dialectices*. Ed. R. Steele (*Opera hactenus inedita Rogeri Baconi*, fasc. XV), Oxford, 1940.

BAUDRY, L., *La Querelle des futurs contingents* (*Louvain 1465-1475*), *Textes inédits*. París, 1950.

BECKER, A., *Die Aristotelische Theorie der Möglichkeitsschlüsse*. Berlín, 1933.

BECKER, O., *Zwei Untersuchungen zur antiken Logik* (*Klassisch-Philologische Studien*, Heft 17), Wiesbaden, 1957.

BERG, J., *Bolzano's Logic* (*Stockholm Studies in Philosophy*, 2). Estocolmo, 1962.

BOCHENSKI, I. M., *La Logique de Théophraste* (*Collectanea Friburgensia*, N. S. fasc. XXXVII). Friburgo, 1947.

* La *Formale Logik* de Bochenski, reseñada más abajo, incluye indicación de numerosas fuentes para la historia de la lógica, pudiéndose encontrar una completa bibliografía de la lógica matemática—que comprende no sólo libros, sino asimismo artículos en publicaciones periódicas— en los volúmenes I (1936) y siguientes de *The Journal of Symbolic Logic*. En lo que sigue se indican las traducciones castellanas existentes de las obras específicamente lógicas incluidas en esta selección (*N. del T.*)

— *Formale Logik (Orbis Academicus, Problemgeschichten der Wissenschaften in Dokumenten und Darstellungen).* Friburgo y Munich, 1956. (Hay traducción inglesa de I. Thomas, *A History of Formal Logic.* Notre Dame, Indiana, 1961; hay asimismo trad. cast., por M. Bravo Lozano, Ed. Gredos, Madrid, 1966. —*T.*)

BOECIO, *Opera Omnia,* II. Ed. J. P. Migne. (*Patrologia Latina,* LXIV.) París, 1860.

— *Commentarii in Librum Aristotelis* Περὶ Ἑρμηνείας, Ed. C. Meiser. Leipzig, 1877-80.

BOLZANO, B., *Wissenschaftslehre, Versuch einer ausführlichen und grösstenteils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter.* 4 vols. Sulzbach, 1837.

— *Paradoxien des Unendlichen.* Editada póstumamente a partir del manuscrito del autor por el Dr. Fr. Prihonsky. Leipzig, 1851. (Hay trad. inglesa, con introducción de D. A. Steele, *Paradoxes of the Infinite.* Londres, 1950).

— *Funktionenlehre.* Edición y notas de K. Rychlík. Praga, 1930.

BOOLE, G., *The Mathematical Analysis of Logic.* Cambridge, 1847. Reimpresión, Oxford, 1948.

— *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theory of Logic and Probabilities.* Londres, 1854.

— *Studies in Logic and Probability.* Ed. R. Rhees. Londres, 1952.

BOWDEN, B. V., *Faster than Thought, a Symposium on Digital Computing Machines.* Londres, 1953.

BURGERSDYCK, F., *Institutionum Logicarum Libri Duo.* Primera edición, Leyden, 1626.

BURIDAN, JUAN, *Sophismata.* París, sin fecha, *per Johannem Lambert impressa.*

BURLEIGH, GUALTERIO, *De Puritate Artis Logicae Tractatus Longior, with a Revised Edition of the Tractatus Brevior.* Ed. P. Boehner (*Franciscan Institute Publications, Text Series,* N.º 9), St. Bonaventure, N. Y., 1955.

CANTOR, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Ed. E. Zermelo. Berlín, 1932.

CARNAP, R., *Logische Syntax der Sprache.* Vienna, 1934. (Trad. inglesa ampliada, *The Logical Syntax of Language.* Londres, 1937).

— *The Formalization of Logic.* Cambridge, Mass., 1943.

— *Meaning and Necessity, a Study in Semantics and Modal Logic.* Chicago, 1947.

CARROLL, L. (DOGSON, C. L.), *Symbolic Logic, a Fascinating Mental Recreation for the Young.* Oxford, 1896. (Hay trad. cast. casi completa, junto con otros textos del autor, por Alfredo Deaño, Alianza Editorial, Madrid, 1972.—*T.*)

CHURCH, A., *Introduction to Mathematical Logic,* I. Princeton, 1956.

— y otros, *Structure, Method, and Meaning: Essays in Honor of Henry M. Sheffer.* Ed. P. Henle, H. M. Kallen, y S. K. Langer, Nueva York, 1951.

CICERÓN, *De Inventione, De Oratore,* y *Topica,* en *Scripta quae manserunt Omnia,* I, I y II. Ed. G. Friedrich. Leipzig, 1893.

— *Academica* y *De Fato,* en *Scripta,* IV, I y II. Ed. C. F. W. Mueller. Leipzig, 1889-98.

COUTURAT, L., *La Logique de Leibniz d'après des documents inédits.* París, 1901.

CURRY, H. B., *Foundations of Mathematical Logic.* Nueva York, 1963.

CURRY, H. B., y FEYS, R., *Combinatory Logic,* I. Amsterdam, 1958. (Hay trad. cast., por Manuel Sacristán, Ed. Tecnos, Madrid, 1967.—*T.*)

DEDEKIND, J. W. R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Brunswick, 1872.

— *Was sind und was sollen die Zahlen?* Brunswick, 1888.

DE MORGAN, A. *Formal Logic, or The Calculus of Inference, Necessary and Probable.* Londres, 1847.

DE RIJK, L. M., *Logica Modernorum, a Contribution to the History of Early Terminist Logic,* I. Assen, 1962.

DIELS, H., *Fragmente der Vorsokratiker.* 3 vols. Octava edición a cargo de W. Kranz. Berlín, 1956.

DIOGENES LAERCIO, *Lives of Eminent Philosophers.* Edición con traducción inglesa de R. D. Hicks. 2 vols. Londres, 1925.

DIONISIO DE HALICARNASO, *De Compositione Verborum,* en *Opuscula,* II. Ed. H. Usener and L. Radermacher. Leipzig. 1904.

DIONISIO DE TRACIA, *Grammatica,* en *Anecdota Graeca,* II. Ed. I. Bekker. Berlín, 1816.

DUNS ESCOTO, JUAN, *Opera Omnia*, I. Ed. L. Wadding. Lyon, 1639.

EPICTETO, *Dissertationes ab Arriano Digestae*. Ed. H. Schenkl. Leipzig, 1898.

EUCLIDES, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Traducción del texto de Heidelberg con introducción y comentario de T. L. Heath. 3 volúmenes. Cambridge, 1908.

EULER, L., *Lettres à une Princesse d'Allemagne*. 2 vols. San Petersburgo, 1768.

FILOPÓN, JUAN, *In Aristotelis Analytica Priora Commentaria*. Ed. M. Wallies (*Commentaria in Aristotelem Graeca*, XIII (II)), Berlín, 1905.

FRAENKEL, A. A., *Einleitung in die Mengenlehre*. 3.ª edición, Berlín, 1928.

— *Abstract Set Theory*. Amsterdam, 1953.

FREGE, G., *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle, 1879. (Reeditada por I. Angelelli, junto con otros textos del autor, Hildesheim, 1964.—*T.*)

— *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau, 1884. (Hay traducción inglesa de J. L. Austin, *The Foundations of Arithmetic*. Oxford, 1950; hay trad. cast. en preparación, por Alfonso Gómez-Lobo, Alianza Editorial, Madrid.—*T.*)

— *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. Vol. I, Jena, 1893. Vol. II, 1903. (Reeditada en 1962.)

— *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*. Ed. G. Patzig, Göttingen, 1962.

— *Logische Untersuchungen*. Ed. G. Patzig, Göttingen, 1966.

— *Traslations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Ed. P. Geach y M. Black. Oxford, 1952.

— *Estudios sobre semántica*. Ed. y trad. de Ulises Moulines, con Introducción de Jesús Mosterín, Ed. Ariel, Barcelona, 1971.—(*T.*)

GALENO, *Institutio Logica*. Ed. C. Kalbfleisch. Leipzig, 1896.

— *De Hippocratis et Platonis Placitis*, en *Opera Omnia*, V. Ed. C. G. Kühn. Leipzig, 1823.

GARDNER, M., *Logic Machines and Diagrams*. Nueva York, 1958.

GARLAND EL COMPUTISTA, *Dialectica*. Ed. L. M. de Rijk. Assen, 1959.

GEULINCX, A., *Logica Fundamentis Suis a quibus hactenus delapsa fuerat Restituta*, in *Opera Philosophica*, I. Ed. J. P. N. Land. La Haya, 1891.

GILBERTUS PORRETANUS, *Liber de Sex Principiis*. Ed. A. Heyse. Münster, 1953.

GÖDEL, K., *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Traducción inglesa de B. Meltzer, con una Introducción de R. B. Braithwaite. Edimburgo, 1962.

GRASSMANN, H., *Die Lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig, 1844.

GUILLERMO DE SHYRESWOOD, *Die Introductiones in Logicam des Wilhelm von Shyreswood*. Ed. M. Grabmann, (*Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Phil. Hist. Abteilung*, Jahrgang 1937, Heft 10.) Munich, 1937.

HAMILTON, SIR WILLIAM, *Lectures on Logic*. 2 vols. Ed. H. L. Mansel y J. Veitch. Edimburgo, 1860.

HEATH, SIR THOMAS L., *Mathematics in Aristotle*. Oxford, 1949.

HENRY, D. P., *The De Grammatico of St. Anselm: The Theory of Paronymy* (University of Notre Dame, Publications in Mediaeove Studies, Vol. XVIII), Indiana, 1964.

HEYTING, A., *Intuitionism, an Introduction*. Amsterdam, 1956.

HILBERT, D., *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig, 1899.

— y ACKERMANN, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*. 3.ª edición, Berlín, 1949. (Hay trad. cast. de la 4.ª ed., por Víctor Sánchez de Zavala, Ed. Tecnos, Madrid, 1962.—*T.*).

HILBERT, D., y BERNAYS, P., *Grundlagen der Mathematik*. Vol. I, Berlín, 1934. Vol. II, 1939.

HILLEBRAND, F., *Die neuen Theorien der kategorischen Schlüsse*. Viena, 1891.

HOBBES, T., *Elements of Philosophy Concerning Body*. Londres, 1656.

HOWELL, W. S., *Logic and Rhetoric in England, 1500-1700*. Princeton, 1956.

JEVONS, W. S., *Pure Logic, or The Logic of Quality apart from Quantity*. Londres, 1864.

— *Elementary Lessons in Logic, Deductive and Inductive*. Londres, 1870. (Hay trad. cast., por A. J. Dorta, Ed. Pegaso, Madrid, 1952.—*T.*)

— *The Principles of Science, a Treatise on Logic and Scientific Method*. Londres, 1874.

JUAN DE SALISBURY, *Metalogicon*. Ed. C. C. J. Webb. Oxford, 1929.

JUNGE, J., *Logica Hamburgensis.* Hamburgo, 1638. Reimpresión 1957.

KANT, I. *Kritik der reinen Vernunft.* 1.ª ed., Riga, 1781.

— *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können.* Riga, 1783.

— *Immanuel Kants Logik.* Ed. B. C. Jäsche. Königsberg, 1800.

KAUPPI, R., *Über die Leibnizsche Logik, mit besonderer Berücksichtigung des Problems der Intension und der Extension (Acta Philosophica Fennica,* fasc. XII), Helsinki, 1960.

KEYNES, J. N., *Studies and Exercises in Formal Logic, including a Generalization of Logical Processes in their Application to Complex Inferences.* Londres, 1884.

KLEENE, S. C., *Introduction to Metamathematics.* Amsterdam, 1952. (Hay trad. cast. en preparación, por Manuel Garrido, Ed. Tecnos, Madrid.—*T.*)

LAMBERT, J. H., *Logische und Philosophische Abhandlungen.* Ed. J. Bernoulli. Berlín, 1782.

LEIBNIZ, G. W., *Opera Omnia.* 6 vols. Ed. L. Dutens. Ginebra, 1768.

— *Leibnizens mathematische Schriften,* 7 vols. Ed. C. I. Gerhardt. Berlín, 1849-63.

— *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz.* 7 vols. Ed. C. I. Gerhardt. Berlín, 1875-90.

— *Die Leibniz-Handschriften der Königlichen Öffentlichen Bibliothek zu Hannover.* Recopilación de E. Bodemann. Hanover, 1895.

— *Opuscules et fragments inédits de Leibniz.* Ed. L. Couturat. París, 1903.

LEWIS, C. I., *A Survey of Symbolic Logic.* Berkeley, 1918.

— y LANGFORD, C. H., *Symbolic Logic.* Nueva York, 1932.

LUKASIEWICZ, J., *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic.* Segunda edición ampliada, Oxford, 1957.

LULL, RAMÓN, *Raymundi Lullii Opera ea quae ad adinventam ab ipso artem universalem... pertinent.* Estrasburgo, 1617.

MAASS, J. G. E., *Grundriss der Logik.* Halle, 1793.

MACCOLL, H., *Symbolic Logic and its Applications.* Londres, 1906.

MAGUNCIA, MAESTROS RECTORES DE, *Modernorum Summulae Logicales, a magistris Collegii Moguntini regentibus... innovatae.* Maguncia, 1489.

MARCIANO CAPELLA, *De Nuptiis Philologiae et Mercurii.* Ed. A. Dick. Leipzig, 1925.

MATES, B., *Stoic Logic (University of California Publications in Philosophy,* vol. 26), Berkeley y Los Angeles, 1953.

MILL, J. S., *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation.* London, 1843. (Hay trad. cast., por E. Ovejero y Maury, Ed. D. Jorro, Madrid, 1917. *T.*)

MONTUCLA, J. E., *Histoire des mathématiques,* I. París, 1758.

MOODY, E. A., *Truth and Consequence in Medieval Logic.* Amsterdam, 1953.

MOSTOWSKI, A., *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic, an Exposition of the Theory of Kurt Gödel.* Amsterdam, 1952.

OCKHAM, GUILLERMO DE, *Super Quattuor Libros Sententiarum.* Lyons, 1495.

— *Expositio Aurea et admodum utilis super Artem Veterem.* Bolonia, 1496.

— *Summa Totius Logicae.* Oxford, 1675. Las partes I, II y III (I) han aparecido en una moderna edición de P. Boehner, St. Bonaventure, N. Y., 1951-4.

— *Tractatus de Praedestinatione et de Praescientia Dei et de Futuris Contingentibus.* Editado con un Estudio sobre el Problema Medieval de la Lógica trivalente, de P. Boehner (*Franciscan Institute Publications,* n.º 2), St. Bonaventure, N. Y., 1945.

PABLO NICOLETO VENETO, *Logica Magna.* Venecia, 1499.

PATZIG, G., *Die Aristotelische Syllogistik. (Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Phil. Hist. Klasse,* III, n.º 42). Göttingen, 1959.

PEANO, G., *Arithmetices Principia nova methodo exposita.* Roma, 1889.

— *Notations de logique mathématique.* Turín, 1894.

— *Formulaire de mathématiques.* Turín, 1895-1908.

— *Opere Scelte,* II. Ed. U. Cassina. Roma, 1958.

PEDRO HISPANO, *Summulae Logicales.* Ed. I. M. Bochenski. Roma, 1947.

PEIRCE, C. S., *Collected Papers.* 8 vols. Ed. C. Hartshorne, P. Weiss, y A.

W. Burks. Cambridge, Mass., 1931-1958.

PLATÓN, *Opera*. Ed. J. Burnet. Oxford, 1899-1906.

PLOUCQUET, G., *Sammlung der Schriften welche den logischen Calcul des Herrn Professor Ploucquet betreffen*. Ed. F. A. Bök. Tübingen, 1773.

PLUTARCO, *Libri contra Stoicos Scripti*, en *Moralia*, VI. 2. Ed. M. Pohlenz. Leipzig, 1959.

POINCARÉ, H., *Science et méthode*. París, 1908.

POPPER, K. R., *The Logic of Scientific Discovery*. Londres, 1959. (Hay trad. cast. por Víctor Sánchez de Zavala, Ed. Tecnos, Madrid, 1962.—*T.*)

PORFIRIO, *Isagoge et in Aristotelis Categorias Commentarium*. Ed. A. Busse (*Commentaria in Aristotelem Graeca*, IV (I)). Berlín, 1887.

PRANTL, G., *Geschichte der Logik im Abendlande*. 4 vols. Leipzig, 1855-70.

PRIOR, A. N., *Formal Logic*, 2.ª edición, Oxford, 1961.

PRISCIANO, *Institutiones Grammaticae*, en *Grammatici Latini*, II y III. Ed. H. Keill. Leipzig, 1855-8.

PROCLO, *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*. Ed. G. Friedlein. Leipzig, 1873.

PSEUDO-ESCOTO (JUAN DE CORNWALL?), *Véase* DUNS ESCOTO.

QUINE, W. V., *Mathematical Logic*. 1.ª edición, Nueva York, 1940. Ed. rev., Cambridge, Mass, 1951. (Hay trad. cast., por José Hierro Sánchez-Pescador, Ed. Revista de Occidente, Madrid, 1972.—*T.*)

— *Methods of Logic*. 1.ª edición, Nueva York, 1950. Edición revisada, Londres, 1958. (Hay trad. cast., por Manuel Sacristán, Ed. Ariel, Barcelona, 1962.—*T.*)

— *From a Logical Point of View*. Cambridge, Mass., 1953. (Hay trad. cast., por Manuel Sacristán, Ed. Ariel, Barcelona, 1962.—*T.*)

RAMSEY, F. P., *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. Ed. R. B. Braithwaite. Londres, 1931.

RAMUS, PETRUS (PIERRE DE LA RAMÉE). *Aristotelicae Animadversiones*. París, 1543.

— *Dialecticae Partitiones*. París, 1543.

— *Dialectique*. París, 1555.

— *Dialecticae Libri Duo*. 1.ª edición, París, 1556. Ultima edición en vida del autor, París, 1572.

REICHENBACH, H., *Elements of Symbolic Logic*. Nueva York, 1948.

RIEMANN, G. F. B., *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*. (*Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, XIII.) Göttingen, 1867.

ROBINSON, R., *Plato's Earlier Dialectic*. 2.ª edición, Oxford, 1953.

ROSSER, J. B., y TURQUETTE, A. R. *Many-valued Logics*. Amsterdam, 1952.

RUSSELL, B., *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*. Cambridge, 1900.

— *The Principles of Mathematics*, I. Cambridge, 1900. (Hay trad. cast., por J. C. Grimberg, Ed. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1948.—*T.*)

— *Introduction to Mathematical Philosophy*. Londres, 1919. (Hay traducducción cast., por José Fuentes, Ed. Aguilar, Madrid, 1962.—*T.*)

— *Logic and Knowledge, Essays 1901-1950*. Ed. R. C. Marsh. Londres, 1956. (Hay trad. cast., por Javier Muguerza, Ed. Taurus, Madrid, 1966.—*T.*)

— *The Philosophy of Bertrand Russell*. Ed. P. A. Schilpp. Evanston, Ill., 1946.

RÜSTOW, A., *Der Lügner, Theorie, Geschichte, und Auflösung*. Leipzig, 1910.

SACCHERI, G. G., *Logica Demonstrativa*. 1.ª edición (anónima). Turín, 1697. 3.ª edición, Colonia, 1735.

— *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*. 1.ª edición, Milán, 1733. Reimpresa con traducción inglesa e introducción de G. B. Halsted, Chicago y Londres, 1920.

SCHOLZ, H., *Mathesis Universalis, Abhandlungen zur Philosophie als strenger Wissenschaft*, Basel, 1961.

SCHRÖDER, E., *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. 3 vols. Leipzig, 1890-1905.

SCHUHL, P. M., *Le Dominateur et les possibles*. París, 1960.

SEXTO EMPÍRICO, *Opera*. 3 vols. Ed. M. Mutschmann y J. Man. Leipzig, 1912-54.

SIMPLICIO, *In Aristotelis Categorias Commentaria*. Ed. C. Kalbfleisch (*Commentaria in Aristotelem Graeca*, VIII), Berlín, 1907.

— *In Aristotelis Physicorum Libros Quattuor Posteriores Commentarium*. Ed. H. Diels (*Commentaria in Aristotelem Graeca*, X), Berlín, 1895.

— *In Aristotelis de Caelo Commentaria.* Ed. J. L. Heiberg (*Commentaria in Aristotelem Graeca,* VII), Berlín, 1894.

SKOLEM, T., y otros, *Mathematical Interpretations of Formal Systems.* Amsterdam, 1955.

SOLMSEN, F. *Die Entwicklung der Aristotelischen Logik und Rhetorik.* Berlín, 1929.

STRAWSON, P. F., *Introduction to Logical Theory.* Londres, 1952. (Hay trad. cast., por J. Ameller V., Ed. Nova, Buenos Aires, 1969.—*T.*)

STRODE, R., y otros, *Consequentiae Strodi cum commento Alexandri Sermonetae, Declarationes Gaetani in easdem consequentias, Dubia magistri Pauli Pergolensis, Obligationes eiusdem Strodi, Consequentiae Ricardi de Ferabrich, Expositio Gaetani super easdem, Consequentiae subtiles Hentisberi, Quaestiones in consequentias Strodi perutiles eximii artis doctoris Antonii Frachantiani Vicentini.* Venecia, 1517.

TARSKI, A., *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938.* Traducción de J. H. Woodger. Oxford, 1956.

—, MOSTOWSKI, A., y ROBINSON, R. M., *Undecidable Theories.* Amsterdam, 1953.

TAYLOR, A. E., *Varia Socratica.* Oxford, 1911.

TOMÁS DE AQUINO, SANTO, *Summa Theologiae.* 4 vols. Ed. P. Caramelo. Roma, 1948.

— *Summa contra Gentiles.* Ed. manual Leonina, Roma, 1934.

— *De Veritate,* en *Quaestiones Disputatae,* I. Ed. R. Spiazzi. Turín, 1949.

VAILATI, G., *Scritti (1863-1909).* Florencia, 1911.

VENN, J., *Symbolic Logic.* Londres, 1881.

VICENTE FERRER, SAN, *De Suppositionibus Dialecticis,* en *Œuvres,* I. Ed. P. Fages. París, 1909.

VON ARNIM, J., *Stoicorum Veterum Fragmenta.* 3 vols. Leipzig, 1903-5.

VON WRIGHT, G. H., *An Essay in Modal Logic.* Amsterdam, 1951.

WALLIS, J., *Institutio Logica.* Oxford, 1687.

WANG, H., *A Survey of Mathematical Logic.* Pekín, 1962, y Amsterdam, 1963.

WHITEHEAD, A. N., *A Treatise of Universal Algebra with Applications,* I. Cambridge, 1898.

— y RUSSELL, B., *Principia Mathematica,* 3 vols. 1.ª edición, Cambridge, 1910-13. 2.ª edición, 1925-7.

WITTGENSTEIN, L., *Tractatus Logico-Philosophicus.* Londres, 1921. (Hay trad. cast., por Enrique Tierno Galván, Ed. Revista de Occidente, Madrid, 1957.—*T.*)

ZABARELLA, J., *Opera Omnia quae ad perfectam Logicae cognitionem acquirendam spectare censentur utilissima.* 17.ª edición, Venecia, 1617.

INDICE DE AUTORES Y MATERIAS

A fortiori, argumento, 39, 40, 100, 101.
Abelardo, Pedro, 46n, 188; sobre el cuadrado de la oposición, 197; sobre la negación, 197; sobre la *proprietates nominum*, 196, 197; sobre las proposiciones, 193.
Abón de Fleury, 187.
Abstractas, entidades, 550; en Abelardo, 193, 194; en Platón, 19; *lektá* estoicos como, 148; Ockham sobre las, 251.
Accidente, 33, 34, 36, 37, 78, 79.
Ackermann, W., 477, 497n, 507; sobre el problema de la decisión, 674, 677.
Ackrill, J. C., 20n.
Adán de Balsham (Parvipontanus), 213, 406.
Adelardo de Bath, 211.
Adjunción, regla de, 511, 512.
Agripa, Rodolfo, 278.
Agustín, San, 165, 177, 178, 223, 557.
Al-Karismi, 211, 212, 681, 682.
Alberto de Sajonia, 228, 251; sobre las *consequentiae*, 272.
Alberto Magno, San, 215, 220, 221.
Alcuino, 186.
Aldrich, 276.
Alejandro de Afrodisia, 6, 22, 67, 74, 77, 83, 95, 96, 97, 100, 101, 104, 105, 112, 146, 150, 156, 158, 160, 161, 165, 166, 168, 175, 180.
Algebra, 285, 286; de la lógica, 373 y ss., 398, 399.
Algebra bivalente, 381.
Algoritmo, 211, 212, 681, 682.
Alternativas, lógicas, 528.
Ammonio, 101, 186.
Ampliatio, 243.
Analíticos y sintéticos, enunciados, en Bolzano, 377 y ss.; en Frege, 411 y ss., 592, 593; en Kant, 328 y ss.; Quine sobre la distinción entre enunciados, 599.
Ancestral, relación, 432, 433, 455, 456.
Anscombe, G. E. M., 46n.
Anselmo, San, 189; y el argumento ontológico, 189.
Antepraedicamenta, 191, 192.
Antilogismo, 258.
Antípatro, 135, 155.
Antisilogismo, 290.
απαγωγὴ εἰς το ἀδύνατον, 7, 8.
ἀπόδειξις, ἀποδεικτική, 1 y ss., 6, 7.
Apolonio Crono, 107.
ἀποφαντικὸς λόγος, 42, 44.
Appelatio, 136; en Guillermo de Shyreswood, 231; en Pedro Hispano, 245.
Apuleyo, 110, 151, 152, 161, 169, 172.
Argall, J., 277.
Argand, J. R., 364.
Argumento, 111 y ss., 119, 120, 124, 125, 126.
Argumento soberano, 111 y ss., 119, 120, 124, 125, 126.
Aristóteles, 1, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 19, 20, 22, 94, 109, 126, 127, 132, 151, 164, 175, 177, 178, 184, 186, 187, 194, 214, 239, 270, 441, 491, 518, 526, 547, 685, 686.
Aritmetización de la sintaxis, 664, 665.
Arnauld, A., 291.
Arquitas, 6.
Ars combinatoria, 154, 226, 227, 296, 297.
Aserción, signo de, 441, 481.
Aulo Gelio, 137, 141.
Ausdehnungslehre, 311.
Austin, J. L., 402n.
Averroes, 173, 215.
Avicena, 215, 248.
Axioma, 119, 120, 137 y ss., 621, 622.
Axiomática, 351 y ss.
Axiomáticos, esquemas, 490, 491.
Ayer, A. J., 593.

Bacon, F., 286.
Bacon, R., 219, 225, 226; sobre la *suppositio*, 234.
Barbara, Celarent, 218.
Barcau, R., 571n.
Barnes, W., 277.
Basílides, 134.
Baudry, L., 223n.
Becker, A., 86n.
Becker, O., 161n, 513.
Bednarowski, W., 326n.
Behmann, H., 676.
Bernardo de Chartes, 224.
Bernays, P., 477, 487, 488, 497, 554, 635n, 636n, 637, 641, 642, 644, 654, 656, 675, 677.
Berry, paradoja de, 610, 613, 615, 618.
Bidez, J., 180n.
Bivalencia, principio de, 44, 46, 49, 50, 153, 154, 201, 202; aplicabilidad del —— a los condicionales, 128, 129.
Black, M., 403n, 623n.
Bochenski, J. M., 86n, 239n, 267n.
Bodemann, E., 296n.
Bochner, E., 223n, 251n.
Boecio, 46n, 76, 100, 111, 116, 117, 118, 152, 153, 168, 176, 179, 187, 223; sobre la naturaleza de la lógica, 183; sobre los condicionales, 181; sobre los universales, 185 y ss.
Boeto, 172.
Bolzano, 330 y ss., 370, 376, 406, 551, 555, 596, 690.
Boole, G., 311, 373 y ss., 402, 412, 491, 686.
Bowden, B. V., 390n.

Brentano, F., 380n.
Brouwer, L. E. J., 533, 625 y ss., 637 y ss., 688.
Buenaventura, San, 224.
Burali-Forti, C., 606.
Burgersdyck, F., 282.
Buridan, J., 228, 267.
Burkhart, W., 390.
Burleigh, G., 213, 228, 274; sobre la contraposición, 258; sobre la *suppositio* y la *significatio*, 251.

Calímaco, 121.
Cantor, G., 372, 423, 425, 431, 439, 606, 625, 688; Frege sobre, 409; su definición de la infinitud, 406; su procedimiento diagonal, 404, 405; su teoría de conjuntos, 404 y ss.
Cardano, G., 319, 320.
Carlomagno, 187.
Carnap, R., 458n, 473, 478, 496, 503, 560n, 571, 590; sobre la tesis de la extensionalidad, 562, 563.
Carnéades, 168.
Carroll, L., 390, 646.
Categorías, 19, 20, 22, 23 y ss., 584, 585, 623, 624.
Cauchy, A. L., 370.
Cicerón, 109, 111, 117, 122, 138, 153, 156, 168 y ss.; sobre los indemostrables, 169, 170; *Topica*, 170.
Círculo vicioso, Principio del, 608, 609, 610 y ss., 619, 632.
Clases, Cálculo de, 376 y ss.
Clases, Frege sobre las, 467 y ss., 580, 581, 606 y ss.; Quine sobre las, 582; relaciones de, 36, 37, 178, 179, 323 y ss.; Russell sobre las, 581, 582, 613.
Clavius, C., 320.
Cleantes, 109.
Clemente de Alejandría, 109.
Clifford, W. K., 354.
Combinatoria, Lógica, 483 y ss.
Comillas, 25, 48, 475, 564.
Completud, de la lógica general, 654; del cálculo de proposiciones en los *Principia Mathematica*, 647 y ss.; del sistema de reglas de desenvolvimiento, 652, 653; del sistema estoico, 165.
Complexe significabilia, 216, 217.
Composición, Falacia de, 88, 89.
Comprehensión (de las ideas generales), 293, 294.
Conceptualismo, en Ockham, 247, 248.
Condicionales, enunciados, 93, 94, 108, 109; Abelardo sobre los, 204; caracterización estoica de los, 141, 142, 151, 152; como funciones defectivas de verdad, 127, 128; debate megárico en torno a los, 121 y ss., 153, 154; Guillermo de Shyreswood sobre los, 217; Pedro Hispano sobre los, 220; uso de los —— para expresar la necesidad lógica, 129, 130.
Condicionalización, Principio de, en el sistema estoico, 161, 162; en el sistema de Gentzen, 501, 502; en la lógica de Port Royal, 295, 296; en la teoría del desenvolvimiento, 505, 506.
Condorcet, M. J., A. N. C., 323.
Conjuntivos, Enunciados, en Guillermo de Shyreswood, 217; en los estoicos, 140, 141, 152, 153.
Conjunto-potencia, 407, 408.
Conjuntos, Teoría de, 404 y ss.
Connotación, 345.
Consecuencia, relación de, en Tarski, 596, 597.
Consequentiae, 41, 42, 254 y ss.; en Abelardo, 202; en Aldrich, 276; en Boecio, 181; en el Pseudo-Escoto, 258 y ss.; en Ockham, 267 y ss.; en Pablo de Pérgola, 271; en Strode y Ferrybridge, 270, 271.
Consequentiae mirabilis, 92n, 164, 165, 352, 486, 487; en Cardano, 321; en Saccheri, 320; en San Anselmo, 190.
Consistencia, 669; de la lógica general, 653; de la lógica primaria, 641 y ss., 650; de un conjunto de axiomas, 357 y ss.
Constructiva, Prueba, 627 y ss.
Contradicción, Ley de, 10, 11, 43, 44, 159, 160; en la teoría del desenvolvimiento, 504, 505; Kant sobre la, 329, 330; Mill sobre la, 330, 347.
Contradictorios, enunciados, 31, 32, 53, 54.
Contraposición, 128, 129; Burleigh sobre la, 258; el Pseudo-Escoto sobre la, 263; en los *Analíticos* de Aristóteles, 91; en los *Tópicos* de Aristóteles, 38.
Contrarios, enunciados, Doctrina aristotélica, 53, 54.
Convencionalismo, 17, 18, 585 y ss.; en Berkeley, 288; en Hobbes, 287; Frege sobre el, 418; Leibniz sobre el, 309; Mill sobre el, 348, 349.
Conversión, 54, 56, 63, 77, 78; Abelardo sobre la, 197, 209, 210; complementaria, 83; de enunciados modales, 83; en la *Lógica* de Port Royal, 293.
Cópula, 60, 61; Abelardo sobre la, 195; Bolzano sobre la, 343.
Copulatio, en Abelardo, 196, 197; en Guillermo de Shyreswood, 231.
Cousin, V., 192.
Couturat, L., 297n, 305n, 381n.
Crisipo, 109, 110, 168, 169, 171, 178, 274, 321, 395, 472, 497, 501, 687; sobre el argumento soberano, 119, 120, 121; sobre las expresiones temporales, 145, 147; sobre las partes del discurso, 135; sobre los *axiomata*, 138; sobre los condicionales, 122, 153; sobre los enunciados disyuntivos, 153; sobre los enunciados universales, 139; sobre los indemostrables, 154, 155, 156, 491, 492; teoría de la modalidad, 116 y ss.; teoría de los esquemas de inferencia, 150 y ss., 518.

Cuantificación, Teoría de la, 273, 274.
Cuantificación del predicado, 106, 241, 242; en Hamilton, 325 y ss.; en Lambert y Ploucquet, 322.
Cuantificadores, con signos modales, 570 y ss.; diversidad de notaciones, 482, 483; en Frege, 447 y ss., 455, 456, 472, 473; en Guillermo de Shyreswood, 216, 217; en Peirce, 397, 398.
Cuarta figura silogística, 94, 95, 173, 174.
Cuaternios, 369, 371.
Curry, H., 483n.

Characteristica universalis, 226; en Leibniz, 302.
Church, A., 366n, 458n, 473, 526n, 536n, 560n, 564n, 574n, 674n, 678; su Tesis y Teorema, 682.

Dalgarno, G., 302.
De Morgan, 327, 369, 374, 376n, 377n, 472; reglas de, 273, 290, 648, 649; sobre la lógica de las relaciones, 394, 395, 396.
Decisión, problema de la, 673, 674; procedimientos de, 493, 494, 689, 690.
Dedekind, J. W. R., 359, 372, 373, 397, 404, 406, 439, 615, 629; sobre la serie numérica, 433 y ss.
Deducción, Teorema de la, 295, 296. (*V. asimismo* Principio de condicionalización.)
Deducción, Teoría de la, 165, 166.
Deductivo, sistema, 2, 3, 76, 77, 641.
Definición, 5, 6; concepción aristotélica de la, 89, 90; concepción platónica de la, 19, 20; en la *Lógica* de Port Royal, 291, 299; Frege sobre la —— creadora, 415; implícita en Gergonne, 356; implícita en Hilbert, 635; Leibniz sobre la, 308; Mill sobre la, 345; reglas fregeanas de la, 470; Saccheri sobre la, 321, 322.
Definidas, Proposiciones, en la teoría estoica, 120, 121.
Denotación y connotación, en Mill, 345. (V. asimismo *Sinn und Bedeutung*.)
Derivabilidad, en Bolzano, 340 y ss.
«Derivación», 502, 503.
Desargues, G., 359.
Descartes, R., 165, 286, 287, 291, 292, 304, 357, 358, 364, 557.
Descripciones, Teoría de las, 551 y ss.; Russell sobre la, 553 y ss.
Desenvolvimiento, 499 y ss. (*V. asimismo* Expansión en el sistema de Boole, 384.)
Designación, 458, 459, 551 y ss.; de una proposición, 47, 48.
Deteriorem partem, regla, 96 y ss.
Dewey, J., 359.
Diagonal, función, 667, 682, 683; procedimiento, 404, 405, 408, 409, 606, 607.
Diagramas lógicos, de Euler, 322; de Venn, 389.
Dialéctica, contrapuesta a demostración, 1, 22; denominación de la lógica estoica, 107; en Aristóteles, 9, 10; en Platón, 8; invención de la ——, atribuida a Zenón, 7; = lógica, 6, 7; — medieval, 191; = método de división y colección, 9, 10; = *reductio ad impossibile* metafísica, 8.
Dicibile, 177, 178.
Dictum de omni, 75, 76, 252, 253.
Diels, H., 15n.
Differentia, 33, 34.
Dilema, 169.
Diocles de Magnesia, 110.
Diodoro Crono, 14, 107, 109, 120, 146, 153, 183; sobre las condicionales, 121 y ss.; su teoría de la modalidad, 110, 111, 118, 119.
Diofanto, 59.
Diógenes de Babilonia, 135.
Diógenes Laercio, 7, 14, 107, 109, 110, 117, 118, 122, 131, 133, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 145, 146, 153, 154, 156, 160.
Dionisio de Halicarnaso, 146.
Dionisio de Tracia, 136.
Disputaciones, 191, 277, 278.
Dissoi Lógoi, 15, 16, 17, 46, 47, 50, 51.
Distributio, 240, 241, 245, 246, 251, 252, 253.
Disyunción, 99, 100, 140, 141, 152, 153, 482, 483; Abelardo sobre la, 208, 209; Boole sobre la, 379; Frege sobre la, 445; Galeno sobre la, 172; Guillermo de Shyreswood sobre la, 217; Kilwardby sobre la, 256.
División, método de la, 9, 10, 30, 31, 64, 65.
Doble negación, 139, 140, 160, 161, 162, 163, 627, 628 y ss.
Dominios, 654 y ss., 675, 676.
Duns Escoto, 212, 226, 487.

Echtesis, 74, 77.
Elección, Axioma de, 663, 664.
Elenchus, 6, 7, 8, 9, 14.
Enunciado, 46, 47, 51, 52.
Enunciado universal, en Aristóteles, 52, 53; en los estoicos, 138, 139; Frege sobre el, 472, 473.
Enuntiabile, 224, 225.
Envolvimiento, 502, 503, 523, 524, 527, 690.
Epícrates, 9.
Epicteto, 112.
Epicúreos, 168.
Epicuro, 46.
Epiménides, 214.
Eratóstenes, 173.
Erígena, Juan Escoto, 187.
Erística, 11 y ss., 14, 107.
Esquemas axiomáticos, 490, 491.
Estilpón, 107, 109.
Estoicos, 11, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 45, 46, 86, 87, 92, 93, 94, 99, 100, 177, 178, 224, 225, 478; aspiración a la completud del sistema, 165; influjo en Boecio, 180, 183; relación del sistema con el aristotélico, 165, 166; sistema de los esquemas de inferencia, 150 y ss.; sobre la disyunción, 154; sobre la negación, 139, 140, 152, 153;

sobre los condicionales, 153, 154; teoría de la modalidad, 116 y ss.; teoría de la verdad y del significado, 130 y ss.; uso de variables, 151, 152.
Euazlo, 13.
Eubúlides, 15, 107, 108.
Euclides, 4, 7, 59, 77, 165, 285, 351, 357.
Euclides de Megara, 8, 14, 15, 107.
Eudemo, 5, 82, 100, 175, 180.
Eudoxo, 59, 351, 362, 615.
Euler, L., 283, 312, 322, 323.
Existencial, alcance, 55, 56, 62; en Abelardo, 197; en Boole, 381; en Guillermo de Shyreswood, 242; en Leibniz, 299; en Pedro Hispano y San Vicente Ferrer, 245, 246.
Existenciales, proposiciones, cómo simbolizarlas, 482, 483; no todas ellas empíricas, 657, 658.
Expositorio, silogismo, 253, 254.
Extensión de los términos generales, 293, 294.
Extensionalidad, Tesis de la, 562, 563.

Falacia, en Platón, 10, 12. (*V. también* Sofismas.)
Faris, J. A., 324n.
Fatalismo, 45, 46.
Fermat, P. de, 308.
Ferrybridge, R., 228, 229; sobre las *consequentiae*, 270, 271.
Feys, R., 483n.
Figuras del silogismo, 65 y ss.
Filón de Megara, 14, 109, 111, 134, 140, 153, 183, 389, 432; sobre la modalidad, 115, 116, 118, 119; sobre los condicionales, 121 y ss.
Filopón, Juan, 68, 135, 176, 177.
Findlay, J. N., 668n.
Finsler, P., 670.
Formalismo en la matemática, 418; de Hilbert, 637, 638.
Formas, teoría de las, 17, 18, 41, 42, 43; Aristóteles sobre las, 27, 28, 29.
Fraenkel, A., 609n, 635n, 638.
Fraunce, A., 277.
Frege, G., 373, 382, 394, 395, 402-474, 479, 481, 486, 489, 490, 491, 498, 501, 546, 553, 560, 561, 579, 638, 687; sobre la identidad, 575; sobre la modalidad, 509, 510; sobre la naturaleza de la lógica, 582, 583; sobre la paradoja de Russell, 606 y ss.; sobre las descripciones, 551, 552.
Función, 365, 366; en la teoría de los tipos, 611 y ss.; Frege sobre la, 461 y ss.; predicativa, 615 y ss.
Función barra, 391, 392, 394, 487, 488.
Funciones de verdad, 122 y ss., 127, 128, 140, 141, 388, 389.
Funciones recursivas, 678 y ss.
Futuros contingentes, en Abelardo, 201; en Aristóteles, 44, 45; en Boecio, 179; en Santo Tomás de Aquino y otros, 221, 222; Lukasiewicz sobre los, 529.

Galeno, 76, 110, 154, 156, 160, 166, 168, 172 y ss.
Galileo Galilei, 284, 406.
Galois, E., 311, 360.
Gardner, M., 390n.
Garland el Computista, 188.
Gauss, K. F., 330, 353, 625.
Geach, P., 403n.
General, Lógica, 165, 167.
Género, 33, 34, 184, 185.
Géneros supremos, doctrina platónica de los, 18, 19, 28, 29.
Gentzen, G., 499 y ss., 519, 522, 670, 690.
Geometría, 1, 2, 351 y ss.
Geometría proyectiva, 359.
Gerberto (Papa Silvestre II), 187.
Gergonne, J. D., 323, 324, 325; sobre las definiciones implícitas, 356, 357, 634, 635.
Geulincx, A., 290.
Geyer, B., 202n.
Gilberto de la Porrée, 211.
Gödel, K., 409, 440, 516, 517, 595, 631, 632, 677, 678 y ss., 690; su Prueba de la completud de la lógica general, 657 y ss.; su Prueba de la incompletabilidad de la aritmética formal, 663 y ss.
Goldbach, Conjetura de, 525, 526, 628, 629, 671, 672, 678.
Grabmann, M., 211n.
Grassmann, H., 311, 369.
Gregorio de Rimini, 216.
Gregory, D. F., 369.
Grelling, Paradoja de, 609, 610.
Grosseteste, R., 226.
Grupos, Teoría de, 360, 684, 685.
Guillermo de Champeaux, 195, 199, 202, 210.
Guillermo de Ockham, 223, 227, 266 y ss., 293, 395, 396.
Guillermo de Shyreswood, 217, 230; sobre las *proprietates terminorum*, 230 y ss.; sobre los universales, 246, 247, 448, 449.
Guillermo de Soissons, 189.

Hamilton, Sir William (de Edimburgo), 106, 325 y ss., 374.
Hamilton, Sir William Rowan, 369, 371, 372.
Hankel, H., 415.
Heath, Sir Thomas L., 4n, 5n.
Henle, P., 513.
Herbrand, J., 654, 658.
Hermógenes, 169.
Hertz, P., 522 n.
«Heterológico», 609, 610.
Heytesbury, William, 228, 229.
Heyting, A., 533, 534, 626, 630.
Hilbert, D., 355, 404, 477, 488, 497n, 507, 554, 633 y ss., 661, 665, 670, 684, 688; su simbolismo, 482, 483.
Hillebrand, F., 380n.
Hintikka, J., 86n.
Hiparco, 154.
Hipercomplejos, números, 369.

Hipótesis, argumentos a partir de —— en Aristóteles, 40, 41, 92 y ss.; en Platón, 7, 8, 9.
Hipotético, argumento, en Teofrasto, 100.
Hipotético, silogismo, 99, 100, 104, 170, 171; en Boecio, 179, 180.
«Hipotéticos», enunciados, en Abelardo, 208; su significado originario, 172, 173. (*V. asimismo* Condicionales.)
Hobbes, T., 287; Mill sobre, 344.
Howell, W. S., 282n.
Hume, D., 425, 598, 602.
Huntington, E. V., 391 y ss., 647.

«Idea», en la filosofía medieval y renacentista, 286, 287; en Platón, *véase* Forma.
Ideas innatas, 286, 287.
Identidad, 23, 34, 39, 40, 690; Frege sobre la 451, 495, 496, 575; Leibniz sobre la, 314; Peirce sobre la, 400; Whitehead y Russell sobre la, 576 y ss.
Identidad de los indiscernibles, 316, 427 y ss.
Imaginarios, números, 364.
Implicación, 277, 278.
Implicación estricta, 514, 519, 520.
Implicación material, 514 y ss.
Implicat = *implicat contradictionem*, 277, 278.
Imposición, primera y segunda, 183, 184, 214, 215; en Abelardo, 192.
Inconmensurabilidad de la diagonal, 7, 8, 73, 74, 92, 93, 362.
Indemostrables, 154 y ss.; Boecio sobre los, 181; Cicerón sobre los, 169 y ss.
Independencia, prueba de, 358; de las reglas de desenvolvimiento, 651, 652; de las reglas de la lógica general, 654; de los axiomas del cálculo de proposiciones, 643 y ss.
Indeterminado, enunciado, 35, 36, 37, 38, 44, 45, 52, 53.
Indirectos, modos, 94, 95.
Indiscernibilidad de los idénticos, 561, 562.
Inducción, en Aristóteles, 34.
Inducción matemática, 431 y ss., 652, 653, 680, 681; Poincaré sobre la, 608.
Inferencia, esquemas de, 76, 77, 105, 106, 488, 489, 496, 497, 499, 500; en la lógica medieval, 257; sistema estoico de los, 150 y ss., 518, 519.
Infinitos, conjuntos, 406, 407, 434, 439, 440, 608, 609; Brouwer sobre los, 625; Hilbert sobre los, 635.
Infinitud, Axioma de, 621, 622.
Insolubilia, 213 y ss., 218, 219, 276, 609, 610.
Intenciones, primeras y segundas, 215, 216; en Peirce, 399, 400.
Intensión, 293, 294.
Intensional, Lenguaje, 560, 561.
Intensionalidad, 559 y ss.
Intentio, 214, 215; en Ockham, 250.
Intuicionismo, 624 y ss.
Intuitiva, inducción, 498, 499.
Involucración, *véase* Envolvimiento.
Isomorfismo, 358.

Jäsche, B. G., 327.
Jaskowski, S., 501n, 509.
Jerónimo, San, 177.
Jevons, W. S., 189, 376, 389n, 390, 391.
Juan de Salisbury, 189, 211, 223.
Juan XXI, *véase* Pedro Hispano.
Jourdain, P. E. P., 404n.
Judicium = juicio, 292, 293.
Junge, J., 290.

Kalin, T. A., 390.
Kalmar, L., 677.
Kant, I., 227, 327 y ss., 357; Frege sobre, 411 y ss.
κατὰ πρόσληψιν, argumentos, 274, 435, 436; Teofrasto sobre los argumentos, 101 y ss.
Kilwardby, R., 220, 255.
Kleene, S. C., 632n.
Klein, F., 354, 360.
Klügel, G. S., 353.
Kneale, W., 92n, 374n, 631n.
Kronecker, L., 373, 625.

Lambda, conversión, 682, 683; definibilidad, 681, 682; operador, 479, 480, 560n.
Lambert, J. H., 322; Kant sobre, 327.
Langford, C. H., 511.
Leibniz, G. W., 29, 226, 229, 234, 289, 296-319, 381, 392, 402, 411, 419, 427, 428, 460n, 492, 523, 687; *De arte combinatoria*, 300; proyecto de enciclopedia, 304, 305; sobre el alcance existencial, 298, 299; sobre el lenguaje ideal, 302 y ss.; sobre la ciencia general del método, 305, 306; sobre la definición, 308, 309; sobre la intensión y la extensión, 313, 314; sobre la lógica tradicional, 297 y ss.; sobre verdades de razón y verdades de hecho, 309, 310.
Lejewski, C., 102n.
Lektón, 15, 120, 121, 132 y ss., 145 y ss., 177, 178, 332, 333, 462n.
Lenguaje, 560, 561.
Lesniewski, S., 394, 490n.
Letras esquemáticas, 478.
Lever, R., 276.
Lewis, C. I., 317, 509 y ss., 559, 572.
Lobachevsky, N. I., 353.
Locke, J., 287, 289.
Lógica combinatoria, 483 y ss.
«Lógica general», 165, 167.
«Lógica primaria», 165, 167, 275.
λόγος, 16, 17, 19, 20, 42, 43; definición estoica, 135, 136; en la teoría estoica, 131, 132; *oratio* en Boecio, 183.
Löwenheim, L., 658, 661.
Luciano, 169.
Lukasiewicz, J., 44n, 77, 166, 320n, 452, 488, 494, 501n; sobre la lógica trivalente, 529 y ss.; sobre las lógicas polivalentes, 530 y ss.; su simbolismo, 482, 483.
Lull, R., 226, 390n.

ma'na, 214, 215.
Maass, J. G. E., 336.
Mac Coll, H., 395, 510.
Mackinsey, J. C. C., 630n, 632n.
Mach, E., 587.
Máquinas lógicas, 189, 190, 389, 390.
Marciano Capella, 169 y ss., 178, 181, 187.
Marco Aurelio, 111.
Marquand, A., 390.
Marsilio de Inghen, 228.
Mates, B., 111n, 151n, 161n.
Matriz, cuadrada, 492, 643, 644; de una fórmula, 674, 675, 677, 678.
Mayor y menor, términos, 65 y ss.
Mays, W., 376n, 390n.
Medádico, relativo, 405, 406.
Megáricos, 11, 12, 14, 92, 107 y ss.
Meinong, A., 244, 555.
Melanchton, P., 282.
Mentiroso, El, 105, 107, 108, 213, 609, 610, 613, 614, 682, 683; Tarski sobre el, 549, 618.
Mereología, 394.
Metalenguaje, 618.
Metamatemática, 633 y ss.
μεταπίπτοντα, 146, 147.
Metateoría, de la lógica general, 652-662; de la lógica primaria, 641, 652, 653.
Michalski, K., 223n.
Milton, J., 282.
Mill, J. S., 343 y ss., 421, 595; Frege sobre, 410, 411.
Minio-Paluello, L., 176n, 179n, 191n, 211n.
Mitchell, O. H., 399.
Modal, Lógica, en Abelardo, 199, 200; en Aristóteles, 77 y ss.; en el Pseudo-Escoto, 227, 228; en Guillermo de Shyreswood, 217, 218; en los megáricos y estoicos, 110 y ss.; en San Alberto Magno y Santo Tomás de Aquino, 221; moderna, 509 y ss., 559 y ss.
Modal, silogismo, 38, 39, 78 y ss.; en Teofrasto, 96, 97.
Modales, Contextos, sustitución de los, 567 y ss.
Modalidad *de dicto* y *de re*, 200, 201, 217, 218, 221, 472, 473, 573.
Moderni, 188, 189, 229, 253, 254.
Modos silogísticos, 68 y ss.
Monádico, Cálculo funcional, solución del problema de la decisión para el, 675, 676.
Monádico, relativo, 399, 400.
Monomorfismo de sistemas axiomáticos, 358, 436, 437, 439, 440.
Montucla, J. E., 353.
Moody, E. A., 198n, 276n.
Mostowski, A., 681, 682.

Natural, Deducción, 499 y ss.
Navaja de Ockham, 227.
Necesidad, absoluta y relativa, 87, 88, 98, 99; Aristóteles sobre la, 36, 37, 38, 39, 81, 89, 90; en la lógica modal, 512, 513, 515, 516, 524, 525, 526; en la teoría estoica, 117, 118; en Leibniz, 308, 309; Platón sobre la, 17, 18; y lenguaje, 584 y ss.
Negación, 19, 20; Abelardo sobre la, 197, 198; Aristóteles sobre la, 44, 45, 52 y ss.; los estoicos sobre la, 139, 140, 152, 153; Wittgenstein sobre la, 587, 588.
Newton, I., 286.
Nicod, J. D. P., 488.
Nicole, P., 291.
No-euclidiana, Geometría, 352, 353.
No-numerables, conjuntos, 404 y ss., 662, 663.
Nombres lógicamente propios, 554, 555.
Nominales, 223, 224.
Normal, forma —— conjuntiva, 648, 649; forma —— prenexuada skolemiana, 399, 400, 658, 659.
Notker Labeo, 187.
Nula, clase, 376, 377, 393, 394.
Numerales, 362; Frege sobre los, 419, 420.

Obligationes, 218, 220; Strode sobre las, 229.
Observación, 54, 55.
Ockham, Guillermo de, 223, 227, 293; sobre las *consequentiae*, 266 y ss.; sobre las relaciones, 395, 396.
Omniaplicables, términos, 18, 19, 28, 29.
Ontológico, Argumento, 189, 190; Frege sobre el, 424, 425; Kant sobre el, 330, 331.
Oposición, cuadrado de la, 52, 53; en Abelardo, 197, 198; modal, 82.
Oración-caso, 46, 47, 50, 51, 144, 145, 147, 148, 150, 151.
Oración-tipo, 46, 47, 50, 51, 144, 145, 150, 151, 548, 549.
Orígenes, 156, 157.

Pablo de Pérgola, 229, 271.
Pablo de Venecia, 214, 229.
Paradoja, de Berry, 609, 610; de Burali-Forti, 606; de Grelling, 609, 610; de Richard, 606, 607; de Russell, 606; de Skolem, 661, 662; (*V. asimismo* Mentiroso, el).
Paradojas, de la implicación material y estricta, 260 y ss., 510, 511; de la teoría de conjuntos, 606 y ss.; megáricas, 107, 108, 213; semánticas, 618.
Paralelas, postulado de las, 359.
Parménides, 8, 14, 20, 107.
Partes del discurso, caracterización estoica de las, 135, 136.
Parvipontanus (Adán de Balsham), 213, 406.
Pascal, B., 291, 293, 359.
Patzig, G., 70n.
Peacock, G., 369.
Peano, G., 302, 404, 436 y ss., 664; su simbolismo, 482, 483.
Pedro Hispano (Papa Juan XXI), 219, 273, 395n; sobre la *appelatio*, 245, 246; sobre la *distributio*, 252, 253; sobre la *suppo-*

sitio terminorum, 244 y ss.; sobre los universales, 246, 247.
Pedro Lombardo, 223, 228.
Peirce, C. S., 47n, 389, 390 y ss., 472, 488; definición de conjunto finito, 406, 407; sobre la identidad, 400, 401; sobre la lógica de relaciones, 395, 401.
Peripatética, escuela, contrapuesta a la escuela estoica, 107 y ss.
Perry, H., 283.
Pierre D'Ailly, 215, 216.
Pitágoras, Teorema de, 4.
Pitagóricos, 2, 3, 6, 7, 361.
Platón, 1, 5-21, 30, 37, 42, 284; y la *consequentia mirabilis*, 164; y las entidades abstractas, 550, 582-583, 591-592.
Pletho, G., 284.
Ploucquet, G., 322.
Pluricategorial, lógica, 582 y ss.
Plutarco, 154, 406.
Poincaré, H., 608, 625, 632.
Poliádicos, relativos, 399, 400.
Pomponazzi, P., 283.
Ponendo ponens, 92, 93; en Abelardo, 205, 206.
Pons asinorum, 176, 177.
Popper, K. R., 523, 605.
Porfirio, 24n, 26, 177, 180, 187; sobre el género y la especie, 184, 185; sobre los tres géneros de discurso, 183 y ss.
Porfirio, Arbol de, 217, 218, 294, 295.
Port Royal, Lógica de, 291 y ss.
Posibilidad, absoluta y relativa, 87, 88, 98, 99, 117, 118; definida en términos de necesidad y negación, 81; en cuanto distinta de la contingencia, 80; en la moderna lógica modal, 512 y ss.; tratamiento de la —— en Abelardo, 200, 201.
Positio terminorum, 182, 183.
Post, E. L., 389, 494, 528, 641.
Post-praedicamenta, 24, 25, 191, 192.
Prantl, G., 138n, 156, 172, 214, 220.
Predicables, 31, 32, 33, 34, 177; en Garland el Computista, 187, 188; en Guillermo de Shyreswood, 217, 218.
Primaria, Lógica, 165, 167, 275.
Prior, A. N., 114n, 487n.
Prisciano, 136, 146, 198, 231, 234.
Probabilidad, en Boole, 383 y ss.
Próblema, 32, 33.
Proclo, 3, 352, 406.
Propiedad, 33, 34.
Proposiciones, 46, 47, 50, 51, 145, 146, 147, 148, 551; en Abelardo, 192, 193.
Proposiciones verbales, en Mill, 345, 346.
Propositio, = premisa rectora, 168, 169; = signo proposicional, 47, 48, 169, 192, 193.
Propositiones mentales, 214, 215.
Proprietates terminorum, 196, 197, 218, 219, 230 y ss.
Protágoras, 13.
Prótasis, 32, 33.
Proyectiva, geometría, 359.
Pseudo-Escoto, 227, 502, 511; sobre las *consequentiae*, 257 y ss.
Ptolomeo, Claudio, 352.
Ptolomeo Soter, 107.

Quine, W. V., 477, 478n, 479, 495, 508, 509, 562n, 573 y ss., 582, 591n, 599, 608n, 625n.
Quintiliano, 169.

Ramsey, F. P., 617, 618.
Ramus, Petrus, 278 y ss.
Reales, números, 372 y ss., 404, 405, 625, 626.
Recursivas, funciones, 678 y ss.
Reducción (de los silogismos), 36, 38, 39, 72, 73, 96, 97.
Reducción, Principios de (en la lógica modal), 512, 513, 525, 526.
Reducibilidad, Axioma de, 615 y ss.
Reductio ad absurdum, 14, 15, 121, 122, 163, 164; distinta de la *reductio ad impossibile*, 8, 9.
Reductio ad impossibile, 6, 7, 8, 9, 92, 93.
Reichenbach, H., 49n.
Relaciones, Lógica de, 38, 39, 175, 241, 242; en De Morgan y Peirce, 394 y ss.; en Lambert, 322; en Leibniz, 299, 300, 303, 304.
Richard, J., 607.
Riemann, G. F. B., 353.
Robinson, R., 8n, 9n, 11n.
Robinson, R. M., 681, 682.
Roscelino, 189, 210.
Ross, Sir David, 83, 85n.
Rosser, J. B., 529n, 670n.
Royal Society, 311, 312.
Russell, B., 244, 290, 372, 404, 431, 473, 479, 488, 492, 498, 501, 514, 553 y ss., 562, 584, 585 y ss., 635, 673, 688; sobre la identidad, 576; su paradoja, 606 y ss.; teoría de los tipos, 610, 611.
Ryle, G., 623n.

Saccheri, G., 319, 352.
Salisbury, Juan de, 178, 211.
Sånderson, R., 276.
Satisfacibilidad, 656.
Satz-an-sich, 332, 333.
Savonarola, G., 225.
Scientia sermocinalis, 215, 216.
σημεῖον en la teoría estoica, 133, 134.
Schlick, M., 587.
Schmidt, A., 583n.
Schönfinkel, M., 484, 656, 675, 676.
Schröder, E., 391, 392, 397.
Schuhl, P. M., 112n.
Schütte, K., 677.
Séneca, 133.
Seton, J., 277.
Sexto Empírico, 7, 15n, 110, 121, 133 y ss.,

136 y ss., 153, 154, 156, 161, 164, 175; traducción latina de, 260, 261.
Shannon, C. E., 390n.
Sheffer, H. M., 391, 394, 483, 488.
Signa cuantitatis, 198, 199.
Significado, 602, 603; teoría aristotélica del, 42 y ss.; teoría estoica del, 130 y ss.; teoría fregeana del, 536 y ss.; (*V. asimismo* Comprehensión, Connotación, *Significatio*, *Sinn*).
«Significar», ambigüedad de, 149, 150.
Significatio, en Burleigh, 251; en Guillermo de Shyreswood, 230 y ss.; en Ockham, 251.
Silogismo, 9, 12, 22, 23, 29, 30, 34, 41, 42, 64 y ss.; modal, 83 y ss.
Silogística, apartado de la lógica general, 167; en el sistema de Boole, 387, 388; en la lógica de Port Royal, 294, 295; Kant sobre la, 327; Leibniz sobre la, 297, 298; Mill sobre la, 346, 347.
Silvestre II (Gerberto), 187.
Simbolismo, 475-486.
Simplicio, 135.
Singulares y generales, enunciados, 29, 30, 52, 53, 60, 61, 147, 148; en Euler, 283; en la lógica de Port Royal, 294, 295; en Leibniz, 298, 299; en Ramus, 281, 282; en Wallis, 282.
Sinn und Bedeutung, 455 y ss., 545, 546.
Skolem, T., 439, 583n, 658, 662, 677, 680.
Sócrates, 7, 8, 14, 20.
Sofismas, 11, 12, 15, 213, 218, 219, 276.
Solmsen, F., 23n.
Spinoza, B. de, 4, 278, 310.
Steele, D. A., 406n.
Strawson, P. F., 593, 594.
Strode, R., 228; sobre las *consequentiae*, 270, 271.
Subalternas, 53, 54.
Subcontrarias, 53, 54.
Substancia, en Aristóteles, 24, 25, 27, 28, 30, 31.
Sujeto-predicado, enunciados de, en Aristóteles, 29, 30, 52, 53, 60 y ss.; en Leibniz, 317, 318; en los estoicos, 136, 137.
Suppositio terminorum, 196, 197, 472, 473; Burleigh sobre la, 251; *communis*, 238, 239; *confusa*, 240, 241; *determinata*, 240, 241; *discreta*, 238, 239; en Geulinex, 290; en la lógica renacentista, 276; *formalis*, 238, 239; Guillermo de Shyreswood sobre la, 230, 231; *indeterminata*, 240, 241; *inmobilis*, 238, 239; *manerialis*, 237, 238; *materialis*, 235, 237; *mobilis*, 237, 238; Ockham sobre la, 248 y ss.; Pedro Hispano sobre la, 244, 245; *personalis*, 237, 238; *simplex*, 237, 238.
Sustitución, 444, 452, 453, 468 y ss., 489, 490.
Sustitución y separación, 102.
Swineshead, R., (Suisseth), 228.
Syncategoremata, 218, 219.
Tales, 3.
Tarski, A., 394, 487n, 534, 547, 632n, 672, 681, 682, 684; sobre la consecuencia lógica, 595 y ss.; sobre lenguaje y metalenguaje, 618, 619.
Taylor, A. E., 15n.
Temistio, 178.
Teodosio, 165, 319.
Teofrasto, 94 y ss., 152, 175, 180; silogismo κὰτα πρόσληψιν, 101, 162; silogismos hipotéticos, 99, 100, 104; silogismos modales, 96, 97; teoría de la modalidad, 95, 96.
Tercio excluso, 30, 31, 43, 44, 45, 46, 153, 154, 162, 163, 661, 662; en el intuicionismo, 631 y ss.
Terminus vocalis, *mentalis*, *scriptus*, 183 y ss., 215, 216, 250.
Thémata estoicos, 156, 157, 160, 161, 298, 299.
Theologumena Arithmeticae, 362, 363.
Thomae, J., 418, 438.
Thomas, I., 213n, 220n.
Thurot, C., 234.
Tiempos, 42, 43, 48, 49; en los *lektá* estoicos, 145, 146.
Tipos, Teoría de los, 30, 31, 610, 611; Teoría ramificada de los, 613, 614.
Tollendo tollens, 92, 93, 205, 206.
Tomás de Aquino, Santo, 190, 212, 215, 299, 601; sobre la modalidad, 221.
Tomás de Erfurt, 226.
Tópicos, de Aristóteles, 31 y ss.; de Cicerón, 169, 170; en Abelardo, 202, 203; en Boecio, 182, 183; en Guillermo de Shyreswood, 218, 219.
Tópos, 32, 33.
Transitividad de la implicación, en Abelardo, 206, 207; en Aristóteles, 91, 92.
Trivium, 186, 187.
Turing, A. M., 682.
Turquette, A. R., 529n.

Universal, enunciado, 52, 53, 138, 139, 472, 473.
Universales, 25, 26, 188, 189; Bolzano sobre los, 335, 336; en Boecio, 184, 185; Frege sobre los, 421, 422; Guillermo de Shyreswood y Pedro Hispano sobre los, 246, 247; Leibniz sobre los, 299, 300; Ockham sobre los, 247, 248; Quine sobre los, 582, 583.
Universalidad y necesidad, 5, 6; Popper, 604; en Tarski, 595 y ss.; su conexión en Bolzano, 337 y ss.; su distinción en Aristóteles, 89, 90.
ὑπάρχειν, 59, 60.

Vailati, G., 319.
Validez, 1, 10, 11, 15, 502, 503; Bolzano sobre la, 337 y ss.
Valores de verdad, 382; Frege sobre los, 459 y ss., 536.

Valla, Lorenzo, 278.
Variables, 58, 59, 103; proposicionales en Aristóteles, 86, 87, 91, 92; Russell sobre las, 479, 480; sintácticas o metalingüísticas, 478; uso de Frege, 451, 452, 475 y ss.; uso estoico de, 151, 152.
Venn, J., 389; diagramas de, 389, 390.
Verbales, proposiciones, en Mill, 345, 346.
Verdad y falsedad, 15, 50 y ss.; Abelardo sobre la, 192, 193; Aristóteles sobre la, 42, 44, 48, 49, 79, 80; Frege sobre la, 459, 460, 536; Leibniz sobre la, 298, 299, 333, 334, 551, 552; los estoicos sobre la, 141, 142; Pierre de Ailly y Gregorio de Rimini sobre la, 216, 217; Platón sobre la, 15 y ss.; Santo Tomás de Aquino sobre la, 222 y ss.; Tarski sobre la, 547 y ss.
Vicente Ferrer, San, 246.
Victorino, Mario, 177, 186, 187.
Von Neumann, J., 490, 491, 495, 496, 634, 636n.
Von Whright, G. H., 516, 517, 572.

Wadding, L., 226.
Waismann, F., 601.
Wallis, J., 282, 352.
Wang, Hao, 583 y ss., 625n.
Weierstrass, K. T. W., 370, 372.
Wessel, C., 364.
Whitehead, A. N., 392, 431, 473, 479, 480, 492, 498, 501, 514, 552 y ss., 562, 635, 688.
Wilkins, J., 302.
Wilson, T., 276.
Wittgenstein, L., 389, 473, 494, 562, 585 y ss., 620n, 678.
Wycliffe, J., 229.

Zabarella, J., 173, 283.
Zamenhof, L. L., 600.
Zenón de Citio, 107, 109, 131.
Zenón de Elea, 7, 92, 109, 110, 121, 124, 127.
Zermelo, E., 431n, 633 y ss.

«NUNCA parece haber sido mayor la decadencia de la lógica formal que en las épocas de olvido de su historia. Y, recíprocamente, tampoco es de extrañar que los progresos de la lógica formal a partir de la pasada centuria trajeran consigo una renovación del interés por los estudios de historia de la lógica. Dicha renovación resultaba tanto más imperiosa cuanto que el único jalón historiográfico hasta comienzos de siglo era el intento acometido por Karl Prantl en su Geschichte der Logik im Abendlande (1855-70) de ordenar y comentar las fuentes clásicas hasta el siglo XV; y Prantl, como es sabido, no estuvo muy afortunado en sus apreciaciones. Para los historiadores contemporáneos de la lógica ha sido casi un tópico obligado el definirse polémicamente por relación a su predecesor, cuyo objetivo primordial pareció ser —al decir de uno de ellos— el de probar la validez del aserto kantiano de que la lógica formal era un capítulo concluido y cerrado a partir de Aristóteles. Hoy día se sabe bien que no es así y que la lógica ha tenido una historia, poco poblada a estas alturas de enigmas indescifrables gracias a la copiosa y penetrante labor de investigación promovida desde los años treinta por la obra pionera de Jan Lukasiewicz y sus discípulos más o menos directos... Ello no obstante, en nuestros días no abundan las historias generales de la lógica, entre las que merece ocupar un lugar de honor The Development of Logic (1962) de William y Martha Kneale. Una lúcida preocupación por la naturaleza y el alcance de la lógica formal, sus relaciones con la matemática y la filosofía y su lugar en el conjunto de las ciencias preside en este libro la articulación evolutiva del corpus logicum desde la lógica peripatética y megárico-estoica hasta Frege y el subsiguiente y espectacular desarrollo de la teoría y metateoría de los formalismos lógico-deductivos en nuestro propio siglo.»

Javier Muguerza, «La lógica, su historia y sus fronteras», Revista de Filosofía, 84-85, 1963, pp. 153-168.